

VNIVERSÆ GEOMETRIÆ, MIXTÆQVE MATHEMATICÆ SYNOPSIS,

ET BINI REFRACTIONVM DEMONSTRATARVM TRACTATVS.

Studio & Operâ F. M. MERSENNI M.

TOMVS. II.







PARISIIS,
Apud ANTONIVM BERTIER, viâ Iacobæâ, sub signo Fortunæ.
M. DC. XLIV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.



ILLVSTRISSIMO PRINCIPI

LVDOVICO VALESIO ALENSI COMITI.

LEVIORIS EQVITATVS PER GALLIAS MAGISTRO, ET GALLO-PROVINCIÆ PROREGI.

F. M. MERSENNVS ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

ILLVSTRISSIME PRINCEPS,

Magnorum Virorum, quos ſæcula vetera prodidere, opera nobiliſſima, quæ in omnium commodum in Synopſim contracta vnico ſtudioſorum obtutui repræſentanda ſuſcipio, pluribus de cauſis Tuo nomini nuncupata volui, præſertim verò quòd illis Te ſcientijs plurimùm delectari nouerim, quæ nihil fucatum, nil in vtramque partem mobile, nil præter veritatem proferant, & ſummopere mendacium oderint.

Cenſeas igitur, MAGNE PRINCEPS, hocce Volumine præclara Græciæ, Italiæ, & Galliæ ingenia mutuo conſenſu Te ſalutatum ire: prairéque ducem Archimedem Regis Syracuſanorum ſanguine nobilem, qui nunquam ſatis laudatum Opus de ſphæra, cylindróque Tibi offerat, cæteróſque Græcos Theodoſium, Apollonium, Pappum & alios comites habeat. Commandinum, & Valerium Italos; Snellium, Ste-

uinum Batauos; Vietam Gallum; & alios, huius operis decus & ornamentum, Prouinciam adire, eique congratulari quòd Ludouicum Valesium Litteratorum Mecenatem Proregem habeat.

Anglia velut agrè ferens quòd illi Te veneraturi praierint, binis Operibus, firmissimis exquisitissimisque demonstrationibus euincit sibi locum vltimum inter Primates illos minimè deberi; quapropter lucis candidissima radijs armata Refractiones suas ad pedes tuos procumbens deponit. Faxit Deus Opt. Max. vt quemadmodum hac veritas solet à paralogismis Geometras eruere, ita nos ab omnibus erroribus tam practicis, quàm speculatiuis aterna liberet Veritas, quam impensè diligis, donec solutis anigmatibus qua nostra mentis aciem perstringunt, illius plenâ luce perfundaris, illáque verba Regia, Beati qui habitant in domo tua Domine, in sæcula sæculorum laudabunt te, Memoriam abundantiæ suauitatis tuæ eructabunt; & iustitiâ tuâ exultabunt, *raptus in aternam gloriam perpetuò contempleris.*

PRÆFATIO
VTILIS
IN SYNOPSIM
MATHEMATICAM.

NTE sequentium Tractatuum lectionem primò notandum venit operæpretium esse, si quisquis vtiliter hosce tractatus secum ruri circumferre velit ad refricandam omnium Mathematicæ partium memoriam, & ad citandas, reperiendasque veterum & recentiorum propositiones, margini, vel chartæ quibuslibet foliis impressis interiectæ diagrammata, quæ iudicarit necessaria propositionibus intelligendis, adhibeat: quod typis fieri non potuit absque maximis impensis: sufficiet autem illas figuras addere propositionibus quas absque figura non intellexeris.

Secundò cruces Euclidis, Archimedis, Theodosij & Sphæricorum quibusdam propositionibus adhibitæ significant illas esse præcipuas, magisque addiscendas. Sed cùm cæterorum tractatuum fœcundiores propositiones debuissent etiam crucibus interdistingui, illas Typographi omisere: quas ex nostro codice quispiam in suum transferre poterit.

III. Geometricum studium seriò amplectentibus, ab Euclideis elementis, quæ via regia vocantur, incipiendum; quæ vel sola sufficiunt ad ea facilè capienda quæ de rebus Mathematicis Plato, Aristoteles, & alij Philosophi hucusque editi suis scriptis interseruêre; imò & ad alios Geometras intelligendos qui sequuntur. Constat autem ex omnibus artibus, & scientiis, quantus & quam vtilis, ac præclarus sit illorum vsus; de quo Blancanus Bettinus, Proclus, & alij consulantur, si quæ diximus in Genesim, & de Harmonicis minimè sufficiant.

IV. Rami Geometriam Euclidi subiecimus ob summam illius breuitatem: quódque termini, & ordo quibus vtitur, nonnunquam

Euclideis propositionibus lucem afferat: sed & ipse in scholis Mathematicis habet de illarum vsu non contemnenda, quæque lectione digna sunt.

V. Sequitur Archimedes, cui vix quispiam ausit se comparare si præsertim ea quæ tradit, vi solâ ingenij, absque Analyticæ artis, vel Speciosæ auxilio repererit & demonstrarit: quâ quidem arte freti Geometræ credunt se omnia, & alia plura inuenire posse, quæ prodidit Syracusanus ille: quapropter Vietæ debent plurimum, vtpote Speciosæ inuentori, vel restauratori; quem etiam Diophantus iuuit.

Florentij Riualti versionem habes, quòd non omnia Archimedis opera Commandinus verterit: cuius tamen versione in Euclideis elementis vsus sum. Cùm autem primo notando monuerim de schematibus addendis, ea saltem adhibeantur propositionibus quæ à litteris Capitalibus pendent, quales sunt ferè omnes de Quadratura parabolæ, & quæ secundum conicorum librum C. Mydorgij componunt. Vnico schemate Arenarium explicatum volui; idem in aliis facturus tractatibus, si pauca schemata sufficere potuissent: quod etiam factum est l. 4. Opticæ Prop. 59. in explicandis parallaxibus.

Archimedi verò succedunt nonnulla supplementa quæ viris doctis Snellio, Keplero, Lucæque Valerio debentur: quibus addi possint acutissimæ propositiones clarissimi Tauricelli; qualis est ea quæ nuper tantopere nobis placuit, qua demonstratur solidum hyperbolicum infinitæ longitudinis æquale cylindro finito; quod etiam Geometra nuper reperit in spatio ex curua per summitates omnium rectarum proportionalium, & rectâ, cui sunt illæ perpendiculares, composito: si tamen spatium dici potest, quod non vndequaq; clauditur nisi forsan in infinitum: debent autem illæ perpendiculares spatiis æqualibus distare: quas quidem propositiones breui publicas faciet. Omitto varia quæ nostri Geometræ circa grauitatis centra nuper inuenêre, quæ præfatione in nostra mechanica phænomena protuli, & alia quæ ad trochoidem attinent, cuius spatium triplum est circuli lineam rectam motu suo circumferentiæ suæ æqualem super plano recto describentis: solidum autem ex trochoidis circa suam diametrum, vel suum axem conuersionibus genitum Geometra noster reperit esse ad suum cylindrum vt 5. ad 8. quem vrgere & precibus flectere debeas ad opus admirabile quod paratū habet de trochoide tam æquali, quàm producta, vel contracta edendum: varios omitto modos quadrandi parabolam à priori: quibus fortè breui quadratura

hyperboles & circuli; & inuentio rectæ lineæ parabolæ æqualis accedet.

VI. Sequuntur sphærica, de quibus agunt Theodosius, Menelaüs & Maurolycus; quibus tamen Trigonometriam anteposuimus, quæ tam rectilinea, quam sphærica & mixtilinea triangula metitur. Quibus iam addere possis aream ipsam triangulorum sphæricorum 3 maximis circulis constantium, quæ videlicet est ad maximum sphæræ circulum, vt differentia trium illius trianguli angulorum ad duos rectos angulos; verbi gratia, si differentia sit vnius recti, area trianguli erit subdupla maximi circuli, vt Geometra noster demonstrauit.

Maurolyci verò sphærica sequuntur Autolycus de sphæra mobili: Theodosius de habitationibus, Euclidis phænomena, & Cosmographia Astronomica, cum habitationum collatione, quæ sphæricis coronidem imponit: quibus theoriam planetarum addere poterimus, vbi Samius Aristarchus de mundi systemate ad manus nostras peruenerit, vt huic volumini portatili nil omnino desit.

VII. Sequitur Apollonius, cuius libris quattuor alij 4 eiusdem materiæ Clarissimi viri Claudij Mydorgij de sectionibus Conicis subijciuntur, qui Pergæanos vlteriùs promoueant; qui cum 4 posteriores, quos animo paratos habet, in lucem ediderit, non est quòd 4 non extantes Apollonij perquiras, aut quidpiam Opticæ, Catoptricæ, vel Dioptricæ perfectioni accessurum desideres, vix enim quidpiam de reflexionibus, refractionibus, & Dioptrarum vsu legitimo, cæterisque ad visionem pertinentibus dici potest, quod non possis ab eo expectare; vt iam monueram paginâ 193 Hydraulicorum.

VIII. Contractam Pappi Collectionem leges postea, qui libro 7 multos tractatus à veteribus editos enumerat, qui partim temporis tractu periere, partim etiam extant, vel nuper à viris eruditissimis restituti sunt. Sunt autem data Euclidis, quæ Alealmus hac ratione in compendium & tabellam redegit.

SYNOPSIS LIBRI DATORVM EVCLIDIS.

[D]atur
- Magnitudine.
  - Magnitudo in genere. Area. Linea recta. Angulus. } Quibus æqualia possumus exhibere. { 2.3.4.7. Propos. 52. 92. 93.94. 95. 32. 55. 57. 58.59. 60. 84. 85. 86. 87.88.33.39.
  - Circulus, cuius quæ ex centro magnitudine datur.
  - Segmentum circuli, in quo angulus datus est & basis magnitudine.
- Ratione, cui æqualē possumus exhibere.
  - Rectæ ad rectam 1.5.6.8.9.22.23. 24.34.53.54. 56.68.69.76.77.81.94.
  - Rectilinei ad Rectilineam.
    - Similis 50.
    - Dissimilis.
      - vtcumque 51.
      - Modo quodam particulari.
        - Trianguli ad Triangulū 41. 71 72.
        - Quadrati ad Triangulū 63.
        - Rectilinei ad Triangulū 64. 65. 66.67.
        - Parallelogrāmi ad parallelogrāmū 70.73
- Specie rectilineū cuius anguli dati sunt ad vnum & laterum rationes ad inuicem datæ sunt autem.
  - Triangula 34.40.41.42.43.44.45.46.47.80.
  - Parallelogramma
    - quæcumque 61.62.
    - Rectangula 78.
- Positione dantur quæ eūdem semper locū occupant.
  - Punctum 25.27. 90.96.
  - Linea 28.29.30.31.35.36.37.38.
  - Angulus.
- positione & magnitudine.
  - Circulus cuius centrum positione datur, eaque quæ ex centro magnitudine.
  - Segmentum circuli in quo angulus datus est magnitudine, & basis positione & magnitudine.
  - Linea recta 26.91.

Magni-

Magnitudo magnitudine dato maior est quando ablato dato reliquum eidem æquum fuerit 12.

Magnitudo magnitudine dato maior est quam in ratione quando ablato dato reliquum ad idem rationem datam habuerit 10.11.13.14.15.16.17.18.19.20.21.

Quanquam propositiones 48, 49, 74, 75, 79, 82, 83 & 89, minimè cõplexus fuerit vt optimè vir eruditus, amicusq; charissimus animaduertit. Itaque data illa dedimus; déque Spatij Sectione, determinata Sectione, Tactionibus tam planis quàm sphæricis; locis planis, & inclinationibus protulimus ea quæ hactenus restituta sunt, ex quibus supersunt restituenda Euclidis Porismata. Quod enim ad locum ad tres, quatuórue lineas attinet, iam iam Geometra noster illum demonstrauit.

Cùm autem maxima pars propositionum Pappi schemata supponat, eas duntaxat attuli, quæ posse videntur absque figuris intelligi: quæ alia forsan editione dabuntur figuris ad libri marginem appositis.

Porrò qui Pappi textum Græcum videre voluerit, apud Dominum Lescuyer Senatorem eximium esse nouerit, cuius Bibliotheca nulli alteri cedit. Iuuabit autem hîc monere problema illud quod ad calcem Præfationis in Conica Cl. Mydorgij protuli, nunc vniuersaliùs à G. Desargues doctis soluendum ita proponi.

Dato itaque solido, de quo ibidem; plani secantis illud in figura dati generis, cuius figuræ axes sunt in ratione data, positionem inuenire; vel cuius maxima diametrorum coniugatarum inclinatio sit æqualis inclinationi datæ.

Quod vt soluat, mediantibus binis lineis per puncta quotlibet descriptis, plani positionem reperit solidum secantis in elliptica figura, à cuius centro recta ad solidi verticem ducta plano perpendicularis est. Hac enim elliptica mediante figurâ plani positio solidum in circulo secantis inuenietur: Hocque iuuante circulo, plani positio solidum secantis in figura dati generis suos axes habentis in ratione data reperietur; vel cuius axes coniugati maximæ inclinationis, datæ inclinationi æqualis est. Sed absque hisce mediis forsan eadem inuenientur ex data prima base prædicti solidi.

Sequitur verò illius generalissima propositio, quam soluat Geometra. Datis coni base & vertice dataque intersectione plani baseos cum plano secante conum, & binorum istorum planorum inclinatione, inuenire, absque figuræ descriptione, plana conicas secantia diametros sub angulo dato generantia, tangentes, ordinatas,

parametros, cæterasque præcipuas figuræ lineas.

Supersunt aliquæ propositiones ad anguli solidi contemplationem attinentes, quas integro tractatu demonstrandas habet, quasque in antecessum accipe.

In angulo solido tribus rectis conterminato bina sunt ternaria, tres scilicet anguli qui solidum illum angulum inter se constituunt, & tres inclinationes planorum ipsorum angulorum. Vnde videntur quatuor oriri problemata, nempe,

1. Datis tribus angulis tres inclinationes inuenire.

2. Datis duobus angulis & vna inclinatione, reliquum angulum cum duabus aliis inclinationibus inuenire.

3. Dato vno angulo cum duabus inclinationibus, duos alios angulos & vnam inclinationem inuenire.

4. Datis tribus inclinationibus tres angulos inuenire.

Ex hac autem solidi contemplatione duo tantùm exorientur problemata: hic autem modus est.

In quocunque angulo solido tribus rectis conterminato plana inclinationum illius ita sumi possunt vt ad inuicem alium angulum solidum tribus itidem rectis conterminatum constituant; cuius vertex intra primum contineatur, & in alterutro ipsorum angulorum solidorum quilibet angulus sit reciprocè supplementum vnius inclinationum alterius.

Quibus demonstratis problema tertium ad secundum, quartumque quod difficilius videbatur, reducitur ad primum, estque facillimum.

IX. Sequuntur Mechanicorum Libri, quorum primo fusissimè de centro solidorum, déquealiis agitur, partéque secunda & tertia quæ Commandinus & Lucas Valerius ea de re docuerunt, referuntur. Quibus iam addi possent multa præclara, præter ea quæ notando 3 & 4 præfationis in mechanica phænomena diximus, quæ nouiter à nostris summis Geometris inuenta sunt. Quarta pars libri 1 mechanic. agit de linea directionis, & cæteris ad grauitatis centrum attinentibus.

Liber secundus fusè de quinque potentiis; cuius prima pars de iis quæ vectem atque libram, & centri grauitatis inueniendi modum spectant: Secunda de ponderibus obliquis, iterúmque de Vecte & Libra, reliquisue machinis ad illud principium reuocandis: deque nauigatione, & aliis quæstionibus Mechanicis ab Aristotele propositis. Tertia pars de circuli vtilitatibus, & mirabilibus in mechanicis. Quarta pars de Trochleis. Quinta de Scytalis, Ergatis, axe in

peritrochio, tollenone, pancratio, &c. Quæ omnia iuuabunt, iuuabunturque ex nostrorum Phænomenon Mechanicorum comparatione, vt iam præfationis puncto 2 in illa phænomena monui.

X. Iam superest Optica quæ 7 libris huic Synopsi colophonem imponit: quorum primus agit de luce, vmbra, coloribus, oculi fabrica, visione, communibus obiectis & aspectus fallaciis. Secundus de Catoptrica, vel speculis tam planis, quàm sphæricis, cylindricis, & conicis. Tertius de Dioptricis, & tubis Batauicis. Quartus de parallaxibus, seu diuersitatibus aspectus. Quintus de arte Perspectiuæ. Sextus & septimus refractionis naturam variis demonstrationibus explicant, quorum septimus ex hypothesibus Physicis præclara concludit.

Iuuabit autem legisse Sanctorij obseruationem, qui pag. 322 in artem medicinalem Galeni, ait nigrum colorem fieri dum lumen in superficiebus innumeris refrangitur, seu ex sphæris diaphanis plenis illuminatis, quòd hæ tenebras & vmbras generent ex quibus nigredo; quod ex lagena vitrea aqua plena lumen in cuspidem proijciatur, vmbra verò in partes reliquas.

Album ait se producere ex 40 plus minus sphærulis vitreis vacuis & perforatis, quæ sint nucleis cerasorum magnitudine æquales, in cyathum aquâ plenum missis, quæ simul vnitæ & vacuæ colorem album efficiunt: quæ cùm aquâ replentur, fit nigrum: ab aliis corporibus non sphæricis viridem, puniceum & purpureum deducit. Alios medios colores facit, pallidum inter album & flauum, quem dicere possis giluum, & χλωρὸν, qualis est albi vini antiquati: flauum ξανθὸν, qualis est in flaua bile: rufum, seu rutilum; qualis in arido croci flore: fuluum, qualis est in orichalco, dorsoque vulpis, quem paulo obscuriorem rauum, appellant: rubrum, phæniceum, vel puniceum, qualis in granis mali punici, & in superiore iride: qui similiter purpureus in labiis, sanguineus, chermesinus, ostrum, &c. Glaucum, vel cæsium in oculis, cæruleum in cœlis, lapide lazuli, saphyro, &c. Cætera penes autorem.

Quanto subtiliùs colorum naturam Vir illustris R. Cartesius octauo de Iride discursu explicarit, quisquis ibidem colorum ortum ex variis sphærularum motibus legerit, cum admiratione fatebitur. Ad quod breui speramus accessurum peculiarem de coloribus tractatum subtilissimi Philosophi Honorati Fabry, de quo iam alibi, qui tot rationibus & obseruationibus probat colores nil esse aliud præter lumen vario modo reflexum, aut refractum: album esse continuam radiorum seriem ab obiectis reflexorum, vel manantium, nigrum vel

omnimodam radiorum absentiam, si fuerit perfectè nigrum, vel illorum paucitatem, & interruptionem ferè continuam; rubeum inter album & nigrum medium, alternam radiorum interruptionem, &c. vt eum nequeas animo discendi perlegere, quin eas libenter in illius sententiam.

Porrò quam initio libri 7 Opticæ reperies hypothesim fusiùs, explicatam habes 24 Prop. Ballisticæ, quæ illi iuncta libro pauca supersunt in ea materia quæ desideres: quanquam notandum illam solis tumescentiam non ita necessariam videri, quin aliquo corporis solaris motu trepidationis, cribrationis, &c. Phænomena lucida possint explicari: dummodò enim ita moueatur circumfusus aër, aut quoduis aliud corpus solem circumstans, vt lucem eodem modo percipere, sentiréque videamur, nec quidpiam contra mechanicæ leges afferatur, quid vlteriùs cupias? nisi fortè nunquam tibi satisfieri dixeris, donec clarè innotescat non solùm quot modis fieri possit illuminatio, sed etiam quomodo reuera fiat: quod vix peregrinus sperare, potiúsque in patria expectare debeas.

Est tamen quòd plurimi faciamus viros summos qui pro viribus nituntur ex hypothesibus siue Democriti & aliorum veterum, siue propriis, omnia naturæ phænomena explicare, quos inter eminet Vir illustris, cuius Physicam indies expectamus; & Decanus Diniensis, cuius Philosophia tam stili pulchritudine, quàm nouarum obseruationum multitudine, rationúmque subtilitate philomusos in tanti viri rapturа sit admirationem, vix vt vnus supersit, qui deinceps atomos reijciat.

Quod attinet ad artem Perspectiuæ, non est quòd aliam desideres eâ perfectiorem quam ab A. Bosse expectamus, qui cælaturis, & incisionibus suis, quibus varios de sectione lapidum, de horologiis, &c. tractatus à G. Desargues compositos tam admirabiliter exornauit, vt ars cælaturæ manum vltimam inuenisse videatur.

Adde Curiosam R. P. Niceronis Perspectiuam, quam edidit de Speculis cylindricis figuras incognitas, ob varias proiectiones aperientibus; & de Diaphanis, ob diuersa plana triangularia, siue omphaloptra, ex certis distantiæ punctis obiecta dissita colligentibus (quæ collecta dissipant ex aliis punctis) déque aliis mirandis phænomenis, quibus propediem plura sit additurus.

XI. Quasdam verò huic Synopsi Mathematicæ partes deesse noui; verbi causâ Horologiographiam, vel Sciotericam, de qua fusè satis nuper prædictus A. Bosse: Theoriam Planetarum, de qua consulatur Epitome Kepleri, Blancani sphæra, & Aristarchus in syste-

mate, quem fortè breui faciemus iuris publici. Quid opus illud ingens eximij Astronomi I. Boullialdi, quod iam prælum exercet, reticeam? quod facilè superabit quidquid hactenus Astronomicum editum est, quódque nihil aliunde supponet, vt qui volumen illud habuerit, omnia generis istius obtineat. Omitto etiam Analysim, seu Algebram, quam ex Vieta, nuperáque illustris V. Geometria, Diophanto adhibito repetas; nisi malis eam industriâ Geometræ D. Chauueau adornatam, & maiori claritate, facilitatéque donatam expectare.

Non commemoro quæcunque ad obsidiones, & defensiones attinent, hoc est Architecturam militarem, quam plurimi cum Itali, & Germani, tum etiam Galli, vt eques à Villa, &c. prope colophonem perduxisse videntur, quòd hæc pars ad Ingeniosos pertineat, è quibus maximè cupiam virum laudatissimum Dominum de Mets pulcherrimum & limatissimum opus suum de Munitione, seu fortificatione in lucem edere, cui deinceps quidquam aliud addi minimè necessarium; & cui etiam exteri gratias habere debeant de incredibili hac in re diligentia.

Sed neque Arithmeticam interserui, cuius fundamenta l. 5, 7, 8, & 9, Elementorum Euclidis habentur; vt Algebræ libro 10. quòd tantus extet Arithmeticarum numerus vt frustra multiplicetur: quum tamen si his in rebus vir incomparabilis D. Freniclus suis nonis repertis augere velit, omnium possit animos rapere in admirationem.

Non desunt autem egregij viri apprimè tam in Geometricis puris quàm mixtis versati, qui scientias istas maximè promoueant, quos inter Pellium Anglum, præter eos quos hoc Opere laudaui, ad ea quæ parauit in lucem edenda vrgere, iuuaréque oporteat.

XII. Non solùm verò Geometras admiror qui vel ipsum Archimedem breui fortè superaturi sint, verùm etiam alios, qui noua reperiunt, aut vetera multis accessionibus adornant; quos inter R. P. Petauius eminet, qui tribus Positiuæ Theologiæ voluminibus satis ostendit, post 4 aut quinque reliqua, quæ in dies expectamus, nullam deinceps aliam Theologiam desiderandam esse, siue rerum soliditatem, siue elegantiam, & expositionem quæsieris, vt iam rerum Theologicarum Osores barbariem non possint ampliùs obijcere, & exprobrare.

Sed & admirandi viri, veréque Theodidacti, & Theotimi Marandei Theologicâ Paraphrasim in sancti Doctoris summâ mirâ eruditione,

raráque pietate illustrantem commemorare lubet, quâ nostram Galliam adornat, & idioma nostrum ad summam dignitatem hoc opere incomparabili euectum, atque sanctificatum perducit; Hispanosque, Germanos, Belgas, Batauos, Polonos, & alios totius orbis, Christiani præsertim, incolas beatos duxero, si opus adeo pulchrum, & vtile in idiomata sua transferri curent, vt æmulatione sanctâ prouocati & incensi scientiâ beatorum perfruantur.

XIII. Verbi diuini præcones monitos velim, qui nouis exordiis suas conciones, aut alias partes inauditis, pulchris tamen & vtilibus tropologiis & comparationibus, atque parallelis exornare voluerint, habere plurima tam hoc quàm præcedente volumine quæ possint ad mores traducere. Quid enim, verbi causâ, facilius quàm ex 29 lucis theorematibus, aut 30 vmbræ sequentibus, quæ leguntur Optices libro primo, multa cum ad fidem tum àd virtutes commendandas elicere?

Vixque propositionem vllam ex ingenti numero theorematum, quibus Opticorum libri septem constant, possis intelligere, quæ peculiarem de moribus cogitationem non ingeneret, & exornandæ concioni seruiat.

Idémque de propositionibus Mechanicis dicendum, illis præsertim quæ 1 & 4 parte l. 1. & toto l. 2 continentur. Sunt enim secunda, tertiaque libri pars magis arduæ. Tertius liber facillimè transferetur ad pietatem ab omnibus, modo voluerint; cuius rei sexcenta proferrem exempla, si contrariæ Synopsis leges permitterent.

Adde quod cuique magè sapiant quæ proprio studio reperit, quòd ab alio suggesta, & edita fiant omnibus communia, vel à pluribus negligantur: vel si quis vtatur, timet ne forsan alius eadem in vsus suos conuerterit, ex quo postmodum hausisse, vel cum quo concurrisse dicatur. Solent enim homines eâ gloriæ cupiditate titillari vt quæ primi dixerint, abs se inuenta credant auditores, apud quos propterea maiori valeant auctoritate, vtpote ingenio præstantiores, vel pietate præcipui; quod gloriæ, famæque desiderium sola valet extinguere, vel fœdare Dei charitas: quam diuini verbi præco ita debet apud seipsum statuere & ordinare, nil, vt Dei gloriam & auditorum salutem æternam quærere debeat.

XIV. Huic Præfationi finem impono vbi monuerim viros illos eruditos qui peculiares ad nostræ fidei confirmationem rationes meditati sunt, & inuenerunt, magnam laudem consecuturos, maioremque carpturos vtilitatem, si tractatus suos rationibus adeo solidis fulciant, vt impij veritati cedere cogantur. Quapropter ob-

ſecrandi ſunt R.P. Dinetus, qui breui, ſed neruoſo tractatu Dei exiſtentiam, & animorum noſtrorum immortalitatem probat: Montarſius ſubtiliſſimus, qui ex primis naturæ, vel ſcientiarum principiis idem aggreſſus eſt, & R.P.I. Lacombeus noſter, qui Philoſophiam & Theologiam nouam adeo fœliciter condidiſſe mihi videtur, ex idearum diuinarum contemplatione, & variis participationis gradibus, quibus ad Deum creaturæ referuntur, vt qui ſyſtema illius Theologico-Philoſophicum perfectè hauſerint, nil illis ſuperſit quàm vt in profundiſſimam ecſtaſim rapti cum beatis æternum Deo canant; *Memoriam abundantia ſuauitatis tuæ eructabunt, & iuſtitiâ tuâ exultabunt*: Obſecrandi ſunt, inquam, illi viri præſtantiſſimi, vel ſi qui præterea, ne ſuos illos tractatus, ſi fieri commodè poteſt, diutiùs luci denegent, tantóſque theſauros diu nimis recondant.

ERRATA TYPORVM EMENDANDA.

PAginâ 58.l.14. quintupartiente. p.86.l.27. homogenea. p.87.l.28. ſolidus, p.313. l.1. SERENI. p.365. l.9. COLLECTIO. p. 583 in figura ſiniſtra pro i ſcribe κ. & dele g & h, & pro ɔ inuerſo ſcribe S. p.588. in figura adde B in centro. p 589. in figura pro D ſcribe B, & in angulis inferioris acumine addatur D.

Omitto reliquos errores quos Lector facilè poterit emendare, vt in ſuperiotibus marginibus Collectionis Pappi, ſemper apponi debuit Pappi Collectiones.

Deinde aliquando in numeris paginarum aberratum, vt poſt 71 & 72, iterum repetitur 71 & 72.

Cæterùm Index qui folium iſtud ſequitur, inſtar erit Dictionarij Mathematici, quo ferè omnes termini vulgo non ita noti explicabuntur.



INDEX LIBRORVM HOC VOLVMINE
COMPREHENSORVM.

DICTIONARIVM MATHEMATICVM.

Hoc est Syllabus omnium vocabulorum, & rerum præcipuarum quæ isto secundo volumine continentur.

A

✠✠✠

B

C

D



E

F

G

H

Libri

M

N

O

P



T

FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

1. PVNCTVM est, cuius nulla est pars, vel quod magnitudinem non habet.

2. Linea verò est longitudo latitudinis expers.

3. Lineæ fines sunt puncta.

4. Recta linea est quæ ex æquali suis interijcitur punctis.

5. Superficies est id, quod longitudinem & latitudinem tantùm habet.

6. Superficiei fines sunt lineæ.

7. Plana superficies est, quæ ex æquali suis interijcitur lineis.

8. Planus angulus est duabus lineis in plano sese contingentibus, & non in directum iacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

10. Cùm verò recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

11. Obtusus angulus est, qui maior est recto.

12. Acutus autem, qui recto est minor.

13. Terminus est, qui alicuius est finis.

14. Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana vnâ lineâ contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertinentes sunt æquales.

16. Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

17. Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta,

& ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem & circulum bifariam secat.

18. Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & eâ quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

19. Portio circuli est figura, quæ rectâ lineâ, & circuli circumferentiâ continetur.

20. Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

21. Trilateræ quidem, quæ tribus.

22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

23. Multilateræ verò, quæ pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

24. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

25. Isosceles, siue æquicrure, quod duo tantùm æqualia latera habet.

26. Scalenum verò, quod tria inæqualia habet latera.

27. Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

28. Obtusiangulum est, quod obtusum habet angulum.

29. Acutiangulum verò, quod tres acutos angulos habet.

30. Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod & æquilaterum est, & rectangulum.

31. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera verò non est.

32. Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

33. Rhomboides, quæ & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.

34. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

35. Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conuenient.

Postulata quinque.

1. Postuletur à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

3. Quouis centro, & interuallo circulum describere.

4. Omnes angulos rectos inter ſe æquales eſſe.

5. Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter ſe conuenire ex ea parte, in qua ſunt anguli acuti duobus rectis minores.

Axiomata, ſeu communes notiones decem.

✠ 1. Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.
2. Et ſi æqualibus æqualia adiiciantur, tota ſunt æqualia.
3. Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.
4. Et ſi inæqualibus æqualia adiiciantur, tota ſunt inæqualia.
5. Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.
6. Et quæ eiuſdem dupla, inter ſe ſunt æqualia.
7. Et quæ eiuſdem dimidia, inter ſe ſunt æqualia.
8. Et quæ ſibiipſis congruunt, inter ſe ſunt inæqualia.
9. Totum eſt ſua parte maius.
10. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

PROPOSITIONES XLVIII.

1. IN data recta linea terminata, triangulum æquilaterum conſtituere.

2. Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3. Duabus datis rectis lineis inæqualibus, à maiori, minori æqualem abſcindere.

✠ 4. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri: habeant autem & angulum angulo æqualē, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualē habebunt: & triangulum triangulo æquale erit: & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri: quibus æqualia latera ſubtenduntur.

✠ 5. Æquicrurium triangulorum qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales: & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.

✠ 6. Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

7. In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ lineæ terminos habentes.

✠ 8. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri: habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

✠ 9. Datum angulum rectilineum bifariam secare.

✠ 10. Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

11. Datæ rectæ lineæ à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

12. Super datam rectam lineam infinitam dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

✠ 13. Cùm recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit; vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

✠ 14. Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales fecerint: ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

✠ 15. Si duæ rectæ lineæ se inuicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

✠ 16. Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore, & opposito est maior.

✠ 17. Omnis trianguli acuti duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.

✠ 18. Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

✠ 19. Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

✠ 20. Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta.

✠ 21. Si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

✠ 22. Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliquâ maiores esse, quomodocumque sumptas: quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta.

23. Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

✠ 24. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia ha-

beant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi maiorem habebunt.

25. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim verò basi maiorem: & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.

26. Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, vnumque latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

✠ 27. Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

28. Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

✠ 29. In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito, & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

✠ 30. Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

31. Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

32. Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis: & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

✠ 33. Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

34. Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt: & diameter ea bifariam secat.

✠ 35. Parallelogramma in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

✠ 36. Parallelogramma in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

✠ 37. Triangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

✠ 38. Triangula in basibus æqualibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

✠ 39. Triangula æqualia in eadem basi, & ad easdem partes

constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

40. Triangula æqualia in basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

✠ 41. Si parallelogrammum & triangulum eandem basim habeant, in eisdémque sint parallelis: parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

42. Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

✠ 43. Omnis parallelogrammi spatij eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

44. Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

45. Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

46. A data recta linea quadratum describere.

✠ 47. In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

✠ 48. Si quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur: angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



LIBER SECVNDVS.

Definitiones duæ.

1. OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

2. Omnis parallelogrammi spatij vnumquódque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus supplementis *gnomon* vocetur. *Vide Scholium.*

Theoremata & Propositiones quatuordecim.

✠ 1. Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcúmque partes: rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ rectâ lineâ insectâ, & singulis partibus continentur. *Videantur duo theoremata Commandini.*

✠ 2. Si recta linea secta fuerit vtcúmque: rectangula quæ totâ, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

✠ 3. Si recta linea vtcúmque secta fuerit: rectangulum sub tota, & vna eius parte contentum æquale est & rectangulo, quod partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

✠ 4. Si recta linea secta fuerit vtcúmque, quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei, quod bis partibus continetur rectangulo. *Vide Corollarium.*

✠ 5. Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato.

✠ 6. Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea: rectangulum sub totâ cum adiecta, & adiectâ contentum, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adiecta constat, tanquam ab vna linea describitur. *Vide Scholium.*

✠ 7. Si recta linea vtcumque secta fuerit, quæ à tota, & vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit quadrato.

✠ 8. Si recta linea vtcumque secta fuerit; & quod quater tota, & vna parte continetur rectangulum vnà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota, & dicta parte tanquam ex vna linea describitur.

✠ 9. Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones interiicitur.

✠ 10. Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in rectum quædam recta linea adiiciatur: quæ à tota cum adiecta, & adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, & adiecta constat, tanquam ab vna linea describitur.

11. Datam rectam lineam secare, ita vt quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato *Vide Scholium.*

✠ 12. In obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius fit quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet pro-

tractum perpendicularis cadit,& linea assumpta exteriùs à perpendiculari ad angulum obtusum.

✠ 13. In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est quàm quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit,& lineâ perpendiculari intus assumptâ ad angulum acutum. *Vide Scholium.*

14. Dato rectilineo æquale quadratum constituere. *Vide prop.25. lib.6.*



LIBER TERTIVS

Definitiones duodecim.

1. ÆQuales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.

2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum,& producta non secat.

3. Circuli contingere se se dicuntur, qui contingentes seipsos non secant.

4. In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales.

5. Magis autem distare à centro dicuntur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

6. Portio circuli est figura, quæ rectâ lineâ, & circuli circumferentia continetur.

7. Portionis autem angulus est, qui recta linea, & circuli circumferentiâ comprehenditur.

8. In portione angulus est, quando in circumferentia portionis sumptum fuerit aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ eius, quæ basis est portionis, rectæ lineæ ductæ fuerint, angulus verò dictis lineis sit contentus.

9. Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

10. Sector circuli est, quando angulus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentiâ ab ipsis assumptâ.

11. Similes

11. Similes circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt: quibus additur à Commandino.

12. Similes circumferentiæ circulorum sunt, in quibus anguli consistunt.

PROPOSITIONES XXXVII.

1. Dati circuli centrum inuenire. *Videatur Corollarium & Scholium.*

2. Si in circumferentia circuli duo quæuis puncta sumantur, quæ ipsa coniungit recta linea, intra circulum cadet.

✠ 3. Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit: quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

✠ 4. Si in circulo duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. *Vide Scholium.*

5. Si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

6. Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

✠ 7. Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli: & ab eo in circulum cadant quædam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, semper remotiore maior est: at duæ tantùm æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad vtrasque partes minimæ. *Vide Scholium.*

✠ 8. Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum vna per centrum transeat, aliæ verò vtcumque: earum quidem, quæ in concauam circumferentiam cadunt, maxima est, quæ per centrum transit: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore maior est: at earum, quæ in curuam circumferentiam cadunt, minima est, quæ inter punctum, & diametrum interijcitur: aliarum verò quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor: duæ autem tantùm æquales à puncto in circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ.

✠ 9. Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales: punctum

quod sumitur, circuli centrum erit.

10. Circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis non secat.

11. Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centrum coniungens, & producta in circulorum contactum cadet.

✠ 12. Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit.

13. Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quàm vno, siue intus, siue extra contingat.

14. In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant; & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales.

15. In circulo maxima quidem est diameter: aliarum verò semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore maior est.

✠ 16. Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est: reliquus autem minor. *Vide Corollarium.*

17. A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

✠ 18. Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

✠ 19. Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur, in ea circuli centrum erit. *Vide Scholium.*

✠ 20. In circulo angulus, qui ad centrum, duplus est eius qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habent. *Vide Commentarium.*

✠ 21. In circulo qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt.

22. Quadrilaterorum, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

23. In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes & inæquales ex eadem parte non constituentur.

24. In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt.

25. Circuli portione data describere circulum, cuius ea portio est.

✠ 26. In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt

circumferentiis, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

✠ 27. In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentijs, inter se æquales sunt; siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

✠ 28. In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem verò minori.

✠ 29. In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. *Videantur quatuor aliæ propositiones.*

30. Datam circumferentiam bifariam secare.

✠ 31. In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui verò in maiori portione, minor est recto; & qui in minori maior recto: & insuper maioris quidem portionis angulus recto maior est, minoris verò portionis angulus recto minor. *Vide Corollar. & Scholium.*

✠ 32. Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt.

33. In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

34. A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

✠ 35. Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secent, rectangulum portionibus vnius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur.

✠ 36. Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò contingat: rectangulum, quod totâ secante, & exteriùs assumptâ inter punctum, & curuam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit quadrato. *Vide 2. Corollar. Campani.*

37. Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò incidat: sit autem quod totâ secante, & exteriùs assumptâ inter punctum, & curuam circumferentiam continetur, æquale ei, quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.



LIBER QVARTVS.

Definitiones septem.

1. Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando vnusquisque figuræ descriptæ angulus vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

2. Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptæ vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

3. Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando vnusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

4. Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptæ circuli circumferentiam contingit.

5. Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

6. Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

7. Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam se applicant.

Propositiones quæ & Problemata, sexdecim.

1. In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ diametro eius maior non sit, æqualem rectam lineam aptare. *Vide Scholium.*

2. In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

3. Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

4. In dato triangulo circulum describere.

5. Circa datum triangulum circulum describere. *Vide Corollarium.*

6. In dato circulo quadratum describere.

7. Circa datum circulum quadratum describere.

8. In dato quadrato circulum describere.

9. Circa datum quadratum circulum describere.

10. Æquicrure triangulum constituere, habens vtrumque angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui.

11. In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

12. Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

13. In dato pentagono, quod æquilaterum, & æquiangulum sit, circulum describere.

14. Circa datum pentagonum, quod æquilaterum, & æquiangulum sit, circulum describere.

15. In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. *Vide Corollarium.*

16. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



LIBER QVINTVS.

Definitiones viginti.

1. PArs est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur. *Vide Scholium.*

2. Multiplex est maior minoris, quando maiorem minor metitur.

3. Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo. *Vide Scholium.*

4. Proportionem inter se habere magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt.

5. In eadem proportione magnitudines esse dicuntur prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando primæ, & tertiæ æquemultiplices, secundæ & quartæ æquemultiplices iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vel vnà superant, vel vnà æquales sunt, vel vnà deficiunt inter se comparatæ.

6. Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

7. Quando autem æquemultiplicium multiplex quidem primæ superauerit multiplicem secundæ, multiplex verò tertiæ non superauerit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.

8. Analogia est proportionum similitudo.

9. Analogia verò in tribus minimùm terminis consistit.

✠ 10. Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicitur eius, quam habet ad secundam. *Vide Scholium.*

✠ 11. Quando autem quatuor magnitudines sunt proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad secundam: & semper deinceps vnâ plus, quoad analogia processerit.

12. Homologæ, vel similis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

✠ 13. Permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

✠ 14. Conuersa ratio est sumptio consequentis, vt antecedentis ad antecedentem, velut ad ipsum consequentem.

✠ 15. Compositio rationis est sumptio antecedentis vnà cum consequente tanquam vnius ad ipsam consequentem. *Vide Scholium.*

✠ 16. Diuisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

✠ 17. Conuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. Æqua ratio, siue ex æquali est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione, fueritque vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad vltimam: *vel aliter*, Est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Ordinata analogia est quando fuerit vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: vt autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata verò analogia est, quando tribus existentibus magnitudinibus, & alijs ipsis numero æqualibus fuerit: vt in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem. Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem. *Vide duas communes notiones.*

Propositiones triginta tres.

1. SI fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulæ singularum æquemultiplices: quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erunt & omnes omnium.

2. Si prima secundæ æquemultiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autem & quinta secundæ æquemultiplex, ac sexta quartæ: erit etiam composita prima, & quinta secundæ æquemultiplex, ac tertia, & sexta quartæ.

3. Si prima secundæ æquemultiplex fuerit, ac tertia quartæ: sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: erit & ex æquali sumptarum vtraque vtriusque æquemultiplex, altera quidem secundæ, altera verò quartæ.

4. Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, & æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquemultiplices secundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. *Vide Corollarium & Scholium.*

5. Si magnitudo magnitudinis æquemultiplex sit, atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æquemultiplex erit, atque tota totius.

6. Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquemultiplices sint, & ablatæ sint quædam earumdem multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æquemultiplices. *Vide Scholium.*

✠ 7. Æquales ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

✠ 8. Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor: & eadem ad minorem maiorem proportionem habet, quàm ad maiorem.

✠ 9. Quæ ad eandem eandem proportionem habent, inter se æquales sunt: & ad quas eadem eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales.

✠ 10. Ad eandem proportionem habentium quæ maiorem proportionem habet, illa maior est: ad quam verò eadem maiorem habet proportionem, illa minor est.

✠ 11. Quæ eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt.

✠ 12. Si quotcumque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

✠ 13. Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam: tertia autem ad quartam maiorem proportionem habeat, quàm quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem habebit proportionem, quàm quinta ad sextam. *Videantur Corollaria.*

✠ 14. Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam: prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda quàm quarta maior erit: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. *Vide Scholium.*

✠ 15. Partes eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionem.

✠ 16. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. *Vide Corollarium.*

✠ 17. Si compositæ magnitudines sint proportionales, & diuisæ proportionales erunt.

✠ 18. Si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

19. Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam. *Vide Corollarium.*

✠ 20. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima maior sit quàm tertia: & quarta quàm sexta maior erit: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor.

21. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione: sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima maior sit quàm tertia: & quarta quàm sexta maior erit: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor.

✠ 22. Si sint quotcúmque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt. *Vide Scholium.*

✠ 23. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.

24. Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam.

✠ 25. Si

✠ 25. Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis maiores erunt. *Sequentes prop. addidit Commandinus ex Pappo.*

✠ 26. Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, & conuertendo secunda ad primam minorem proportionem habebit, quàm quarta ad tertiam. *Vide Coroll.*

✠ 27. Si prima ad secundã maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm secunda ad quartam.

✠ 28. Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: etiam componendo prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.

✠ 29. Si prima & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam: & diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

✠ 30. Si prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia, & quarta ad quartam: per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia & quarta ad tertiam.

✠ 31. Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & secunda ad tertiam & quartam.

✠ 32. Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.

33. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, habeatque prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam: secunda verò priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam.

LIBER SEXTVS.

Definitiones quinque.

1. SImiles figuræ rectilineæ sunt, quæ & singulos angulos æquales habent & circa angulos æquales latera proportionalia.

2. Reciprocæ figuræ sunt, quando in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationes fuerint.

3. Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, cùm vt tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem se habuerit.

4. Altitudo cuiuscumque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.

5 Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ aliquam efficiunt proportionem. *Vide Scholium.*

Propositiones triginta tres.

✠ 1. TRiangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt vt bases.

✠ II. Si vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

✠ 3. Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim: basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

✠ 4. Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos proportionalia sunt: & homologa siue eiusdem rationis sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

✠ 5 Si duo triangula, latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

✠ 6. Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia: æquian-

gula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

✠ 7. Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

✠ 8. Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur: quæ ad perpendicularem sunt triangula & tota & inter se similia sunt.

9. A data recta linea partem imperatam abscindere.

10. Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare. *Videantur Corollaria.*

11. Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

12. Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

13. Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

✠ 15. Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibiipsis respondent; siue reciprocè proportionalia sunt: & quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibiipsis respondent: ea inter se sunt æqualia.

✠ 16. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod mediis continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

✠ 17. Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato: tres rectæ lineæ proportionales erunt.

18. A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.

✠ 19. Similia triangula inter se sunt in dupla proportione laterum homologorum. *Vide Corollarium.*

✠ 20. Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus. *Vide duo Corollaria.*

21. Quæ eidem rectilineo sunt similia & inter se similia sunt.

✠ 22. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea,

quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. *Vide Lemma.*

✠ 23. Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. *Vide Corollarium, & duo theoremata.*

✠ 24. Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti & inter se similia sunt.

25. Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

26. Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa diametrum est toti.

✠ 27. Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

28. Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidiâ, & eo, cui oportet simile deficere. *Videatur Problema.*

29. Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ.

30. Datam rectam lineam terminatam extremâ ac mediâ ratione secare.

✠ 31. In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. *Videatur theorema Pappi.*

✠ 32. Si duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi constituta erunt.

✠ 33. In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. Adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti. *Hinc vt sector ad sectorem, ita angulus ad angulum.*

LIBER SEPTIMVS.

Definitiones viginti tres.

1. VNitas est, quâ vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

2. Numerus autem ex vnitatibus constans multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor maioris, quando maiorem metitur.

4. Partes autem, quando non metitur.

5. Multiplex est maior minoris, quando minor eum metitur.

6. Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

7. Impar verò, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero vnitate differt.

8. Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur. *Vide Scholium.*

9. Pariter verò impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur. *Vide Commentarium.*

10. Impariter verò impar numerus est, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

11. Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas communis mensura metitur.

13. Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

14. Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est planus appellatur: latera verò ipsius se se multiplicantes numeri.

17. Quando autem tres numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera verò ipsius se se multiplicantes numeri.

18. Quadratus numerus est, qui æqualiter est æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

9. Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicatus ab eo, per quem metitur, illum ipsum producit.

10. Si numerus numerum alium multiplicans, aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per vnitates quæ sunt in multiplicato: multiplicatus verò metitur eumdem per vnitates quæ sunt in multiplicante.

11. Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eum, qui ex illis componitur.

12. Quicumque numerus metitur aliquem, metietur quoque eum, quem ille ipse metitur.

13. Quicumque numerus metitur totum & ablatum, etiam reliquum metietur.

Propositiones 41.

✠ 1. SI duobus numeris inæqualibus expositis, detracto semper minore de maiore, reliquus minimè metiatur præcedentem, quoad assumpta fuerit vnitas: numeri à principio positi primi inter se erunt.

2. Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire. *Vide Corollarium.*

3. Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram inuenire. *Vide Corollarium.*

4. Omnis numerus omnis numeri minor maioris, vel pars est, vel partes.

✠ 5. Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: & vterque vtriusque eadem pars erit, quæ vnus vnius.

6. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: & vterque vtriusque eædem partes erit, quæ vnus vnius.

✠ 7. Si numerus numeri pars fuerit, quæ ablatus ablati: & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

8. Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.

✠ 9. Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: & permutando quæ pars est, vel partes primus tertij, eadem erit pars, vel eædem partes, & secundus quarti.

✠ 10. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: & permutando quæ partes est primus tertij, vel pars, eædem partes erit, & secundus quarti, vel eadem pars.

✠ 11. Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

✠ 12. Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. *Vide Scholium.*

✠ 13. Si quatuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

✠ 14. Si fuerint quotcumque numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eâdem proportione: etiam ex æquali in eâdem proportione erunt. *Videantur quinque propositiones Commandini.*

✠ 15. Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem: & permutando vnitas tertium numerum æqualiter metietur, atque secundus quartum.

✠ 16. Si duo numeri se se multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis inter se æquales erunt.

17. Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

18. Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis eamdem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

19. ✠ Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto fit numerus, æqualis erit ei, qui fit ex secundo & tertio: & si numerus, qui fit ex primo, & quarto, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quatuor numeri proportionales erunt.

✠ 20. Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus, æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit, æqualis fuerit ei, qui à medio: tres numeri proportionales erunt.

✠ 21. Minimi numeri eamdem, quam ipsi proportionem habentium, eos, qui eamdem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem.

✠ 22. Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eâdem proportione: sit autem perturbata eorum analogia: etiam ex æquali in eâdem proportione erunt.

23. Primi inter se numeri minimi sunt eorum, qui eamdem, quam ipsi proportionem habent.

✠ 24. Minimi numeri eorum, qui eamdem, quam ipsi proportionem habent, primi inter se sunt.

25. Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum ipsorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

✠ 26. Si

✠ 26. Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & qui fit ex ipsis ad eum primus erit.

✠ 27. Si duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ab vno ipsorum ad reliquum primus erit.

✠ 28. Si duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque primi fuerint, & qui fiunt ex ipsis inter se primi erunt.

✠ 29. Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque seipsum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipsis primi erunt inter se, & si numeri à principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos faciant, & ipsi inter se primi erunt: & semper circa extremos hoc continget.

✠ 30 Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrumque ipsorum primus erit. Quod si vterque simul ad vnum aliquem ipsorum sit primus, & numeri à principio positi inter se primi erunt.

✠ 31. Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

✠ 32. Si duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, eum verò qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus: & vnum ipsorum, qui à principio positi sunt, metietur.

33. Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.

✠ 34. Omnis numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.

35. Numeris quotcumque datis inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant. *Videatur Problema Commandini.*

36. Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur. *Vide Scholium.*

✠ 37. Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eumdem metietur.

✠ 38. Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerum metiantur.

39. Si numerum numerus aliquis metiatur, mensus partem habebit à metiente denominatam.

40. Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

41. Numerum inuenire, qui minimus existens datas partes habeat.



LIBER OCTAVVS.

Propositiones vigintiseptem.

1. SI sint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sunt inter se primi: minimi erunt omnium qui eamdem, quam ipsi proportionem habent.

2. Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperauerit in data proportione. *Vide Corollarium.*

3. Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, minimi omnium, qui eamdem quam ipsi, proportionem habent, eorum extremi primi inter se erunt.

4. Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

✠ 5. Plani numeri inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

6. Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem secundũ non metiatur: neque alius aliquis vllum metietur.

7. Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

8. Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter eos cadunt, numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios eamdem, quam ipsi, ptoportionem habentes cadent.

9. Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

10. Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri ceciderint, quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem cadunt numeri deinceps proportionales: totidem & inter ipsos numeri deinceps proportionales cadent.

✠ 11. Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet ad latus.

✠ 12. Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadunt, & cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

13. Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & vnusquisque se ipsum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipsis proportionales erunt: & positi à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, & ipsi proportionales erunt, & semper circa extremos hoc continget.

✠ 14. Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur: & si latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

✠ 15. Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur: & si latus metiatur latus, & cubus cubum metietur.

✠ 16. Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

✠ 17. Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur: & si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

✠ 18. Inter duos similes planos numeros vnus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

✠ 19. Inter duos similes solidos numeros duo medij proportionales cadunt; & solidus ad solidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

✠ 20. Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri similes plani erunt.

✠ 21. Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant, numeri similes solidi erunt.

✠ 22. Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

✠ 23. Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit.

✠ 24. Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

✠ 25. Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

26. Similes plani numeri inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

27. Similes solidi numeri inter se proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.



LIBER NONVS.

Propositiones triginta sex.

✠ 1. SI duo similes plani numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

✠ 2. Si duo numeri se multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

✠ 3. Si cubus numerus seipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

✠ 4. Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

5. Si numerus cubus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, multiplicatus cubus erit.

✠ 6. Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit.

7. Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat, factus solidus erit.

✠ 8. Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

9. Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem fit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt: at si qui post vnitatem sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

10. Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes: at si qui post vnitatem non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

11. Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

12. Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint, quicumque primorum numerorum metiuntur vltimum ijdem

& eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

13. Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint; qui verò poſt vnitatem primus ſit: maximum nullus alius metietur præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

14. Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipſum præter eos, qui à principio metiebantur.

15. Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorum qui eandem, quam ipſi proportionem habeant; duo quilibet compoſiti ad reliquum primi erunt. *Videantur* 10. *theoremata.*

16. Si duo numeri primi inter ſe fuerint, non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium vllum.

17. Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint, non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium vllum.

18. Duobus numeris datis conſiderare an tertius ipſis proportionalis inueniri poſſit.

19. Tribus numeris datis conſiderare an quartus ipſis proportionalis inueniri poſſit.

20. Primi numeri plùres ſunt; omni propoſita multitudine primorum numerorum. *vide Scholium.*

21. Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.

22. Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par, totus par erit.

23. Si impares numeri quotcumque componantur, & multitudo ipſornm ſit impar, & totus impar erit.

24. Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

25. Si à pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

26. Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

27. Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

28. Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

29. Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

30. Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium eius metietur.

31. Si impar numerus ad aliquem numerum ſit primus, & ad ipſius duplum primus erit.

32. Numerorum à binario duplatorum vnuſquiſque pariter par eſt tantùm.

34. Si par numerus neque ſit à binario duplatus, neque dimidium

imparem habeat: pariter par est, & pariter impar.

✠ 35. Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales: auferantur autem à secundo, & vltimo æquales primo: erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

✠ 36. Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat, & totus in vltimum multiplicatus faciat aliquem: factus perfectus erit. *Videatur Scholium decimi libri, qui sequitur.*



LIBER DECIMVS.

Definitiones vndecim.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cùm ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur.

4. Incommensurabiles autem, cùm quadratis, quæ ab ipsis fiunt, nullum commune spatium esse contingit.

5. His positis ostenditur, cuicumque rectæ lineæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine & potentia: alias verò potentia solùm. Vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

6. Et huic mensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia solùm, rationales.

7 Incommensurabiles verò irrationales vocentur.

8. Et quadratum, quod è recta linea proposita, dicatur rationale.

9 Et huic commensurabilia quidem rationalia.

10. Incommensurabilia verò, irrationalia dicantur.

11. Et rectæ lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera: si verò alia quæpiam rectilinea, quæ ipsis æqualia quadrata describunt.

Communes Notiones quatuor.

1. QVælibet magnitudo multiplicata poteſt omnem propoſitam magnitudinem eiuſdem generis ſuperare.

2. Quæcumque magnitudo metitur aliquam, metitur quoque eam quam illa ipſa metitur.

3. Quæcumque magnitudo metitur totam, & ablatam: etiam reliquam metietur.

4. Quæcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoque eam, quæ ex ipſis componitur.

Propoſitiones 117.

I. DVabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur maius, quam dimidium: & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus auferatur maius quam dimidium, & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſitâ minor erit.

II. Si duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis detracta ſemper minore de maiore, reliqua minimè præcedentem metiatur: magnitudines incommenſurabiles erunt. *Vide duo Scholia.*

III. Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire. *Vide Coroll. & Schol.*

IV. Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram inuenire. *Vide Coroll. & duo Scholia.*

✠ V. Commenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem habent, quam numerus ad numerum. *Vide Scholium.*

✠ VI. Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles magnitudines erunt. *Vide Coroll. & Scholium.*

✠ VII. Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

✠ VIII. Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles erunt.

✠ IX Quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiũt quadrata inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter ſe proportionem habentia,

quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia: quadrata verò, quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum nemerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia. *Vide Corollarium, & Scholium.*

✠ 10. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis, & tertia commensurabilis erit: & si prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit. *Vide tria Lemmata.*

11. Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.

✠ 12. Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt. *Vide Scholium.*

✠ 13. Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis: magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

✠ 14. Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit. *Vide Lemma.*

✠ 15. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: prima verò tanto plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: & tertia tanto plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima tanto plus possit, quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: & tertia, quàm quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

✠ 16. Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit: quod si tota magnitudo vni ipsarum sit commensurabilis, & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.

✠ 17. Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit: quod si tota magnitudo vni ipsarum sit incommensurabilis, & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. *Vide tria Lemmata.*

✠ 18. Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tanto plus poterit quàm minor, quantum

quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

✠ 19. Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens & figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat: maior tanto plus poterit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens quadrata figura: in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet. *Vide Schol. & tria Lemmata.*

✠ 20. Quod rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundùm aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum rationale est. *Videantur quatuor theoremata.*

✠ 21. Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem. *Vide duo Lemmata.*

✠ 22. Quod rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est: & recta linea ipsum potens est irrationalis. Vocetur autem media. *Vide duo Scho. & Lemma.*

23. Quod fit à media ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

24. Mediæ commensurabilis, media est. *Vide Coroll. & Schol.*

25. Quod mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum medium est. *Vide quatuor theoremata.*

26. Quod sub mediis potentiâ solùm commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium. *Vide Scholium.*

27. Medium non superat medium rationali.

28. Medias inuenire potentiâ solùm commensurabiles, quæ rationale contineant.

29. Medias inuenire potentiâ solùm commensurabiles, quæ medium contineant. *Vide duo Lemmata, & Coroll.*

30. Inuenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. *Vide Schol.*

31. Inuenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. *Vide Lemma.*

32. Inuenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, quæ rationale contineant, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. *Vide Lemma.*

33. Inuenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, quæ medium contineant, ita vt maior plus possit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis. *Vide tria Lemmata.*

34. Inuenire duas rectas lineas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: rectangulum verò, quod ipsis continetur, medium. *Vide Schol. & quinque theoremata.*

35. Inuenire duas rectas lineas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò quod ipsis continetur rationale.

36. Inuenire duas rectas lineas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, incommensurabiléque composito ex ipsarum quadratis.

✠ 37. Si duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. *Vide Scholium.*

✠ 38. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. Vocetur autem ex binis mediis prima.

✠ 39. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, quæ medium contineant, tota irrationalis erit. Vocetur autem ex binis mediis secunda. *Vide Scholium.*

40. Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium, tota recta linea irrationalis erit. Vocetur autem maior. *Vide Scholium.*

41. Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsaaum quadratis medium, quod autem ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit. Vocetur autem rationale, ac medium potens. *Vide Scholium.*

42. Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod ipsis continetur medium, incommensurabiléque composito ex quadratis ipsarum, tota recta linea irrationalis erit. Vocetur autem bina media potens. *Vide Scholia duo, & Lemma.*

43. Quæ ex binis nominibus ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

44. Quæ ex binis mediis prima ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

45. Quæ ex binis mediis secunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

46. Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

47. Rationale, ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

48. Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Definitiones secundæ sex.

1. Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2. Si verò minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus si maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, si quidem maius nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5. Si verò minus dicatur quinta.

6. Quod si neutrum, dicatur sexta. *Vide Scholium.*

Propositiones.

49. 50. 51. 52. 53. & 54. Inuenire ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam. *Vide Lemma.*

55. Si spatium contineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

56. Si spatium contineatur rationali, & ex binis nominibus secunda, recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur.

57. Si spatium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

58. Si spatium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea spatium potens irrationalis est, quæ vocatur maior.

59. Si spatium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ spatium potest recta linea irrationalis est, vocaturque rationale, & medium potens.

60. Si spatium contineatur rationali, & ex binis nominibus sexta, quæ spatium potest recta linea irrationalis est: vocaturque bina media potens. *Vide Lemma.*

61. Quadratum eius, quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

62. Quadratum eius, quæ est ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

63. Quadratum eius, quæ est ex binis mediis secunda, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

64. Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

65. Quadratum eius, quæ rationale, ac medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

66. Quadratum eius, quæ bina media potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

67. Ei, quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

68. Ei, quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem.

69. Maiori commensurabilis, & ipsa maior est.

70. Rationale, ac medium potenti commensurabilis, & ipsa rationale, ac medium potens est.

71. Bina media potenti commensurabilis, & ipsa bina media potens est.

72. Si rationale, & medium componantur, quatuor irrationales sunt, vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis mediis prima, vel maior, vel rationale ac medium potens.

73. Si duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ irrationales fiunt, vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens. *Vide Scholium.*

74. Si à rationali rationalis auferatur potentia solùm commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est. Vocetur autem apotome.

75. Si à media auferatur potentia solùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota rationale contineat: reliqua irrationalis est. Vocetur autem mediæ apotome prima.

76. Si à media media auferatur, potentia solùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat: & reliqua irrationalis est. Vocetur autem mediæ apotome secunda.

77. Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium: reliqua irrationalis est. Vocetur autem minor.

78. Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur rationale: reliqua irrationalis est: vocetúrque cum rationali medium totum efficiens.

79. Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti: & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur medium, incommensurabiléque composito ex quadratis ipsarum: reliqua irrationalis est. Vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

80. Apotomæ vna tantùm congruit recta linea potentia solùm commensurabilis existens toti.

81. Mediæ apotomæ primæ vna tantùm congruit recta linea media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

82. Mediæ apotomæ secundæ vna tantùm congruit recta linea

tertiam, quartam, quintam, & sextam apotomem.

XCII. Si spatium contineatur rationali, & apotoma prima, recta linea spatium potens apotome est.

XCIII. Si spatium contineatur rationali, & apotoma secunda, recta linea spatium potens mediæ est apotome prima.

XCIV. Si spatium contineatur rationali, & apotome tertia, recta linea spatium potens mediæ est apotome secunda.

XCV. Si spatium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea spatium potens minor est.

XCVI. Si spatium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spatium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.

XCVII. Si spatium contineatur rationali, & apotoma sexta, recta linea spatium potens est, quæ cum medio medium totum efficit.

XCVIII. Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

XCIX. Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

C. Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

CI. Quadratum minoris ad rationalem applicatum latudinem facit apotomen quartam.

CII. Quadratum eius, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

CIII. Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

CIV. Recta linea apotomæ longitudine commensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine eadem.

CV. Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis, & ipsa mediæ apotomæ est, atque ordine eadem.

CVI. Recta linea minori commensurabilis, & ipsa minor est.

CVII. Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

CVIII. Recta linea commensurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipsa cum medio totum efficiens est.

CIX. Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

CX. Rationali de medio detracto aliæ duæ irrationales fiunt, vel

mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

111. Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotomæ secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

112. Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus. *Recta vero lineæ quæ sequuntur apotomen, & eam quæ ex binis nominibus sunt numero tredecim, videlicet* 1. media. 2. quæ ex binis nominibus. 3. quæ ex binis mediis prima. 4. quæ ex binis mediis secunda. 5. maior. 6. rationale ac medium potens. 7. bina media potens. 8. apotome. 9. mediæ apotomæ prima. 10. mediæ apotomæ secunda. 11. minor. 12. cum rationali medium totum efficiens. 13. cum medio medium totum efficiens.

113. Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc apotome, quæ fit, eumdem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

114. Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione, & adhuc quæ ex binis nominibus fit, eumdem habet ordinem, quæ ipsa apotome.

115. Si spatium continetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sint nominibus apotomæ, & in eadem proportione: recta linea spatium potens est rationalis. *Vide Coroll. & monitum Candallæ.*

116. A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui intercedentium est eadem.

✠ 117. Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

LIBER

LIBER VNDECIMVS
ELEMENTORVM,
Solidorum verò primus.

DEFINITIONES 19.

SOlidum eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.

1. Solidi terminus eſt ſuperficies.

2. Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in ſubiecto ſunt plano, rectos angulos facit. *Vide Scholium.*

4. Planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in vno plano, alteri plano ad rectos angulos fuerint.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, quando à ſublimi termino lineæ ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui eſt in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui à ducta linea & ſtante continetur.

6. Plani ad planum inclinatio eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ ad rectos angulos communi planorum ſectioni ad vnum eius punctum in vtroque planorum ducuntur.

7. Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

8. Plana parallela ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

9. & 10. Similes *& æquales* ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine *& magnitudine* æqualibus continentur.

11. Solidus angulus eſt plurium, quàm duarum linearum, quæ ſe contingant, & non in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio; *vel*, Solidus angulus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis comprehenditur, non exiſtentibus in eodem plano, & ad vnum punctum conſtitutis. *Vide Scholium.*

12. Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab vno plano ad vnum punctum conſtituitur.

13. Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo, quæ opponuntur æqualia, & similia & parallela sunt: reliqua verò parallelogramma.

14. Sphæra est figura comprehensa, quando circa manentem diametrum semicirculus conuersus restituitur rursus in eumdem locum, à quo moueri cœpit.

15. Axis sphæræ est recta linea manens, circa quam semicirculus conuertitur.

16. Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi centrum.

17. Diameter sphæræ est recta linea quædam per centrum ducta, & ex vtraque parte à superficie sphæræ terminata.

18. Conus est comprehensa figura, quando orthogonij trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum conuertitur, quoad rursus in eumdem restituatur locum, à quo moueri cœpit. Et si quidem manens recta linæa æqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, conus orthogonius erit: si verò minor, amblygonius: & si maior, oxygonius.

19. Axis coni est recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

20. Basis verò, circulus à conuersa recta linea descriptus. *Vide Scholium, & alias definitiones conorum in Apollonio, & Seremo nostro.*

21. Cylindrus est comprehensa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum conuertitur, quousque rursus restituatur in eumdemque locum, à quo moueri cœpit.

22. Axis cylindri est manens recta linea, circa quam parallegrammum conuertitur.

23. Bases autem, circuli, qui à duobus è regione lateribus conuersi describuntur. *Vide Serenum.*

24. Similes coni, & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri eamdem inter se proportionem habent.

25. Cubus est figura solida, sex æqualibus quadratis contenta.

26. Tetraëdrum est figura solida quatuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

27. Octaëdrum est figura solida octo triangulis æqualibus, & æquilateris comprehensa.

28. Dodecaëdrum est figura solida, quæ duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis continetur.

29. Icosaëdrum est figura solida, quæ viginti triangulis æqualibus, & æquilateris comprehenditur.

His autem tres sequentes definitiones Candalla subiungit.

30. Solidum parallelepipedum est figura solida sub quadrangulis planis, quorum quæ ex opposito sunt parallela comprehensa.

31. Figura solida in figura solida inscribi dicitur, quando inscriptæ figuræ anguli simul angulos, aut simul superficies, vel simul latera circumscriptæ tangunt.

32. Figura solida figuræ solidæ circumscribi dicitur, quando circumscriptæ figuræ anguli simul, latera simul, aut superficies simul angulos inscriptæ tangunt. *Vide monitum Candallæ.*

Propositiones quadraginta.

1. Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi. *Vide Scholium.*

✠ 2. Si duæ rectæ lineæ se inuicem secent, in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit. *Vide Scholium.*

✠ 3. Si duo plana se inuicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

✠ 4. Si recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

✠ 5. Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectę lineæ in vno plano erunt.

✠ 6. Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt.

✠ 7. Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autē in vtraque ipsarum quælibet puncta: quæ dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano in quo & parallelæ.

✠ 8. Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos: & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

✠ 9. Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem, in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

✠ 10. Si duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano: æquales angulos continebunt. *Vide Scholium.*

11. A dato puncto sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12. Dato plano à puncto, quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

13. Dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

14. Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. *Vide Scholium.*

15. Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano: & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

16. Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

✠ 17. Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

18. Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

19. Si duo plana se inuicem secantia plano alicui sunt ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

✠ 20. Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocumque sumpti.

✠ 21. Omnis solidus angulus minoribus quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

22. Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest, vt ex iis quæ rectas æquales coniungunt triangulum constituatur.

23. Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, solidum angulum constituere. Oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores. *Vide Lemmata, & tres propositiones Scholij.*

✠ 24. Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana & æqualia & parallelogramma erunt. *Vide quatuor Corol. Candallæ.*

✠ 25. Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum.

26. Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem angulum solidum constituere.

27. A data recta linea dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

✠ 28. Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales op-

positorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

✠ 29. & 30. Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, siue eorum stantes sint in eisdem rectis lineis *siue non* inter se sunt æqualia.

✠ 31. Solida parallepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. *Vide Coroll. Candallæ.*

✠ 32. Solida parallelepipeda, quæ eamdem habent altitudinem, inter se sunt vt bases.

✠ 33. Similia solida parallelepipeda inter se sunt in tripla proportione homologorum laterum, *Vide Coroll. Command. & Candal.*

✠ 34. Æqualium solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondetur; & quorum solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia. *Vide Coroll.*

✠ 35. Si sint duo anguli plani æquales, & in verticibus ipsorũ sublimes rectæ lineæ constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri: in sublimibus autem sumantur quæuis puncta, atque ab ipsis ad plana inquibus sunt anguli primi perpendiculares ducantur: & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt. *Vide Coroll. Command. & Candal.*

✠ 36. Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod à tribus fit, æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

✠ 37. Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelpipeda similia & similiter descripta proportionalia sint: & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

✠ 38. Si planum ad planum rectum sit, & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in vno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum sectionem cadet.

✠ 39. Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones verò plana ducantur, communis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter sese bifariam secabunt. *Vide Coroll. Cand.*

✠ 40. Si sint duo prismata æquealta, quorum vnum quidem basim habeat parallelogrammum; alterum verò triangulum, & parallelogrammũ duplum sit trianguli: ea inter se æqualia erunt. *Vide Cor. Cand.*

LIBER DVODECIMVS.

ET SOLIDORVM SECVNDVS.

PROPOSITIONES.

✠ I. SIMILIA polygona, quæ in circulis deſcribuntur: inter ſe ſunt vt diametrorum quadrata.

2. Circuli inter ſe ſunt vt diametrorum quadrata. *Vide Lemma & Scholium Comm. & duo coroll. Candal.*

3. Omnis pyramis triangularem habens baſim diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, quæ triangulares baſes habentſimiléſque toti: & duo priſmata æqualia, quæ quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt maiora.

✠ 4. Si ſint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habeant, diuidatur autem vtraque ipſarum, & in duas pyramides æquales inter ſe, ſiméſque toti, & in duo priſmata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atque hoc ſemper fiat: erit vt vnius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita & in vna pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramide, altitudine æqualia *Vide Lemma.*

✠ 6. & 7. Pyramides quæ in eadem altitudine, & triangulares, *vel multiangulas* baſes habent, inter ſe ſunt vt baſes.

✠ 7. Omne priſma triangularem habent baſim diuiditur in tres pyramides ęquales inter ſe, quę triangulares baſes habent. *Vide 5. coro. l. Candal.*

✠ 8. Similes pyramides, quę triangulares, *vel multiangulas* baſes habent, in tripla ſunt proportione homologorum laterum. *Vide duo coroll. & Theoremata.*

✠ 9. Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondeat, illę ſunt ęquales. *Vide Coroll. Cand.*

✠ 10. Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eamdem baſim habet & altitudinem ęqualem. *Vide Corollarium.*

✠ 11. Coni & cylindri, qui eamdem habent altitudinem, inter ſe ſunt vt baſes.

✠ 12. Similes coni & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.

✠ 13. Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

✠ 14. In æqualibus basibus existentes coni, & cylindri inter se sunt vt altitudines.

✠ 15. Æqualium conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quorum conorum & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt æquales. *Vide Coroll. Candal.*

✠ 16. Duobus circulis circa idem centrum existentibus in maiori polygonum æqualium, & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat. *Vide Lemma, & quatuor Corol. Candal.*

17. Duabus sphæris circa idem centrum existentibus in maiori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat. *Vide Coroll.*

✠ 18. Sphæræ sunt inter se in tripla proportione suarum diametrorum. *Vide Coroll. Candalla qui sequentem 19. propositionem addit. Si sphæra planum tangat, à centro in contactum demissa, peprendicularis erit plano.*



LIBER DECIMVS-TERTIVS

SOLIDORVM TERTIVS, & corporum regularium primus.

Propositiones octodecim.

1. SI recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia fit, quadrati. *Vide Shcelium vtilissimũ, & duas propositiones, & Corol. Candal. quo ait maius segmentum cum dimidia poss. sesquiquartum totius.*

2. Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ. *Vide Scholium.*

3. Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, portio mi-

nor assumens dimidiam maioris portionis, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris portionis fit, quadrati. *Vide Scholium.*

4. Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, totius & minoris portionis vtraque quadrata tripla sunt quadrati eius, quod à maiori fit portione. *Vide Scholium.*

5. Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adiiciaturque ipsi æqualis maiori portioni: erit tota linea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea. *Vide Scholium & theorema; huic duas sequentes Maurolycus subiunxit.*

Si recta linea extrema, & media ratione secetur, apponaturque ei æqualis minori segmento: tota quintuplum poterit eius, quod à maiori segmento, quadrati. *Deinde.* Si duæ rectæ lineæ extremâ, singulæ & media ratione secentur, totæ ad maiora segmenta eandem habebunt rationem: item totæ ad minora eandem. Item segmenta segmentis proportionalia erunt.

6. Si recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. *Vide duas propositiones Command. & duo coroll. Candal.*

✠ 7. Si pentagoni æquilateri tres anguli siue continuati, siue non continuati fuerint æquales, æquiangulum erit pentagonum.

✠ 8. Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos subtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione se mutuò secant, & maiores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.

✠ 9. Si hexagoni, & decagoni latera in circulo descripta componantur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus. *Vide tres propositiones.*

✠ 10. Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni potest, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum. *Vide Coroll. Candal.*

✠ 11. Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus est linea irrationalis, quæ minor appellatur.

12. Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentia triplum est eius, quæ ex circuli centro. *Vide quatuor vtilia corollaria Candallæ.*

13. Pyramidem constituere, & sphæra data comprehendere, ac demonstrare sphęrę diametrum potentia sesquialteram esse lateris ipsius pyramidis. *Vide tria corol. Candellæ.*

14. Octaëdrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & pyramidem, demonstratéque sphęrę diametrum potentia duplam esse lateris

teris octaëdri. *Vide tria coroll. Candallæ.*

15. Cubum constituere, & sphæra comprehendere, qua & priores: demonstraréque sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse. *Vide duo coroll. Candallæ.*

16. Icosaëdrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & prædictas figuras: demonstraréque icosaëdri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur. *Vide Coroll.*

17. Dodecaëdrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & prædictas figuras: demonstrareque dodecaëdri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur. *Vide corollar. Command. & quatuor Coroll. Cand.*

18. Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare. *Videatur Maurolycus, qui tabulis quibusdam explicat quot partium sint latera figurarum æquilaterarum circulo inscriptarum, cuius diameter sit.* 12. *partium.* Vide duo *Coroll. Candal. & monitum.*



LIBER DECIMVS-QVARTVS,

ET SOLIDORVM QVARTVS, & corporum regularium secundus.

LIBER hic primus de quinque corporibus regularibus Hypsicli Alexandrino tribuitur, qui eum Protarcho familiari suo dedicat. Meminit etiam Apollonij, à quo librum de Dodecaëdri, & isocaëdri in eadem sphæra descriptorum comparatione scriptum esse docet, quo tamen caremus, quamuis tunc in omnium manibus versaretur.

Propositiones septem.

I. QVæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni, quæ in eodem circulo descri-

buntur. *Vide Coroll. Candal.*

2. Idem circulus comprehendit dodecaëdri pentagonum, & icosaëdri triangulum in eadem sphæra descriptorum. *Videantur Coroll.*

3. Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa ipsum circulus: à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur, superficiei dodecaëdri est æquale. *Vide Coroll.*

4. Hoc probato demonstrandum erit, vt dodecaëdri superficies ad superficiem icosaëdri, ita esse latus cubi ad icosaëdri latus.

5. Ostendendum est, & qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius & quadratum maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis, eamdem habere cubi latus ad latus icosaëdri.

6. Ostendendum nunc est vt latus cubi icosaëdri latus, ita esse dodecaëdri solidum ad solidum icosaëdri.

7. At verò duas rectas lineas, si extrema, ac media ratione sectæ fuerint, in subiecta esse analogia demonstratur. *Vide Corol. Quibus nouas Maurolyci propositiones subiungo.*

8. Trianguli æquilateri latus ad perpendicularem, quæ ab angulo ad basim, potentia sesquitertium est.

9. Si trianguli æquilateri latus fuerit rationale, superficies eius est medialis.

10. Tota superficies pyramidis, vel octaëdri intra sphæram, cuius diameter rationalis est, descripti medialis est.

11. Pyramidis latus ad perpendicularem, quæ à vertice ad basim delabitur, potentia sesquialterum est. *Eadem est cum 13. prop. l. 13.*

12. A sphæræ centro ad basim circumscriptæ pyramidis recta perpendicularis est sexta pars spæricæ diametri.

13. Sphęræ semidiameter ad perpendicularem à centro ad basim octaëdri circumscripti, potentia triplum est. Vnde latus ipsius solidi ad eandem perpendicularem potentia sextuplum erit.

14. Semidiameter sphęrę ad latus octaëdri potentia est vt 3. ad 6: latus autem octaëdri ad semediametrum circuli qui basim octaëdri circumscribet, vt 6. ad 2. in potentia, igitur, per ęquam proportionem, semidiameter sphæræ ad semidiametrum dicti circuli est vt 3. ad 2: sed quadratum semidiametri dicti circuli cum quadrato perpendicularis ęquum est quadrato semidiametri sphæræ, igitur quadratum semidiametri sphæræ ad quadratum perpendicularis triplum: quare latus octaëdri sexcuplum potentialiter ad eamdem. *Eadem est cum 14.*

ropositione lib. 13.

15. Perpendicularis à centro sphæræ ad basim octaëdri potentialiter tripla est ad perpendicularem ab eodem centro ad basim pyramidis in adem sphæra locatæ.

16. Perpendicularis à centro spęræ ad basim cubi ab ipsa sphęra comrehensi est dimidium lateris cubi.

17. Duę perpendiculares, vna à centro sphæræ ad basim octaëdri, ltera ab eodem centro ab basim cubi in eadem sphæra compreensorum sunt æquales.

18. Basis pyramidis ad basim octaëdri in eadem sphæra comprehen- i est sesquitertia.

19. Tota pyramidis superficies ad totam octaëdri superficiem est subesquialtera.

20. Ratio sexcupla superpartiens tres quartas dupla est ad rationem, uam habet octaëdri solidum ad pyramidis solidum in eadem sphęra xistentium.

21. Cubi quadratum & octaëdri triangulum ab vna sphæra comrehensorum, ab eodem circulo circumscribuntur.

22. Quod sub perpendiculari à centro basis cubi ad latus, & sub ipo latere comprehenditur, rectangulum est totius cubicæ superficiei ars duodecima.

23. Quod sub perpendiculari à centro basis octaëdri ad latus, & sub pso latere comprehenditur, rectangulum est totius solidi areæ pars luodecima.

24. A centro circuli ad latus trianguli æquilateri in circulo descripti erpendicularis dimidium est semidiametri eiusdem circuli.

25. Sesquitertia ratio dupla est eius, quam habet tota cubi superficies d totam octaëdri superficiem.

26. Cubica superficies ad octaëdri superficiem est sicut pyramidis atus ad octaëdri latus in eadem sphæra.

27. Sicut est cubi superficies ad octaëdri superficiem, sic cubi solilum ad octaëdri solidum in eadem sphęra.

28. Dupla decemque vicesimas septimas superpartiens ratio est sicut atio cubicę basis ad octaëdricam basim duplicata, solidorum in adem sphæra locatorum.

29. Sesquitertia ratio dupla est eius, quam habet cubica basis ad pyamidis basim in eadem sphęra.

30. Tripla ratio dupla est eius, quam habet cubica superficies ad pyamidis superficiem in eadem sphæra.

21. Cubus triplus est ad pyramidem in eadem sphæra descri-

ptam. *Vide calculum istarum figurarum apud Maurolycum.*

32. A centro sphęrę ad basim icosaedri recta perpendicularis maior est quàm perpendicularis ab eodem centro ad basim cubi in eadem sphæra constituti.

33. Maius est icosaedri latus sphæræ, intra quam describitur, semidiametro.

24. Duo quadrata, quæ ex sphæræ diametro, simul sumpta æqualia sunt superficiei cubi in sphæra constructi.

35. Viginti triangula æquilatera maius sunt, quàm octo quadrata super eisdem descripta lateribus.

36. Icosaedri superficies maior est, quàm cubi in eadem sphæra positi superficies.

36. Icosaedrum maius est cubo secum in vna sphæra descripto.

37. Quæ à circuli centro in pentagoni latus in ipso circulo descripti perpendicularis ducitur, dimidia est simul vtriusque & eius, quæ ex centro & lateris decagoni in eodem circulo descripti.

39. Quadrata, quod à latere pentagoni, quodque ex eius angulum subtendente, simul sumpta, quincuplum sunt quadrati, quod ex circuli pentagonum circumscribentis semidiametro.

40. Idem circulus comprehendit dodecaedri quinquangulum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

41 Perpendiculares à centro sphæræ ad bases dodecaedri & icosaedri ab ipsa sphæra circumscriptorum sunt æquales.

42. Quod sub perpendiculari à centro basis dodecaedri ad latus, & sub ipso latere comprehenditur, rectangulum est totius superficiei dodecaedricæ pars tricesima.

43. Quod sub perpendiculari à centro basis icosaedri ad latus, & sub ipso latere continetur rectangulum, est totius icosaedricæ superficiei pars tricesima.

44. Dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem est sicut cubi latus ad icosaedri latus, in solidis scilicet ab eadem sphæra contentis.

45. Ex drodante diametri in dextantem lineæ angulum pentagoni subtendentis fit æquale pentagono, quod à circulo circumscribitur, rectangulum.

46. Rursum ostendere, quòd sicut cubi latus ad icosaedri latus, sic est dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem in eadem sphæra conscriptorum. *Sequens Maurolyci propositio eadem est cum quinta huius.*

47. Dodecaedri solidum ad icosaedri solidum in eadem sphæra est sicut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem. *Hinc constat veritas sexta huius. Deinde prædictorum quinque solidorum in vna sphæra*

constructorum maximum esse dodecaedrum; icosaëdrum autem maius esse cubo, cubum maiorem octaëdro; octaëdrum maius pyramide. Quem etiam ordinem sequuntur illorum superficies, donec ad octaëdri superficiem deueniatur, quæ est sesquialtera superficiei pyramidis. Denique cuius corpus maximum, & superficies maxima, eiusdem latus est minimum; ac proinde cuius soliditas, & superficies minima, eiusdem latus est maximum: nam magnitudinis laterum ordo conuersus est ad ordinem superficierum, & soliditatum. Videantur quædam aliæ propositiones Candallæ.



LIBER DECIMVS-QVINTVS.

SOLIDORVM QVINTVS, ET CORPORVM regularium tertius.

QVINQVE solùm Euclidis propositiones hocce libro legimus; quibus alias Maurolyci, & Flussatis subiungemus, ne quid huic libello desit.

Propositiones viginti duæ.

1. IN dato cubo pyramis ita inscribetur: protrahe sex basium cubi diametros ad quatuor ex cubi angulis concurrentes; tales diametri erunt sex latera inscriptæ pyramidis.

2. In pyramide octaedrum inscribetur, si diuidantur singula pyramidis latera. *Vide coroll. Candal.*

3. In cubo octaedrum includetur, si coniungantur sex basium cubi centra per duodecim rectas. *Vide coroll. Cand.*

4. In octaedro cubus collocabitur, si octo triangulorum centra per duodecim rectas continuentur.

5. In octaedro pyramis inscribetur, si octaedro cubus, & cubo pyramis includatur. *Vide duo coroll. Candal.*

6. In icosaedro dodecaedrum coaptabitur, si coniungas viginti triangulorum cubi centra per triginta lineas; quibus centris singulis anguli singuli dodecaedri incident.

7. In dodecaedro icosaedrum effingetur, si duodecim pentagonorum centra coniungantur productis triginta chordis: sic enim anguli ausi icosaedri tangent centra basium claudentis dodecaedri.

8. In dodecaedro cubus statuetur, si protrahas singulorum penta-

gonorum singulas rectas, quæ pentagoni subtendunt angulos. Sic 12 rectæ conflabunt 6 quadrata cubum inclusum construentia.

9. In dodecaedro octaedrum componetur, si sex dodecaedri latera, quorum bina sunt per diametrum opposita, & æquidistantia per æqualia dimidantur, & puncta diuisionum connectantur per duodecim lineas.

10. In dodecaedro pyramis accommodabitur per inscriptionem cubi in dodecaedro, & pyramidis in cubo.

11. In icosaedro cubus condetur, si icosaedro dodecaedrum, & dodecaedro cubum inscribas.

12. In icosaedro pyramis figurabitur, si icosaedro cubus, cuboque pyramis inscribatur. *Quæ quidem mutuæ regularium corporum inscriptiones possent esse viginti: sed pyramidi solùm conuenit octaëdrum inscribi: cubo pyramidem, & octaëdrum: octaëdro pyramidem & cubum: icosaedro pyramidem, cubum, & dodecaedrum: denique singula dodecaëdro.*

13. In quolibet dictorum solidorum sphæra inscribi potest; si à centro sphæræ solidum circumscribentis ducatur ad vnam basium solidi linea perpendicularis per 11. 11. ad cuius spatium super centro semicirculus, & semicirculo circumducto super diametrum sphæra describetur, quæ ob æqualitatem perpendicularium tanget singulas solidi bases, cui inscribitur, in illis punctis quæ perpendicularium casus suscipiunt. *Videatur calculus laterum, & perpendicularium figurarum planarum, & solidarum apud Maurolycum. Videantur duo corol. Candallæ ad hanc prop. quæ est apud eum 21. Sequuntur aliæ propositiones Candallæ, quibus iungentur corollaria.*

14. Proposito cubo dodecaedrum inscribere. Dimetiens autem sphæræ dodecaedrum ambientis bina potest latera, scilicet dodecaedri, & dodecaedrum ambientis cubi. Cubi verò latus extrema, & media ratione sectum efficit minus segmentum latus dodecaedri sibi inscripti. Maius verò segmentum latus cubi eidem dodecaedro inscripti. Denique cubi latus, dodecaedri inscripti, & circumscripti lateribus est æquale.

15. In dato cubo icosaedrum describere. Dimetiens verò sphæræ icosaedrum ambientis bina potest & icosaedri & ipsum continentis cubi latera. *Videantur tria alia corollaria.*

16. & 17. In dato icosaedro octaedrum collocare, & in octaedro icosaedrum. *Videantur duo corol.*

18. & 19. In dato octaedro dodecaedrum; & in data trilatera, & æquilatera pyramide cubum collocare. Quæ verò bifariam secat opposita pyramidis latera, tripla est lateris inscripti cubi: & per cen-

trum transit. Insuper pyramidis latus triplum est ac parallelum dimetientis cubi basis: & duplum potest eius, quæ coniungit opposita eiusdem latera.

20. & 21. In prædicta pyramide icosaedrum & dodecaedrum componere. Dodecaedri autem & cubi in sphæra descriptorum dimetientes dimidiæ sunt eius, quæ à pyramidis angulo in basim demissa fuit. *Sequitur liber 16. quem Candalla quindecim libris elementorum Euclidis subiunxit.*



LIBER DECIMVS-SEXTVS ELEMENTORVM Geometricorum.

PROPOSITIONES.

1. Dodecaedrum, sibique insciptus cubus, ac eidem cubo inscripta pyramis, eadem capiuntur sphærâ. Quæ tria solida similiter eidem insident icosaedro, octaedro, & pyramidi.

2. Dodecaedri circumscripti ad dodecaedrum cubo inscriptum ratio tripla est extremæ, & mediæ rationis.

3. Omnis quinquanguli æquilateri, & æquianguli, quæ ab vno angulorum in basim perpendicularis extrema & media ratione secatur, per rectam angulum eumdem subtendentem. *Vide coroll.*

4. Quæ ab angulis basis pyramidis latera opposita secant extrema & media ratione rectæ, ipsæ comprehendunt basim icosaedri pyramidi inscripti, triangulo æquilatero inscriptam, cuius anguli latera basis pyramidis extrema & media ratione secant. *Vide duo coroll.*

5. Latus pyramidis extrema & media ratione sectum, efficit minus segmentum potentia duplum lateris icosaedri. *Vide Coroll.*

6. Latus cubi dimidium potest lateris sibi inscriptæ pyramidis triangularis æquilateræ.

7. Latus pyramidis duplum est lateris sibi inscripti octaedri.

8. Cubi latus duplum potest lateris sibi inscripti octaedri.

9. Dodecaedri latus, maius segmentum est, eius quæ dimidium potest lateris sibi inscriptæ pyramidis.

10. Latus icosaedri media est proportionalis inter latus cubi icosaedro circumscripti, & dodecaedri eidem cubo inscripti.

11. Latus pyramidis octodecuplum poteſt lateris ſibi inſcripti cubi.

12. Latus pyramidis octodecuplum poteſt eius rectæ, cuius dodecaedri latus pyramidi inſcripti, ſit maius ſegmentum.

13. Minoris ſegmenti lateris octaedri duplum poteſt latus ſibi inſcripti icoſaedri.

14. Octaedri & ſibi inſcripti cubi latera quadruplam ſeſquialteram rationem potentia habent.

15. Octaedri latus quadruplum ſeſquialterum poteſt rectæ, cuius dodecaedri ipſi octaedro inſcripti latus erit maius ſegmentum.

16. Icoſaedri latus eſt maius ſegmentum, eius quæ duplum poteſt lateris octaedri ipſi icoſaedro inſcripti.

17. Cubi latus ad ſibi inſcripti dodecaedri latus, rationem habet extremæ & mediæ rationalis duplam.

18. Dodecaedri ad ſibi inſcripti cubi latus, rationem habet mediæ ac extremæ conuerſam.

19. Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ pyramidis.

20. Si ab icoſaedri dimetientis potentia, tripla auferatur lateris ſibi inſcripti cubi potentia, reliqua ſeſquitertia erit potentiæ lateris ipſius icoſaedri. *Vide Coroll.*

21. Dodecaedri latus minus ſegmentum eſt eius quæ duplum poteſt lateris octaedri eidem dodecaedro inſcripti.

22. Dimetiens icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateri icoſaedro inſcriptæ pyramidis ſeſquialterum.

23. Dodecaedri latus ad icoſaedri ſibi inſcripti latus ſe habet vt minus ſegmentum perpendicularis pentagoni ad eam quæ ex centro in latus eiuſdem pentagoni.

24. Si lateris icoſaedri dimidia extrema & media ratione ſecta fuerit, minuſque ſegmentum eius à toto latere tollatur, reliquæ verò tertia pars rurſus auferatur, quæ ſupereſt, æqualis erit lateri dodecaedri ipſi icoſaedro inſcripti.

25. Datum cubum ſibi inſcriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis triplum eſſe demonſtrare.

26. Pyramidem præcedentem ſibi inſcripti octaedri duplam, & octaedrum pyramidis quæ ſuper baſi & vertice continetur, quadruplum eſſe oſtendere.

27. & 28. Cubum ſibi inſcripti octaedri ſextuplum: & octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſſe patefacere. Hæc autem rationem, quam latera potentia, habent.

29. 30. Octaedrum ſibi inſcriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis tre-

edecuplum ſeſquialterum: hanc autem cubi ſibi inſcripti non cuplam ſe demonſtrare.

31. Octaedrum ad ſibi inſcriptum icoſaedrum eam ſeruat, quam nę octaedri baſes ad quinque icoſaedri rationem.

32. Icoſaedri ſolidi ad ſibi inſcriptum dodecaedri ſolidum ra-) conſtat ex ratione lateris icoſaedri ad latus cubi eadem ſphæra mptehenſi, & ratione tripla dimetientis, ad eam quæ coniungit oppoſitarum icoſaedri baſium centra.

33. Dodecaedri ſolidum excedit cubi ſibi inſcripti ſolidum, parallelepipedo ſolido, quod ſuper eiuſdem cubi baſi, vertice verò cu- lateris maiori & dimidio minoris ſegmentis conſtituitur. *Vide Co- 'larium.*

34. Dodecaedri ad ſibi inſcriptum icoſaedri ſolidum ratio conſtat tripla ratione dimetientis ad eam quæ coniungit oppoſitarum do- caedri baſium centra, & ratione lateris cubi ad latus icoſaedri, ei- m ſphæræ inſcriptorum.

35. Dodecaedri ſolidum pyramidis ſibi circumſcriptæ ſolidi bipar- ur nonas, dempto vnius nonæ (extremâ & mediâ ratione ſectæ, di- dio minoris ſegmenti.

36. Octaedrum excedit ſibi inſcriptum icoſaedrum ſolido paralle- ›ipedo quod ſuper potentia lateris icoſaedri, vertice autem ea quæ nidimetientis octaedri eſt maius ſegmentum. *Vide Corol.*

37. Si trianguli certam propoſitam baſim habentis latera baſi po- ıtiâ commenſurabilia fuerint, à vertice autem demiſſa perpendicu- is baſim ſecuerit, ſectiones toti baſi longitudine, perpendicularis :ò potentiâ commenſurabiles erunt. *Vide Coroll. 2.*

38. Si propoſita recta aſſumat maius, & dimidiæ minus ſegmenta, ius autem ſuſcipiatur maius maiori ſegmenti, cubus ad ſibi inſcri- ım dodecaedrum habet rationem quam propoſita ad idem minus ,mentum.

39. Si propoſita recta aſſumat maius, & dimidium minoris ſeg- nta, tota recta ad tertium propoſitæ ſe habet, vt dodecaedri ſolidum ſibi inſcriptæ pyramidis ſolidum.

40. Si dodecaedri dimetiens totam & minus ſegmentum poſſit, ›d ſuper totius dimidia potentia, vertice verò eiuſdem totius ter- comprehenſum ſolidum, ęquale erit octaedro eidem dodecaedro :ripto. *Vide Corol. & lemma.*

1. Si dimetiens icoſaedri totam & maius ſegmentum poſſit, ab autem tota tertium minoris ſegmenti tollatur, quod ex reliquæ diâ & extremâ ratione ſectæ maiori ſegmento ſolidum rectangu-

lum, æquale erit cubo eidem icoſaedro inſcripto.

42. Si dimetiens icoſaedri totam & maius ſegmentum poſſit, quod ſuper totius dimidia potentia, vertice autem eiuſdem tertio comprehenſum ſolidum æquale erit octaedro eidem icoſaedro inſcripto.

43. Si dimetiens icoſaedri totam & maius ſegmentum poſſit, à totius autem maiori ſegmento dimidium ſui minoris tollatur, quod ſuper requilæ quadrato, vertice verò eiuſdem tertio comprehenſum ſolidum æquale erit pyramidi eidem, icoſaedro inſcriptæ.

44. Pyramis ad ſibi inſcriptum dodecaedrum rationem habet quam nouem ad vnam, cum maiori & dimidio minoris eius ſegmentis, magnitudines.

45. Si à lateris cubi potentia tollatur tertium potentiæ ſui maioris ſegmenti, quod ſub vertice quintupartiente ſextas eius quæ reliquum poteſt, & ſuper triangulo quod ex dupla eiuſdem maioris ſegmenti ſolidum æquale erit icoſaedro eidem cubo inſcripto.

46. Octaedri ſolidum ad ſibi inſcripti dodecaedri ſolidum ſe habet, vt quadratum lateris octaedri, ad quod ſub tertio dimetientis, & ea quæ idem tertium excedit ſui ipſius maiori, & dimido minoris ſegmentis comprehenditur rectangulum.



LIBER DECIMVS SEPTIMVS,

SOLIDORVM VERO REGVLARIUM COMPOSITORUM PRIMUS.

DEFINITIONES 2.

1. EXoctaedron eſt figura ſolida æquilatera, & æquiangula, ſex æqualibus quadratis, & octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehenſa.

2. Icoſidodecaedron eſt figura ſolida, æquilatera & æquiangula, duodecim quinquangulis æquilateris, æqualibus, & æquiangulis, & viginti triangulis, æqualibus & æquilateris comprehenſa.

Propositiones viginti-octo.

1. EXoctaedron æquilaterum & æquiangulum construere, & data sphæra comprehendere, & ostendere dimetientem lateris duplam esse. *Videantur quatuor Coroll.*

2. Icosidodecaedron æquilaterum & æquiangulum construere, & datâ sphærâ comprehendere, ostendereque dimetientem extrema & media ratione sectam efficere maius segmentum, duplum lateris icosidodecaedri. *Vide duo Coroll.*

3. Idem describitur icosidodecaedron ablatis icosaedri solidis angulis, quod à dodecaedro persimiles laterum sectiones. *Vide Coroll.*

4. Pyramidi trilateræ & æquilateræ exoctaedron inscribere.

Propositiones à 5. ad 25. In dato octaedro; & cubo exoctaedrum; in icosaedro; & docaedro exoctaedron: In exoctaedro pyramidem trilateram, & æquilateram: octaedron: cubum: & icosaedron. In icosaedro: trilatera, & æquilatera pyramide: octaedro: & cubo, icosidodecaedron. In exoctaedro dodecaedron; in hoc icosidodecaedro dodecaedron cubum: pyramidem trilateram æquilateram, octaedron, icosaedron, & exoctaedron: & in exoctaedro icosidodecaedrum inscribere. *Vide* 15. *Coroll.*

26. Icosidodecaedri & exoctaedri bases, & latera opposita parallela ad inuicem esse demonstrare.

27. Icosidodecaedrum secari bifariam 6. decagonis æquilateris, & æquiangulis vnde duodecim pyramidibus quinquangulis, & 20. pyram. triangulis æquis, & similibus componitur.

28. Exoctaedron quatuor hexagonis æquilateris, & æquiangulis bifariam secatur. *Vide Coroll.*

LIBER DECIMVS-OCTAVVS.

SOLIDORVM VERO REGVlarium compositorum secundus.

PROPOSITIONES 45.

1. Octaedri latus sibi inscripti exoctaedri lateris duplum est.
2. Pyramidis trilateræ, & æquilateræ latus, lateris sibi inscripti exoctaedri quadruplum est.

3. Cubi latus, duplum poteſt lateris ſibi inſcripti exoctaedri.

4. Si icoſaedri maius ſegmentum ſecetur in totam & minus, latus icoſaedri aſſumens idem minus, duplum poteſt lateris ſibi inſcripti exoctaedri.

5. Dodecaedri latus ad exoctaedri ſibi inſcripti latus eſt ſicut maius ſegmentum rectæ extremâ ac mediâ ratione ſectæ, ad eam quæ poteſt dimidium totius.

6. Exoctaedri latus ſibi inſcriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis lateris tripartitur quartas.

7. Latus exoctaedri lateri ſibi inſcripti octaedri eſt æquale.

8. Exoctaedri latus lateris ſibi inſcripti cubi ſeſquioctauum poteſt.

9. Latus exoctaedri ad latus ſibi inſcripti icoſaedri rationem habet quam recta potens dimidium rectæ extremâ, & mediâ ratione ſectæ ad maius ſegmentum totius.

10. Exoctaedri latus ad dodecaedri ſibi inſcripti latus ſe habet vt potens dimidium rectæ extrema, & media ratione ſectæ ad minus eius ſegmentum.

11. Pyramidis lateris extremâ, & mediâ ratione ſecti minus ſegmentum octuplum eſt lateris ſibi inſcripti icoſidodecaedri potentia.

12. Octaedri latus extrema & media ratione ſectum efficit minus ſegmentum, duplum potentia lateris ſibi inſcripti icoſidodecaedri. *Vide Coroll.*

13. Lateris cubi dimidia extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum latus icoſidodecaedri, eidem cubo inſcripti.

14. Icoſaedri latus, lateris ſibi inſcripti icoſidodecaedri duplum eſt.

5. Dodecaedri latus, icosidodecaedri sibi inscripti lateris extrema media ratione secti, maioris segmenti duplum est. *Vide Coroll.*
7. Dodecaedri dimetiens quatuor planis orthogoniãs secatur, ad asque centri partes, extrema & media ratione iungentibus. *de Coroll.* 2.
7. Icosidodecaedri latus ad dodecaedri sibi inscripti latus ratiom habet, quam tota & maius, ad totam, maius & tertiam minoris gmenti, eiusdem totius.
8. Icosidodecaedri latus deficit à latere sibi inscripti icosaedri, didio maioris segmenti lateris icosaedri.
9. Icosidodecaedri latus sectũ in totam & maius deficit à latere sibi eripti cubi, minoris eius segmento, & insuper tertia parte minoris gmenti prædictæ totius.
o. Latus icosidodecaedri assumens maius eius segmentum dimium potest lateris sibi inscripti octaedri.
1. Icosidodecaedri lateris maioris segmento, extrema & media ione secto, tertium minoris eius segmenti, est excessus, quo totum us deficit à maiori segmento eius, quæ dimidium potest lateris icood.. inscriptæ pyramidis.
2. Latus icosidod. dimidium potest lateris sibi inscripti exoctaei. *Vide Coroll.*
3. Latus exoctaedri duplum potest eius, cuius latus sibi inscriicosidodecaedri est maius segmentum.
4. Cubus sibi inscripti exoctaedri sesquiquintum est.
5. Octaedron sibi inscripti exoctaedri supertripartiens quintas .
6. Trilatera æquilatera pyramis sibi inscripti exoctaedri tripla quiquinta est.
7. Dodecaedri solidum excedit exoctaedri sibi inscripti solidum allelepipedo solido, quod super basi cubi dodecaedro inscripti, tice autem maiore segmento, dimidio minoris segmenti, & sextate lateris cubi. *Vide Corollarium.*
8. Icosaedri solidum ad sibi inscripti exoctaedri solidum, rationem habet, quam solidum parallelepipedum, constitutum super eo, od sub trianguli icosaedri latere, & dupla suæ perpendicularis, verè verò superpartiente tertias, eius quæ à centro in basim icosaedri pendicularis continetur, ad solidum parallelepipedum super quato lateris sumentis minus segmentum sui maioris, & in totam, & ius secti, vertice autem quintupartiente sextas totius compreisum. *Vide Coroll.*

29. Exoctaedri solidum ad sibi inscriptæ trilateræ æquil. pyramidis solidum rationem habet octuplam supersceptupartientem decimas sextas.

30. Ex octaedrum ad sibi inscriptum octaedrum, rationem habet quintuplam.

31. Exoctaedri solidum ad sibi inscripti cubi solidum rationem habet duplam supertredecupartientem decimas sextas.

32. Si proposita recta assumat sui maius, & dimidia minus segmenta, totius autem suscipiatur minus maioris segmenti, exoctaedrum ad sibi inscriptum dodecaedrum habebit rationem, quam propositæ quinque sextæ, ad idem minus segmentum.

33. Exoctaedrum ad icosaedrum sibi inscriptum, se habet sicut solidum parallelepipedum super quadrato lateris icosaedri, cum maiori eius segmento, vertice autem quintupartiente sextas totius comprehensum, ad solidum parallelepipedum super eo quod sub icosaedri eodem latere, & tripla sibi potentia, vertice autem quintupartiente sextas iungentis oppositarum eiusdem basium centra.

34. Dodecaedron excedit sibi inscriptum icosidodecaedron, solido prismate, cuius basis est æquilaterum triangulum, super binis eorum lateribus descriptum, vertex autem minoris segmenti dimetientis dodecaedri duo nona. *Vide duo* Coroll.

35. Icosaedri solidum excedit sibi inscripti icosidodecaedri solidum, solido super eiusdem pentagona basi, vertice verò iungentis eiusdem, & oppositæ basis centra, dupla minoris segmenti constituto, *Vide duo* Coroll.

36. Octaedri solidum excedit sibi inscripti icosidodecaedri solidum solidis, quæ super quadrato duplæ lateris icosidodecaedri, vertice verò ea, quæ ex eiusdem centro, & super pentagono sui eiusdem lateris, vertice autem binis minoribus segmentis, iungentis oppositorum pentagonorum centra constituuntur.

37. Si cubi dodecaedro inscripti latus, assumat maius, & dimidiæ minus segmenta: totius autem suscipiatur minus maioris segmentum, cubus dodecaedro circumscriptus excedet sibi inscriptum icosidodecaedrum, solido quod super basi cubi inscripti, vertice verò ea qua latus eiusdem cubi excedit idem minus maioris segmentum, & insuper prismate super triangulo lateris eiusdem cubi, vertice autem quintupartiente decimas octauas maioris segmenti dimetientis dodecaedri, constituto.

38. Pyramis trilatera æquilatera icosidodecaedri sibi inscripti superat duplam, solido parallelepipedo, super quadrato dupli sui lateris,

vertice autem dimetiente comprehenso, & solido super pentagono eiusdem dupli lateris, vertice verò maiori segmento eius, quæ à pentagoni centro, constituto.

39. Si recta iungentis oppositorum icosidodecaedri pentagonorum centra, dupla fuerit, ad aliam autem sit vt dimidia ad maius, & idem aliam, vt dimidia ad maius; maxima autem ad aliam sit tripla in ratione totius ad duo tertia, & maius segmentum: quod sub reliquæ vertice, & pentagona basi solidum, æquale erit dodecaedro, icosidodecaedro inscripto.

40. Si à iungente oppositorum icosidodecaedri triangulorum centra, tollatur sexta pars: à reliqua verò auferatur tripla rationis totius & minoris segmenti ad totam, quod sub reliquæ vertice, & super triangulo, quod ex quadrupla lateris icosidodecaedri, solidum, æquale erit icosaedro eidem icosidodecaedro inscripto.

41. Si iungens oppositorum icosidodecaedri quinquangulorum centra aliquam tertio minoris segmenti superet, eamdem autem excedat alia quarto minoris segmenti, quod sub excedentis vertice, & super pentagono eius, quæ proximorum icosidodecaedri triangulorum centra iungit, solidum, æquale erit cubo eidem icosidodecaedro inscripto.

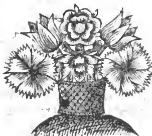
42. Octaedri solidum æquale est solido parallelepipedo, quod sub vertice icosidodecaedri circumscripti dimetiente, & super quadrato eius quę sextum dimetientis potest.

43. Si ab icosidodecaedri dimetiente tertium minoris segmenti tollatur, reliqua verò extremâ & mediâ ratione diuidatur, erit, quod super maioris segmenti quadrato, vertice verò eiusdem tertia parte solidum, æquale pyramidi eidem icosidodecaedro inscriptæ.

44. Si icosidodecaedri dimetiens extremâ & mediâ ratione diuidatur, quod super maioris segmenti quadrato, & vertice quintupartiente sextas eiusdem comprehensum solidum, æquale erit exoctaedro eidem icosidodecaedro inscripto.

45. Si super quadrato maioris segmenti dimetientis basis exoctaedri, vertice autem quadrati latere, maiori & dimidio minoris segmentis eiusdem, comprehendatur solidum, ab hoc detractum quod super æquilatero triangulo eiusdem lateris, vertice verò quinupartiente decimas octauas minoris segmenti eius quæ triplum potest eiusdem lateris solidum relinquit, æquale icosidodecaedro idem exoctaedro inscripto solidum. *Qui verò naturam pyramidis trilateræ, æquilateræ, octaedri, cubi, icosaedri, & dodecaedri accuratiùs co-*

gnoscere voluerit, legat Candallam in fine libri decimisexti qui naturam exoctaedri, & icosidodecaedri ad calcem huiusce libri decimi octaui explicat.



PETRI

PETRI RAMI

GEOMETRIÆ

LIBER PRIMVS.

DE MAGNITVDINE.

1. GEOMETRIA est ars bene metiendi.
2. Res ad bene metiendum proposita est Magnitudo.
3. Magnitudo est quantitas continua.
4. Continuum est, cujus partes communi termino continentur.
5. Terminus est magnitudinis extremum. *e. 3. d.* 1. *Itaque Magnitudo infinitè & creatur, & continetur, & secatur iisdem quibus terminatur.*
6. Punctum est signum in magnitudine individuum.
7. Magnitudines symmetræ sunt, quas eadem mensura exactè metitur asymmetræ contra. 1. 2. *d.* 10.
8. Rationales sunt, quarum ratio est explicabilis numero datę mensuræ, irrationales contra. *e.* 5. *d.* 10.
9. Magnitudines congruæ sunt, quarum partes applicatæ partibus æqualem locum occupant. *Itaque Magnitudines congruæ sunt æquales*, 8. *ax.*
10. Magnitudines adscriptæ sunt inter se, quando vnius termini alterius terminis terminantur: quæ intra est, dicitur inscripta: circumscripta, quæ extra.

LIBER SECVNDVS.

De Linea.

1. MAgnitudo est linea aut linearum.
2. Linea est magnitudo tantum longa.
3. Lineæ terminus est punctum.
4. Linea est recta vel curua.
5. Linea recta est linea, quæ intra suos terminos æqualiter inter-

jacet, curua contra. 4. *d.* 1. *Itaque*

Recta est, breuissima intra eosdem terminos.

6. Linea obliqua tangitur à recta vel curua, quando ambæ ita concurrunt, vt continuatæ non intersecentur. *Itaque*

Tactus fit vnico puncto. e. 13. *p.* 3.

7. Linea curua est peripheria, aut helix.

8. Peripheria, quæ distat æqualiter à medio comprehensi spatij. *Itaque*

Peripheria fit conuersione lineæ altero termino quiescente, altero lineante.

9. Helix est, quæ distat inæqualiter à medio vtcunque comprehensi spatij.

10. Lineæ inter se rectæ sunt, quarum altera in alteram incidens æqualiter interjacet: obliquæ contra. *e.* 19. *d.* 1. *Itaque*

Si recta est perpendicularis rectæ, est ab eodem termino & eadem parte singulari. e. 5. 13. *p.* 11.

11. Lineæ parallelæ sunt, quæ vbique æqualiter distant. *e.* 35. *d.* 1. *Itaque*

1. *Parallela est ab eodem puncto ad eandem rectam singularis.* *Et*

2. *Lineæ eidem parallelæ sunt inter se parallelæ.* 30. p. 1.

LIBER TERTIVS.

De Angulo.

1. Lineatum est magnitudo plusquam longa.
2. Lineatum est angulus & figura.
3. Angulus est, lineatum in communi concursu terminorum.
4. Crura anguli sunt termini comprehendentes angulum.
5. Anguli homogenei sunt anguli cruribus & crurum concursu genere ijdem.
6. Anguli cruribus congrui sunt æquales. *Itaque*

1. *Si angulus angulo homogeneus & æquicrurus æquatur basi, est æqualis: & si est æqualis, æquatur basi. ex* 8. *&* 4. *p.* 1. *Et*

2. *Si æqualis basi est æquicrurus, æquatur.* *Et*

3. *Si angulus angulo æquicrurus est, major basi, est major: & si major, est major basi. e.*25. *&* 24. p. 1. *Et*

4. *Si æqualis basi est minor interioribus cruribus, est major.* *Itaque*

5. *Si dati anguli cruribus ad datum punctum crura homogenea æquentur æquâ basi, æquabunt angulum dato. e.*23. *p.* 1. *&* 26. *p.* 11.

7. Angulus est rectus vel obliquus.

8. Rectus, cuius crura sunt inter se recta, obliquus contra. *Itaque Anguli recti crurirecti sunt æquales. e.p.1.*

9. Angulus obliquus est obtusus aut acutus.

10. Obtusus est obliquus maior recto. 11. *d.*1.

11. Acutus est obliquus minor recto. 12. *d.*1.

LIBER QVARTVS.

De figura.

1. Figura est lineatum vndique terminatum. *e.*14. *d.*1.
2. Centrum est punctum in figura medium.
3. Perimeter est comprehensio figuræ.
4. Radius est recta à centro ad perimetrum.
5. Diameter est recta inscripta figuræ per centrum. *Itaque*
   1. *Diametri in eadem figura sunt infinitæ.* *Et*
   2. *Centrum figuræ est in diametro.* *Et*
   3. *In concursu diametrorum.*
6. Altitudo est perpendicularis à vertice figuræ ad basim.
7. Figura ordinata est figura æquitermina & æquiangula.
8. Figura prima est figura in alias simpliciores figuras indiuidua.
9. Figura rationalis est quæ comprehenditur à basi & altitudine rationalibus inter se: irrationalis contra. *Itaque*
   Numerus figuræ rationalis figuratus dicatur, & numeri vnde fit, latera figurati.
10. Figuræ isoperimetræ sunt figuræ æqualis perimetri.
11. Ex isoperimetris homogeneis ordinatius est maius, ex heterogeneis ordinatis terminatius.
12. Si figuræ primæ sunt æquealtæ, sunt vt bases: & contra. *Itaque Si sunt in basi æquali, sunt æquales.*
13. Si figuræ primæ sunt reciprocæ basi & altitudine, sunt æquales: & contra.
14. Figuræ similes sunt figuræ æquiangulæ, & proportionales cruribus æqualium angulorum. *Itaque*
   1. *Habent homologos terminos æqualibus angulis subtensos, & æquales, si ipsæ sint æquales.* *Et*
   2. *Similiter sitæ sunt, quando termini proportionales simili situ respondent.* *Et*
   3. *Similes eidem, sunt similes inter se.* *Et*

4. *Si partibus data figura partes ad datum terminum similes, similiterque sita constituantur, figura constituetur similis data similiterque sita.*

15. Figuræ ſimiles habent rationem homologorum laterum æquemultiplicatam dimenſionibus, & medium proportionale vna minus. *Itaque*

1. *Si lineæ rectæ ſint continuè proportionales vna plures dimenſionibus figurarum ſimilium ad primam ſecundámque ſimiliter ſitarum, vt prima recta eſt ad vltimam, ſit prima figura eſt ad ſecundam: & contra.*

Et

2. *Si quatuor rectæ ſint proportionales, figuræ ſimiles ad eas ſimilitérque ſitæ ſunt proportionales: & contra.*

6. Figuræ complentes locum ſunt æquiangulæ, quæ circa idem punctum quolibet modo collocatæ nihil inane relinquunt.

7. Figura rotunda eſt ordinata, cuius radij omnes æquantur.

Itaque

1. *Diametri in rotundo biſecantur radijs æqualibus.* *Et*
2. *Rotunda diametrorum æqualium ſunt æqualia.* e.1.d.3.

LIBER QVINTVS.

De Lineis & Angulis in plano.

1. Lineatum eſt ſuperficies aut corpus.
2. Superficies eſt lineatum duntaxat latum. 5.*d*.1.
3. Superficiei terminus eſt linea. 6.*d*.1.
4. Superficies eſt plana vel gibba.
5. Superficies plana eſt ſuperficies, quæ æqualiter intra ſuos terminos interiacet. *e*.7.*d*.1.

Itaque licet in plano:

1. *A puncto ad punctum rectam ducere.* 1.& 2. *poſt*.1. *Et*
2. *Rectam ponere ad datum punctum æqualem datæ: & à maiore ſecare æqualem minori.* 2.3.*p*.1. *Itaque*

Recta vna duæque interſectæ ſunt in eodem plano. e.1.& 2.*p*.11.

Et

3. *Data recta peripheriam deſcribere.* *Itaque*

Radij eiuſdem vel æqualis peripheriæ ſunt æquales.

6. Si duæ æquales peripheriæ à terminis æqualium crurum dati anguli rectilinei ante concurrant, recta à concurſu ad verticem biſecabit angulum. 9.*p*.1.

7. Si duæ peripheriæ æquales à terminis datæ rectæ vtrimque concurrant, recta per concursus bisecabit datam. 10.*p.*1.

8. Si recta in rectam perpendicularis insistit, facit angulos deinceps rectos: & contra. *Itaque*

1. *Si recta insistit in rectam, æquat deinceps angulos duobus rectis: & contra e.*13. *&* 14.*p.*1.

2. *Si duæ rectæ intersecantur, æquant angulos ad verticem, & omnes quatuor rectis.* 15.*p.* 1. *Et*

3. *Si rectis recta sectis interiores eadem parte anguli sunt maiores duobus rectis, oppositi minores sunt.*

9. Si dato datæ rectæ infinitę puncto duæ partes vtrinque secentur æquales, & à punctis sectionum duæ æquales peripheriæ concurrant, recta à dato puncto in concursum erit perpendicularis super datam. 11.*p.*1.

10. Si pars datæ rectę infinitæ secetur à peripheria à dato extra puncto, recta à dicto puncto bisecans dictam partem erit perpendicularis super datam. 12.*p.* 1.

11. Si duæ rectæ in eodem plano nusquam concurrant, sunt parallelæ. *e.* 35.*d.* 1. *Itaque*

Si recta infinita secat alteram è rectis parallelis infinitis, secabit reliquam.

12. Si rectæ recta sectæ sint parallelæ, æquant angulos interiores eadem parte duobus rectis, & inter se alternos, & exteriorem interiori opposito: & contra 29. 28 27.*p.*1. *Itaque*

1. *Si rectæ recta connexa faciunt interiores angulos eadem parte minores duobus rectis, eodem continuatæ concurrent: & contra.* *Et*

2. *Recta connectens rectas parallelas est in earum plano.* 7.*p.*11. *Et*

3. *Si recta à dato puncto cum data faciat angulum, anguli facto æquati & alterni crus alterum erit parallelum datæ rectæ.* 31.*p.*1. *Et*

4. *Anguli crurum alternè parallelorum sunt æquales.* *Et*

5 *Si rectæ oppositæ æquantur, parallelæ conterminant parallelas: & contra. e.*34.*p.*1. *Et*

6. *Si rectæ conterminent eadem parte æquales & parallelas, sunt æquales & parallelæ.* 33.*p.*1.

13. Si lineæ rectæ parallelis pluribus rectis intersecantur, intersegmenta sunt proportionalia: *& contra. e.* 2.*p.*6. *&* 17.*p.* 1. *Itaque*

1. *Si recta cum data faciens angulum basique connexa secetur data ratione, parallelæ à segmentorum terminis in finem datæ & contingens in ea punctum secabunt datam data ratione.* 9. *&* 10.*p.* 6. *Et*

2. *Si duæ datæ rectæ facientes angulum cōtinuentur, prima æqualiter secundæ, secunda infinitè, parallela à terminis primæ continuationis in prin-*

cipium, secundæ, & contingens in ea punctum intersecabunt tertiam proportionalem. 11.*p.*6. *Et*

3. *Si è datis tribus rectis prima tertiaque facientes angulum continuentur, prima æqualiter secundæ, tertia infinitè, parallelæ à terminis primæ continuationis in principium secundæ, & contingens in ea punctum intersec abunt quartam proportionalem.* 12.*p.*6.

LIBER SEXTVS.

De Triangulo.

1. PLana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum, & vnum proportionale medium. *e.*20. *p.*6. 11. *&.*18. *p.*8.
2. Planum est rectilineum aut curui lineum.
3. Rectilineum est planum, quod comprehenditur à lineis rectis.
4. Rectilineum æquat angulos rectis interiores quidem generatim à binario paribus, externos autem quaternis.
5. Rectilineum est triangulum aut triangulatum.
6. Triangulum est quod comprehenditur à tribus lineis rectis. 21. *d.*1.

Itaque

1. *Triangulum est prima figura rectilineorum.* *Et*
2. *Si recta infinita secat angulum, secat basim.*

7. Trianguli duo quælibet latera sunt maiora reliquo. 20. *p.*1.

Itaque

1. *Si tres rectæ sunt duæ quælibet majores reliqua; peripheriaque à terminis vnius interuallis reliquarum concurrant, radij à concursu ad dictos terminos constituent triangulum.* *Et*
2. *Si duæ æquales periph:riæ à terminis datæ rectæ eiusque internallo concurrant, rectæ à concursu ad dictos terminos constituent triangulum æquilaterum super datam.* 1. p. 1.

8. Si recta in triangulo est parallela basi, secat crura proportionaliter: & contra. 2.*p.*6.
9. Trianguli tres anguli sunt æquales duobus rectis 32.*p.*1.

Itaque

1. *Trianguli duo quilibet anguli sunt minores duobus rectis.* 17. p. 1.

Et

2. *Continuato latere, exterior angulus æquatur duobus interioribus oppositis.* 32. p. 1. *Itaque*

3. *Est maior vtrolibet interiore opposito.*

10. Si triangulum est æquicrurum, est in basi æquiangulum: & contra. *e.* 5. *&* 6. *p.* 1. *Itaque*

1. *Si trianguli æqua crura continuentur, anguli sub basim æquabuntur.* 5. p. 1. *Et*

2. *Si triangulum est æquilaterum, est æquiangulum: & contra.* *Et*

3. *Angulus trianguli æquilateri valet duas tertias recti.* *Et*

4. *Triangula sex æquilatera complent locum.*

11. Trianguli maius latus subtendit maiorem angulum, & maior angulus subtenditur à maiore latere. 19. *&* 18. *p.* 1.

12. Si recta in triangulo bisecat angulum, secat basim ratione crurum: & contra. 3. *p.* 6.

LIBER SEPTIMVS.

De comparatione Triangulorum.

1. Triangula æquilatera sunt æquiangula. 8. *p.* 1.

2. Si duo triangula æquantur angulis vel duobus æquicruris vel binis æqualis aut cruris aut basis duorum, sunt æquilatera. 4. *&* 26. *p.* 1.

3. Triangula æquantur ternis angulis. *Itaque*
Si bini anguli duorum triangulorum æquantur, reliqui æquantur.

4. Si triangulum triangulo æquicrurum est maius basi, est maius angulo: & contra. 25. *&* 24. *p.* 1.

5. Si triangulum triangulo in eadem basi est minus interioribus cruribus, est maius angulo crurum. 21. *p.* 1.

6. Triangula æquealta sunt vt bases: & contra. *e.* 1. *p.* 6.
Itaque

1. *In æquali basi sunt æqualia.* 37. & 38. *p.* 1. *Et*

2. *Si recta à vertice trianguli bisecat basim, bisecat triangulum, & diameter est trianguli.*

7. Si recta est à vertice trianguli ad datum in basi punctum non medium, & parallela sit à medio basis in latus, recta à vertice parallelę in dictum punctum bisecabit triangulum.

8. Si triangula æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra. 15. *p.* 6.

9. Si duo triangula sunt ęquiangula, sunt proportionalia cruribus.

æqualium angulorum: & contra. 4. 5. *p.* 6. *Itaque*

Si recta in triangulo est parallela basi, desecat triangulum æquiangulum toti, & minus basi.

10. Si duo triangula sunt proportionalia curibus æqualis anguli sunt æquiangula. 6. *p.* 6.

11. Si cruribus proportionalia, & alternè parallela intermedium angulum faciunt, bases habent in rectam continuas. 32. *p.* 6.

12. Si habeant vnum angulum equalem, alterum cruribus proportionalem, tertium homogeneum, sunt æquiangula. 7. *p.* 6.

LIBER OCTAVVS.

De Generibus triangulorum.

1. Triangulum est rectangulum vel obliquangulum.

2. Triangulum rectangulum est quod habet vnicum angulum rectum: obliquangulum quod nullum. 27. *d.* 1. *Itaque*

1. *Si duæ perpendiculares connectantur, constituent triangulum rectangulum.* *Et*

2. *Si trianguli angulus ad basim rectus est, perpendicularis à vertice est crus alterum, & contra.*

3. Si triangulum rectangulum est æquicrurum, vterque angulus ad basim est dimidius recti: & contra. *Itaque*

1. *Si trianguli angulus æquatur reliquis est rectus, & contra.*

2. *Si rècta à vertice trianguli bisecans basim est æqualis bisegmento, angulus verticis rectus est: & contra.*

4. Perpendicularis in triangulo ab angulo recto in basim secat triangula similia toti & inter se. 8. *p.* 6. *& contra.* *Itaque*

1. *Perpendicularis est proportionalis inter segmenta basis.* *Et*

2. *Crus vtrumlibet est proportionale inter basim & basis segmentum conterminum.*

5. Si basis trianguli subtendit rectum rectilineum ad eum situm, æquatur rectilineis ad crura similibus similiterque sitis: & contra. *e.* 31. *p.* 6.

6. Triangulum obliquangulum est obtusangulum vel acutangulum.

7. Obtusangulum quod habet vnum obtusum angulum. 28. *d.* 1. *Itaque*

1. *Si obtusus angulus est ad basim, perpendicularis à vertice cadit extra: & contra.* *Et*

2. *Si*

2. *Si trianguli angulus sit maior reliquis, est obtusus: & contra.* *Et*

3. *Si recta à vertice trianguli bisecans basim, est minor bisegmento, angulus verticis obtusus est: & contra.*

8. Triangulum acutangulum est quod habet omnes acutos angulos. 28.*d*.1. *Itaque*

1. *Perpendicularis à vertice cadit intra: & contra.* *Et*

2. *Si trianguli angulus sit minor reliquis, est acutus: & contra.* *Et*

3. *Si recta à vertice trianguli bisecans basim est maior bisegmento, angulus v.rticis acutus est, & contra*

LIBER NONVS.

De Geodæsia rectarum è triangulis rectangulis similibus.

1. Radius est norma crurum inæqualium.
2. Radij crura sunt index & transuersarium.
3. Index est duplus sesquidecimus tranuersarij.
4. Transuersarium est per indicem volubile, modò sublimius, modò humilius.
5. Si visus est ab initio cruris alterius, est pr termeinum reliqui crusque alterum est rectum metiendæ magnitudini, reliqum parallelum.
6. Longitudo & altitudo triplicem mensuram habent, primam & secũdam vnius distantiæ, & quidem data alterius dimensione pro tertio proportionali: tertiam duplicis distantię, qualis tantum est dimensio latitudinis.
7. Si visus sit ab initio indicis recti in metam longitudinis, erit vt segmentum indicis ad segmentum transuersarij, sic mensoris altitudo ad longitudinem.
8. Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit vt segmentum transuersarij ad segmentum indicis, sic data altitudo ad longitudinem.
9. Si visus sit ab initio transuersarij paralleli, erit vt in indice differentia maioris segmenti ad minus, sic differentia secundæ distantiæ ad longitudinem.
10. Si visus sit ab initio transuersarij recti, erit vt segmentum transuersarij ad segmentum indicis, sic data longitudo ad latitudinem.

Itaque in euersa altitudine.

Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit vt segmentum transuersarii ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem.

11. Si visus sit ab initio indicis recti, erit vt segmentum indicis ad segmentum transuersarij, sic data longitudo ad altitudinem. *Itaque*

Si visus sit ab initio indicis recti per pinnas transuersarij in terminos notæ partis, erit vt interuallum pinnarum ad reliquum superemi-nentis transuersarij, sic nota pars ad reliquam.

12. Si visus sit ab initio indicis recti, erit vt in indice differentia segmenti ad differentiam distantiæ, sic segmentum transuersarij ad altitudinem.

Itaque è geodæsia altitudinis patet differentia duarum altitudinum.

13. Si visus sit ab initio indicis recti per pinnas transuersarij in terminos latitudinis, erit vt in indice differentia segmenti ad differentiam distantiæ, sic interuallum pinnarum ad latitudinem.

LIBER DECIMVS.

De triangulato & parallelogrammo.

1. TRiangulatum est rectilineum compositum è triangulis. *Itaque*

1. Triangulati latera sunt binario plura triangulis. Et

2. Triangulata homogenea secantur in triangula æqua numero. e. 20. p. 6.

2. Triangulata similia secantur in triangula similia inter se & homologa totis. *e.* 20. *p.* 6.

3. Triangulatum est quadrangulum aut multangulum.

4. Quadrangulum est quod comprehenditur à quatuor lineis rectis. 22. *d.* 1.

5. Quadrangulum est parallelogrammum aut trapezium.

6. Parallelogrammum est quadrangulum lateribus oppositis parallelum. *Itaque*

1. Si rectæ eadem parte conterminent æquales & parallelas, parallelogrammum constituent. Et.

2. Parallelogrammum oppositis & lateribus & angulis & sectis diametro segmentis æquatur. Et

3. Diameter parallelogrammi bisecatur radijs æqualibus. Et

4. Parallelogrammum est duplum trianguli basi & altitudine æqualis.

41. p. 1. *Et*

5. *Æquatur triangulo æquealto, basique duplo.* e. 52. p. 1. *vnde licet*

6. *Dato triangulo in dato angulo rectilineo parallelogrammum æquale constituere.* 42. p. 1.

7. Parallelogrammum constat è binis & diagonalibus & complementis, & gnomonibus.

8. Diagonale est particulare parallelogrammum communis anguli & diagonij cum toto parallelogrammo.

9. Diagonale est toti simile similiterque situm, *e.* 24. *p.* 6. & contra.

Itaque

Si particulare parallelogrammum est toti æquiangulum, & simile similiterque situm, est diagonale. 26. *p.* 6.

10. Complementum est particulare parallelogrammum à conterminis diagonalium lateribus comprehensum

11. Complementa sunt æqualia 43. *p.* 1. *Itaque*

1. Si complementum alterum æquatur dato triangulo in dato angulo rectilineo, reliquum ad datam rectam comparatum, eidem pariter æquabitur. 44. *p.* 1. *Et*

2. Si parallelogramma continenter æquentur triangulis dati triangulati in dato angulo rectilineo, totum parallelogrammum toti triangulato pariter æquabitur. 45. *p.* 1. *Itaque*

Parallelogrammum suis equatur diagonalibus & complementis.

12. Gnomo est alterum diagonale cum duobus complementis. 2. *d.* 1.

13. Parallelogramma æquealta, sunt vt bases. 1. *p.* 6.

Itaque

Parallelogramma æquealta in æquali basi sunt æqualia. 35. 36. *p.* 1.

14. Si parallelogramma æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra. 15. *p.* 6. *Itaque*

1. *Si quatuor rectæ sunt proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum.* e. 16. *p.* 6. *& contra.*

Et

2. *Si tres rectæ sunt proportionales, parallelogrammum mediæ æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum, & contra.*

LIBER VNDECIMVS

De Rectangulo.

1. Parallelogrammum est rectangulum aut obliquangulum.
2. Rectangulum est parallelogrammum quod habet omnes angulos rectos. *Itaque*
   1. *Rectangulum comprehenditur à duabus rectis angulum rectum comprehendentibus.* 1. *d.* 2.
   2. *Rectangula quatuor complent locum.*
3. Si diameter bisecat latus rectanguli, rectè secat & contra.
   Itaque
   Si inscripta rectè bisecat latus rectanguli, est diameter.
4. Rectangulum æquatur rectangulis ipsius vno latere & reliqui ex segmentis. 1. *p.* 2.
5. Si quatuor rectæ sint proportionales, rectangulum mediarum æquatur rectangulo extremarum. 16. *p.* 6. & contra.
6. Figuratus rectanguli rationalis appellatur planus rationalis. 16. *d.* 7.

LIBER DVODECIMVS.

De Quadrato.

1. Rectangulum est quadratum, vel oblongum.
2. Quadratum est rectangulum æquilaterum. 30. *d.* 1.
   Itaque
   1. *Latera quadratorum æqualium sunt æqualia.* *Et*
   2. *Potentia rectæ est quadratum.* *Et*
   3. *Si duæ contermina perpendiculares æquales claudantur parallelis, constituent quadratum.* 4. 6. p. 1.
3. Planus quadrati est planus æquilaterus. *Itaque*
   Fit à numero in se ipsum multiplicato.
4. Si tres rectæ sunt proportionales, quadratum mediæ æquatur rectangulo extremarum: & contra. 17. *p.* 6. & 20 *p.* 7.
5. Si basis trianguli subtendit rectum, æque potest cruribus: & contra. 47. & 48. *p.* 1. *Itaque*
   1. *Si quadratus imparis pro crure primo dati minuatur vnitate, dimidius reliqui erit crus alterum, auctus vnitate erit basis.* *Et*

2. *Si dimidius paris pro crure primo dati quadretur, quadratus minutus vnitate erit crus alterum, auctus vnitate erit basis.* *Itaque*

3. *Diagonius potest duplum lateris, eique est asymmetra.*

6. Si basis trianguli rectanguli secatur à perpendiculari ex angulo recto dupla ratione, potest sesquialterum maioris cruris, triplum minoris: si quadrupla, sesquiquartum maioris quintuplum minoris. *ad.* 13.15.16.*p.*13.

7. Si recta est secta quotlibet fariam, potest multiplex segmenti cognomine quadrato numeri sectionis.

8. Si recta est secta in duo segmenta, quadratum totius æquatur quadratis segmentorum & duplici rectangulo vtriusque. 4.*p.*2.

Itaque

Latus primi diagonalis est latus alterius complementi, & duplicatum est latus simul vtriusque: reliquum autem latus simul vtriusque est latus reliqui diagonalis. *Et*

Si latus inuentum duplicetur, & duplicato vnitas addatur, totus erit gnomo proxime maioris quadrati.

9. Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur, latus continuè facti è dimidio & reliquis erit area trianguli.

10. Si basis trianguli subtendit obtusum plus potest cruribus duplici rectangulo alterius, & ex eo continuationis ad verticis perpendicularem. 12.*p.*1.

LIBER DECIMVS TERTIVS.

De Oblongo.

1. Oblongum est rectangulum inæquilaterum. 31. *d.* 1.

2. Oblongum è tota & segmento æquatur rectangulo segmentorum, & prædicti segmenti quadrato. 3. *p.* 1.

3. Oblonga è tota & segmentis æquantur è tota quadrato. 2. *p.* 2.

4. Oblonga duo è tota & segmento cum tertio quadrato reliqui segmenti, æquantur quadratis totius & prædicti segmenti. 7. *p.* 2.

5. Basis trianguli acutanguli minus potest cruribus duplici oblongo ex altero crure & eius segmento à dicto angulo ad verticis perpendicularem. 13. *p.* 2. *Itaque*

Si quadratum basis acuti anguli tollatur è quadratis crurum, reliqui dimidio per crus diuiso, quotus erit segmentum diuidens tis à dicto an-

gulo ad verticis perpendicularem.

6. Si recta est bisecta, secusque oblongum inæqualium segmentorum cum quadrato intersegmenti æquatur quadrato bisegmenti. 5.*p.*2.
7. Si recta est bisecta & continuata, oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti æquatur quadrato compositæ ex bisegmento & continuatione. 6.*p.*1.
8. Si duas datas rectas comprehendentes rectangulum, & infinitè continuatas mesograpus tangens oppositum angulum angulo datarum intersecet æquidistanter à centro, intersegmenta erunt media continuè proportionalia datis.

LIBER DECIMVS-QVARTVS.

De Recta proportionaliter secta, & de reliquis quadrangulis & multangulis.

1. Recta secatur secundum mediam, & extremam rationem, quando fuerit vt tota ad maius segmentum, sic maius segmentum ad minus. 3.*d.*6.
2. Si recta proportionaliter secta est rationalis datæ mensuræ, segmenta sunt ad eam & inter se irrationalia. *e.* 6.*p.*13.
3. Si quadratum fiat è data recta, rectæ ab angulo facti ad medium contermini lateris differentia supra dimidium erit maius segmentum datæ proportionaliter sectæ. 11.*p.*2. & 30.*p.*6.

Itaque

1. *Si recta proportionaliter secta continuetur maiore segmento, tota secabitur proportionaliter, & maius segmentum erat data.* 5.p.13.

4. Maius segmentum continuatum dimidio totius potest quintuplum eiusdem dimidii: & si recta potest quintuplum sui segmenti, reliquum factum duplum prædicti secatur proportionaliter, & maius segmentum est idem reliquum. 1. & 2.*p.*13.
5. Minus segmentum continuatum dimidio maioris potest quintuplum eiusdem dimidii. *e.* 3.*p.*13.
6. Tota & minus segmentum possunt triplum maioris. *e.* 4.*p.*13.
7. Parallelogrammum obliquangulum est rhombus aut rhomboïdes.
8. Rhombus est obliquangulum æquilaterum. 32.*d.* 1.
9. Rhomboïdes est obliquangulum inæquilaterum. 33.*d.* 1.
10. Trapezium est quadrilaterum, non parallelogrammum. 34.*d.* 1.

11. Multangulum est quod pluribus quam quatuor lineis rectis comprehenditur. 23. *d.* 1.
12. Si quinquangulum æquilaterum tribus angulis æquatur, est æquiangulum. 7. *p.* 13.
13. Triangulata multangula è suis item triangulis mensuram capiunt.

LIBER DECIMVS QVINTVS.

De Lineis circuli.

1. Circulus est planum rotundum. *e.* 15. *d.* 1.
2. Circuli sunt vt à diametris quadrata. 2. *p.* 12.

Itaque

Diametri sunt vt peripheriæ.

3. Geometria circularis est in lineis aut in segmentis circuli.
4. Si recta duobus in peripheria punctis terminetur, cadet intra circulum. 2. *p.* 3.
5. Si à termino diametri ex eaque radio æquante datam rectam peripheria describatur, recta à dicto termino in concursum peripheriarum inscribetur dato circulo æqualis datæ rectæ. 1. *p.* 4.
6. Si inscripta rectæ bisecat inscriptam, est diameter circuli, eiusque medium est centrum. 1. *p.* 3.
   1. *Si duæ rectæ duas inscriptas recte bisecent, concursus bisecantium erit centrum circuli.* e. 25. p. 3. *Et licet*
   2. *Peripheriam ducere per tria puncta in rectam minime cadentia. e.* 5. *p.* 4.
7. Si diameter bisecat adiametrum, recte secat: & contra. 3. *p.* 3.
8. Si adiametri intersecantur, segmenta sunt inæqualia. 4. *p.* 3.
9. Si duæ inscriptæ intersecantur rectangulum è segmentis vnius æquatur rectangulo è segmentis reliquæ. 35. *p.* 3.
10. Inscriptæ æquidistant à centro, in quas à centro perpendiculares sunt æquales. 4. *d.* 3.
11. Si inscriptæ sunt æquales æquidistant à centro: & contra. 14. *p.* 3.
12. Inscriptarum inæqualium diameter est maxima, diametroque propior maior remotiore, remotissima minima, minimæque propior minor remotiore, binæque vtrinque à diametro æquantur. *e.* 15. *p.* 3.
13. Rectarum à diametri puncto non centro in peripheriam, quæ per

centrum est maxima, propiorque maximæ est maior remotiore, reliqua maximæ minima, minimęque propior minor remotiore, binæque vtrinque à maxima vel minima solæ æquantur. 7. *p.* 3.

Itaque

Si punctum in circulo est terminus trium rectarum in peripheriam æqualium, est centrum circuli. 9. p. 3.

14. Rectarum à dato extra puncto in concauum peripheriæ, quæ per centrum, est maxima, propiorque maximæ est maior remotiore: in conuexum, tangens peripheriam est maxima, segmentum maximæ est minima; minimæque propior minor remotiore, binæque vtrimque à maxima vel minima solæ æquantur. 8. *p.* 3.

15. Si recta est perpendicularis extrema diametro, tangit peripheriam:& contra. *e.* 16. *&.* 19. *p.* 3. *Itaque*

1. *Si recta est per centrum & contactum, est perpendicularis tangenti.* 19. *p.* 3. *Et*
2. *Punctum contactus est, quo à centro perpendicularis tangenti incidit.* *Et*
3. *Tangens est singularis eadem parte.* e. 16. p. 3. *Et*
4. *Angulus contactus est minor quovis acuto rectilineo*, *e.* 16. p. 2.
5. *Anguli contactus in æqualibus peripherijs sunt æquales.*

16. Si à radio ex datæ peripheriæ centro ad datum extra punctum peripheria describatur, & à concursu datæ, radiique radio ipsi perpendicularis in descriptam connectatur cum dicto centro, recta dato puncto in concursu datæ connectentis tanget datam peripheriam 17. *p.* 3.

17. Si è duabus rectis à dato extra puncto prima secat in concauum, reliqua tangit, oblongum è secante & exteriore secantis segmento æquatur quadrato tangentis:& si oblongum tale æquatur quadrato reliquæ, reliqua ipsa tangit. 36. *&.* 37. *p.* 3.

Itaque

1. *Tangentes ab eodem puncto sunt æquales duæ.* *Et*
2. *Oblonga è qualibet ex eodem puncto secante & secantis exteriore segmento æquantur inter se.* *Et*
3. *Datis duabus rectis licet alteri continuare tertiam, vt oblongum ex continuata & continuatione æquetur quadrato reliquæ Vitell.* 127. *p.* 1.

18. Si peripheriæ sunt intersectæ vel contiguæ sunt eccentricæ: illæque duobus tantum punctis intersecantur, hæ diametros per contactum continuant. 5. 6. 10. 11. 12. *p.* 3.

19. Si inscriptæ circulis æqualibus sunt æquales, secant peripherias æquales

æquales: & contra. 28. 29. *p*. 3.

LIBER DECIMVS SEXT.

De Circuli segmentis.

1. SEgmentum circuli est quod comprehenditur extrinsecus à peripheria, intus à recta.
2. Segmentum circuli est sector aut sectio.
3. Sector est segmentum intus comprehensum à recta duplici, faciente angulum in centro, qui angulus in centro, dicitur: vt peripheria dicitur basis sectoris. *9. d. 3.*
4. Angulus in peripheria est angulus comprehensus à duab. rectis inscriptis,& in peripheria conterminis. 8. *d. 3.*
5. Angulus in centro duplus est anguli in peripheria in eandem peripheriam insistentis. 20. *p. 3.* *Itaque*

   Si angulus in peripheria æquatur angulo in centro, est duplus basi. & contra.
6. Anguli in centro,peripheriave circulorum æqualium sunt vt peripheriæ in quas insistunt: & contra. *e. 33. p. 6.* 16. 27. *p. 3.*

   Itaque

   Vt sector ad sectorem, sic angulus ad angulum.
7. Sectio est segmentum circuli intus comprehensum ab vna recta, quæ basis sectionis dicitur.
8. Sectio absoluitur invento centro.
9. Peripheria sectionis bisecatur perpendiculari bisecante basim. 30 *p. 3.*
10. Angulus in sectione est angulus comprehensus à duabus rectis conterminis basi & in peripheria conterminis. 7. *d. 3.*
11. Anguli in eadem sectione sunt æquales. 21. *p. 3.*
12. Anguli in oppositis sectionibus æquantur duobus rectis. 22. *p. 3.*
13. Si sectiones capiunt angulos æquales,sunt similes. *e.* 10. *d.* 3.
14. Si sectiones similes sunt in æquali basi, sunt æquales. 23. *&.* 24. *p. 3.*
15. Angulus sectionis est, qui comprehenditur à terminis. 7. *d. 3.*
16. Sectio est semicirculus,aut inæqualis semicirculo.
17. Semicirculus est sectio dimidia circuli.

Itaque

Semicirculus comprehenditur à semiperipheria & diametro. 8. d. 1.

18. Angulus in semicirculo rectus est, semicirculi, minor recto rectilineo, maior quouis acuto: in maiore sectione est minor recto, maioris maior, in minore maior, minoris minor. *e. 31. & 16. p. 3.* *Itaque*

1. *Si duæ rectæ diametro circuli contermina conterminentur in peripheria, faciunt angulum rectum.*

Et

2. *Si recta infinita secetur à peripheria externi centri in punctis dato & contingente, & diameter sit à contingente, recta à dato puncto connectens diametrum erit perpendicularis super infinitam.*

Et

3. *Si recta à dato puncto faciens acutum angulum cum infinita, fiat diameter peripheriæ secantis infinitam, recta à dicto puncto connectens segmentum erit perpendicularis super infinitam.* *Et*

4. *Si duarum rectarum maior fiat diameter circuli, minorque maiori contermina & inscripta connectatur, maior plus poterit, quam minor, quadrato connectentis ad. 13. p. 10.*

19. Si recta continuata è duabus rectis fiat diameter circuli, perpendicularis à puncto continuationis in peripheriam erit proportionalis inter datas. 13. *p. 6.*

20. Anguli in oppositis sectionibus æquantur alternis angulis secantis & contiguæ. 32. *p.* 3. *Itaque*

1. *Si ad terminum datæ rectæ æquetur angulus rectilineus dato, & ab æquati vertice perpendicularis reliquo lateri concurrat cum perpendiculari à medio datæ, concursus erit centrum circuli per æquatum angulum descripti, in cuius opposita sectione super datam angulus æquabitur dato. e. 33. p. 3.*

2. *Si angulus secantis & contiguæ æquetur dato angulo rectilineo, angulus in opposita sectione eidem pariter æquabitur. 34. p. 3.*

LIBER DECIMVS SEPTIMVS.

De adscriptione circuli & trianguli.

1. SI rectilineum inscriptum circulo est æquilaterum, est æquiangulum.

2. Æquatur triangulo, basis quidem perimetro, altitudinis autem perpendiculari à centro in latus.

3. Rectilinea similia circulis inscripta, sunt vt à diametris quadrata. 1. *p.* 12. *Itaque*

Si sit vt diameter circuli ad latus rectilinei adscripti, sic diameter secundi circuli ad latus secundi rectilinei adscripti, triangulaque adscriptorũ singularia similia similiterque sita, rectilinea adscripta erunt similia similiterque sita.

4. Si duæ rectæ bisecent duos angulos dati rectilinei, circulus radij ab earum concursu in latus perpendicularis inscribetur dato rectilineo. 4. & 8 *p.* 4.

5. Si duæ rectæ bisecent duo latera dati rectilinei, circulus radij ab earum concursu in angulum circumscribetur dato rectilineo. 5. *p.* 4.

6. Si duæ inscriptæ à contactu rectæ & peripheriæ æquent duos vtrinque angulos duobus angulis dati trianguli, connexæ inscribent triangulum dato circulo, æquiangulum dato triangulo. *e.* 2. *p.* 4.

7. Si duo anguli in centro dati circuli æquentur ad commune latus exterioribus angulis dati trianguli, rectæ tangentes peripheriam in cruribus angulorum circumscribent triangulum dato circulo, æquiangulum dato triangulo. 3. *p.* 4. *Itaque*

Si triangulum est rectangulum, obtusangulum, acutangulum, centrum circumscripti circuli est in latere, extra latera, intra latera: & contra. consect. est 5. p. 4.

LIBER DECIMVS OCTAVVS.

De Adscriptione triangulati.

1. SI rectæ tangant peripheriam in angulis inscripti triangulati ordinati, circumscribent triangulatum circulo homogeneum inscripto triangulato.

2. Si diametri rectè intersecentur, subtensa recto erit latus inscripti quadrati. *e.* 6. *p.* 4. *Itaque*

Quadratum inscriptum est dimidium circumscripti. *Et*

Est maius dimidio circumscripti circuli.

3. Si recta secetur proportionaliter, trianguli crurum sectæ æqualium, basis maiori segmento æqualis, vterque angulus ad basim erit duplus reliqui, & basis erit latus quinquanguli in circulum cum triangulo inscripti. 10. & 11. *p.* 4.

4. Si duæ rectæ subtendunt duos deinceps angulos inscripti quinquanguli, secantur proportonaliter, & maiora segmenta sunt latera inscripti. e. 18. p. 13. *Itaque*

Si data recta secta proportionaliter continuetur vtrinque maiore segmento sexque peripheriæ ratio data concurrant, binæ vtrimque à terminis datæ & continuatæ: duæ reliquæ ab earum concursu, rectæ per concursus & terminos, datæ constituent super datam quinquangulum ordinatum.

5. Si diameter circuli quinquangulo circumscripti est rationalis, est irrationalis ad latus inscripti quinquanguli. e. 11. p. 13.

6. Radius circuli est latus inscripti sexanguli. e. 15. p. 4.

Itaque

1. *Sexangula tria ordinata complent locum.*

2. *Si rectæ ab vno inscripti sexanguli angulo in tertium vtrinque angulum connectantur, inscribent triangulum æquilaterum dato circulo.*

7. Latus inscripti trianguli æquilateri potest triplum circularis radij. 12. p. 13.

8. Si latus sexanguli secetur proportionaliter, maius segmentum erit latus decanguli: & contra.

Itaque

Si decangulum & sexangulum inscribantur eidem circulo, recta è latere vtriusque continuata secabitur proportionaliter, & maius segmentum erit latus sexanguli: &, si maius segmentum rectæ proportionaliter sectæ est latus sexanguli, reliquum erit latus decanguli. 9. p. 13.

9. Si decangulum, sexangulum, quinquangulum inscribantur eidem circulo, latus quinquanguli potest latera reliquorum: & si recta potest latera sexanguli & decanguli, est latus quinquanguli. 10. p. 13.

10. Si triangulum & quinquangulum inscribantur eidem circulo ad idem punctum, recta inscripta inter vtriusque basim dicto puncto opposita erit latus inscripti quindecanguli. 16. p. 4

11. Si quinquangulum & sexangulum inscribantur eidem circulo ad idem punctum, peripheria inter vtriusque latera erit pars tricesima totius peripheriæ.

LIBER DECIMVS NONVS.

De Geodæsia multanguli ordinati & circuli.

1. PLanus è perpendiculari à centro in latus & dimidio perimetri, est area multanguli ordinati.
2. Peripheria est tripla diametri & fere sesquiseptima.

Itaque

1. *Planus è radio & peripheriæ dimidio est area circuli.*

Et

2. *Vt 14. ad 11. sic quadratum diametri ad circulum.*
3. *Planus è radio & peripheriæ quadrante est area semicirculi.* *Et*
4. *Planus è radio & basis dimidio est area sectoris.* *Et*
5. *Si triangulum è duobus radijs & basi maioris sectionis addatur duobus in ea sectoribus: totum erit area sectionis maioris: sin detrahatur suo sectori reliquum erit area minoris.* *Et*

Circulus è planis isoperimetris inæqualibus est maximus.

LIBER VIGESIMVS.

De Superficie gibba.

1. GIbbum est superficies quæ inæqualiter intra suos terminos interiacet.
2. Gibbum est sphæricum aut varium.
3. Sphæricum est gibbum æquidistans à centro comprehensi spatij.

Itaque

Fit conuersione semiperipheriæ manente diametro. e. 14. d. 11.

4. Maxima in sphærico peripheria est quæ sphæricum bisecat.

Itaque

Peripheria propior maximæ est maior remotiore, & vtrinque æquidistantes à maxima duæ sunt æquales.

5. Planus è maxima peripheria & eius diametro est sphæricum.

Itaque

1. *Planus è maximo circulo & 4. est sphæricum.* *Et*
2. *Vt 7. ad 22. sic quadratum diametri ad sphæricum.* *Et*
3. *Planus è maxima peripheria & radio est hemisphæricum.*

6. Si quota pars est radij, perpendicularis à centro ad basim sectionis maioris, tanta augeatur hemisphæricum, totum erit sphærici

maior sectio: sin tanta minuatur, reliquum erit minor.

7. Varium est gibbum, cuius basis est peripheria, latus recta à termino verticis in terminum basis.

8 Varium est conicum aut cylindraceum.

9. Conicum est quod à subiecta peripheria æqualiter fastigiatur ad verticem. *Itaque*

Fit conuersione lateris circa subiectam peripheriam.

10. Planus è latere & dimidio basis est conicum.

11. Cylindraceum est quod à subiecta peripheria ad sublimem æqualem & parallelam peripheriam æqualiter erigitur.

Itaque

Fit conuersione lateris circa duas peripherias æquales & parallelas.

12. Planus è sua basi & altitudine est cylindraceum.

LIBER VIGESIMVS PRIMVS.

De Lineis & Superficiebus in Solido.

1. Corpus est lineatum latum & altum. 1. *d.* 11.

2. Terminus solidi est superficies. 2. *d.* 11.

3. Si recta est rectis in subiecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione, est perpendicularis subiecto plano: &, si est perpendicularis plano, est rectis in subiecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione. *e.* 3. *d* & 4. *p.* 11.

4. Si tres rectæ intersectæ sunt eidem rectę perpendiculares in communi sectione, sunt in eodem plano. 5. *p.* 12.

5. Si duæ rectæ sunt perpendiculares subiecto plano, sunt parallelæ, & si parallelarum altera est perpendicularis subiecto plano, reliqua est eidem perpendicularis. 6. 8. *p.* 11.

6. Si rectæ in diuersis planis sunt ad eandem rectam parallelæ, sunt inter se parallelæ. 9. *p.* 11.

7. Si duæ rectæ sunt perpendiculares, prima à sublimi puncto in rectam subiectam, secunda à communi sectione in subiecto plano, tertia, à dicto puncto perpendicularis secundæ, erit perpendicularis subiecto plano. *e.* 11. *p.* 11.

8. Si recta à dato subiecti plani puncto sit parallela rectæ ad idem planum perpendiculari, erit etiam perpendicularis subiecto plano, *ex* 12. *p.* 11.

9. Si recta altero intersectorum planorum perpendicularis communi sectioni est perpendicularis reliquo, plana sunt perpendi-

cularia, recta in altero perpendicularis communi sectioni, est perpendicularis reliquo. *e.* 4. *&* *d.* 3. 8. *p.* 11.

10. Si recta est perpendicularis plano, omnia per eam plana, sunt eidem perpendicularia: & si duo plana intersecta sunt alicui plano perpendicularia, communis sectio est eidem perpendicularis, *e.* 18. *&*. 19. *p.* 11.

11. Plana sunt parallela quę nusquam annuunt. 8. *d.* 11.

Et

1. *Quæ communi perpendiculo diuiduntur.* 14. p. 11.
2. *Si binæ rectæ in ipsis contermina, sunt parallelæ.* 15. p. 11.

12. Si duo plana parallela secantur plano, communes sectiones sunt parallelæ. 16. *p.* 11.

LIBER VIGESIMVS SECVNDVS.

De Pyramide.

1. AXis solidi est diameter circa quam conuertitur. *e.* 15. 19. 22. *d.* 11.
2. Solidum rectum est cuius axis est perpendicularis centro basis.
3. Si solida comprehenduntur à superficiebus homogeneis æqualibus multitudine & magnitudine, sunt æqualia. 10. *d.* 11.
4. Si solida comprehenduntur à superficiebus multitudine æqualibus & similibus, sunt similia. 9. *d.* 11.
5. Solida similia habent triplicatam rationem homologorum laterum, & duo media proportionalia. 33. *p.* 11. 8. *p.* 12.
6. Solidum est planum vel gibbum.
7. Planum, quod comprehenditur à superficiebus planis.
8. Anguli plani comprehendentes angulum solidum sunt minores quatuor rectis 21. *p.* 11.
9. Si tres anguli plani minores quatuor rectis comprehendant angulum solidum, duo quilibet sunt maiores reliquo: & si duo quilibet sunt maiores reliquo, comprehendent angulum solidum. 20. *&* 23. *p* 11.
10. Solidum planum est pyramis aut pyramidatum.
11. Pyramis est solidum planum à basi rectilinea æqualiter fastigiatum. *Itaque*

1. *Pyramidis hedræ sunt vna plures angulis in basi.* *Et*
2. *Pyramis est prima figura solidarum.* *Itaque*
3. *Pyramides æquialtæ sunt vt bases.* 5. e. & 6. p. 12. *Et*

4. *Reciproca basi & altitudine sunt aequales. 9. p. 12.*

12. Tetraedrum est pyramis ordinata à quatuor triangulis comprehensa. 26. *d.* 11. *Itaque*

1. *Tetraedri latera sunt sex, anguli plani duodecim, solidi quatuor.* *Et*

2. *Tetraedra duodecim complent locum solidum.* *Et*

3. *Si quatuor triangula ordinata & aequalia solidis angulis componantur, comprehendent tetraedrum.*

13. Si recta potens sesquialterum ad latus trianguli aequilateri secetur dupla ratione, duplum segmentum perpendiculare trianguli centro, connexum cum eius angulis comprehendet tetraedrum. *e. 13. p. 13.*

LIBER VIGESIMVS TERTIVS.

De Prismate.

1. Pyramidatum est solidum planum è pyramidibus compositum.

2. Pyramidatum est prisma aut polyedrum mistum.

3. Prisma est pyramidatum, cuius duo opposita plana sunt aequalia, similia, parallela similiter sita: reliqua parallelogramma. 13. *d.* 11. *Itaque*

Hedrae prismatis sunt binario plures angulis in basi.

4. Planus è basi & altitudine est soliditas recti prismatis.

5. Prisma est triplum pyramidis basi & altitudine aequalis. *e.* 7. *p.* 12. *Itaque*

1. *Planus è sua basi & triente altitudinis est soliditas pyramidis basi & altitudine aequalis.* *Et*

2. *Prismata homogenea aequealta sunt vt bases. 29. 30. 31. 32. p. 11.* *Et*

3. *Si reciprocantur basi & altitudine, sunt aequalia. 34. p. 11.* *Et*

4. *Si prisma secatur plano oppositis hedris parallelo, segmenta sunt vt bases. 25. p. 11.*

6. Prisma est pentaedrum aut è pentaedris compositum.

7. Si pentaedra alterum basis triangulae, alterum parallelogrammae ad triangulum duplae sunt aequealta, sunt aequalia. 40. *p.* 11.

8. Prisma è pentaedris compositum est hexaedrum aut polyedrum. Hexaedrum est quod sex hedris quadrangulis continetur; estque parallelepipedum aut trapezium.

9. Pa-

9. Parallelepipedum est cuius opposita plana sunt parallelogramma. 24. *p.* 11. *Itaque*

1. *Bisecatur plano per diagonios oppositorum laterum.* 28. p. 11.

Et

2. *Si bisecatur duobus planis bisecantibus opposita latera communis bisectio & diagonius, inter se bisecantur.* 39. p. 11.

10. Si tres rectæ sunt proportionales, parallelepipedum mediæ æquatur æquangulo parallelepipedo omnium. *e.* 36. *p.* 11.

11 Parallelepipeda rectangula octo complent locum solidum.

12. Figuratus parallelepipedi rectanguli appellatur solidus, factus à tribus numeris. 17. *d.* 11. *Itaque*

1. *Si duo solidi sunt similes, habent proportionalia latera & duos medios proportionales.* 21. d. 7. 19. 21. p. 8.

LIBER VIGESIMVS QVARTVS.

De Cubo.

1. PArallelepipedum rectangulum est cubus aut oblongum.

2. Cubus est rectangulum isoedrum. 25. *d.* 11. *Itaque*

1. *Cubi latera sunt duodecim, anguli plani vigintiquatuor, solidi octo.*

Itaque

2. *Si sex quadrata æqualia solidis angulis componantur, comprehendent cubum.* *Et*

3. *Si è quadrati angulis perpendiculares lateribus æquales sublimè connectantur, comprehendent cubum.* c. 15. p. 11.

3. Diagonius cubi potest triplum lareris.

4. Si quatuor rectarum continuè proportionalium prima sit dimidia quartæ, cubus primæ erit dimidius ad cubum secundæ. *e.* 33. *p.* 11.

5. Solibus cubi etiam cubus dicitur, solidus nempe æqualium laterum. 19. *d.* 7. *Itaque*

Fit à numero in suum quadratum multiplicato.

6. Si recta secetur in duo segmenta, cubus totius æquabitur cubis segmentorum & duplici solido ter comprehenso à quadrato sui segmenti & reliquo segmento. *Itaque*

Latus primi cubi singularis est alterum latus secundi solidi, eiusdemque lateris quadratus est alterum latus primi solidi, cuius reliquum latus est latus secundi cubi, eiusdemque reliqui lateris quadratus est reliquum latus secundi solidi.

LIBER VIGESIMVS QVINTVS.

De Polyedris mistis ordinatis.

1. Polyedrum mistum ordinatum est pyramidatum compositum è pyramidibus vertice coëuntibus in centro, & sola basi ordinata eminentibus.
2. Altitudo componentis pyramidis habetur per radium circuli basi circumscripti, perque polyedri semidiagonium.
3. Mistum ordinatum est triangulæ basis aut quinquangulæ.
4. Si quadratus è latere triangulæ basis trifariam diuidatur, latus trientis erit radius circuli basi circumscripti.
5. Mistum ordinatum triangulæ basis est octaedrum aut icosaedrum.
6. Octaedrum est polyedrum mistum ordinatum, quod ab octo triangulis comprehenditur. 27.*d*.11.

Itaque

1. *Octaedri latera sunt* 12. *anguli plani* 24. *solidi* 6. *Et*
2. *Octaedra nouem complent locum solidum.* *Et*
3. *Si triangula octo æquilatera & æqualia solidis angulis componantur, comprehendent octaedrum.*

7. Si recta è centro quadrati vtrimque perpendicularis æqualis semidiagonio connectatur cum angulis, comprehendet octaedrum. 14. *p*. 13. *Itaque*

1. *Diagonius octaedri potest duplum lateris.* *Et*
2. *Si quadratum à latere octaedri duplicetur, duplicati latus erit diagonius.*

8. Icosaedrum est polyedrum mistum ordinatum à viginti triangulis comprehensum. 29.*d*.11. *Itaque*

1. *Icosaedri latera sunt* 30. *anguli plani* 60. *solidi*, 12. *Et*
2. *Si viginti triangula ordinata & æqualia solidis angulis componantur, comprehendent icosaedrum.*

9. Si ordinata quinquangulum duplex & decangulum vnum eidem circulo sic inscribantur, vt latus vtriusque quinquanguli subtendat duo latera decanguli, sex rectæ circulo perpendiculares & radio eius æquales quinque ab angulis alterius quinquanguli connexæ & inter se, & cum angulis reliqui quinquanguli, sexta à centro vtrinque continuata latere decanguli, & connexa illic cum quinque perpendicularibus, hic cum angulis secundi quinquanguli, comprehendent icosaedrum. *e*.16.*p*.13.

10. Diagonius, icosaedri est irrationalis ad latus. 16.p.13.

Et

11. Potest quintuplum circularis radij. *è consect.* 16.p.13.
12. Polyedrum mistum ordinatum quinquangulæ basis est, quod à duodecim quinquangulis comprehenditur, & dodecaedrum dicitur. *Itaque*

1. *Dodecaedri latera sunt 30. anguli plani 60. solidi 20. Et*
2. *Si duodecim quinquangula ordinata æqualia solidis angulis componantur, comprehendent dodecaedrum.*

13. Sicubi latera rectis rectè bisecentur, ternaque bisegmenta bisecantium in conterminis planis neque concurrentium neque parallelarum, duo vnius tertium reliquæ vicinum proportionaliter ita secentur, vt minora segmenta bisecantem terminent, ternæ extra cubum dictis planis perpendiculares à proportionalium sectionum punctis, æquales majoribus segmentis connexæ duæ ex eadem bisecante inter se & cum vicinis cubi angulis, tertia cum angulis eisdem comprehendent dodecaedrum. 17.p.13.
14. Diagonius est irrationalis ad latus dodecaedri.
15. Si latus cubi secetur proportionaliter, maius segmentum erit latus dodecaedri *cons.* 17.p.13.
16. Solida plana tantum quinque sunt ordinata. *e.* 18.p.13.

LIBER VIGESIMVS SEXTVS.

De Sphæra.

1. Solidum gibbum est quod comprehenditur à superficie gibba.
2. Estque sphæra aut varium.
3. Sphæra est gibbum rotundum. *Itaque*

Sphæra fit conuersione semicirculi manente diametro. 14. d. 11.

4. Maximus sphæræ circulus est, qui sphæram bisecat.

Itaque

1. *Circulus propior maximo maior est remotiore. Et*
2. *Æquidistantes à maximo sunt æquales.*

5. Planus è diametro & sextante sphærici est, sphæra.

Itaque

1. *Vt 21. ad 11. sic cubus diametri ad sphæram. Et*
2. *Planus è radio & sextante sphærici est hemisphærium.*

6. Sphæræ habent triplicatam rationem diametrorum. 18.p.12.
7. Quinque corpora ordinata inscribuntur eidem sphæræ conueo

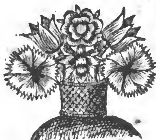
3. *Reciproci basi atque altitudine sunt aequales.* 15. p. 12.

4. *Si cylindrus secatur plano basibus oppositis parallelo, segmenta sunt ut axes.* 13. p. 12.

8. Sector sphaerae est segmentum sphaerae, quod foris à sphaerico, intus à conico in centrum terminato comprehenditur, maior concauo, minor conuexo.

9. Planus è diametro & sextante maioris vel minoris sphaerici est sector maior vel minor.

0. Si maior sector augeatur intermedio cono, totus erit maior sectio: si minor minuatur, reliquus erit minor sectio.



ARCHIMEDIS

DE SPHÆRA ET CYLINDRO.

LIBER PRIMVS.

Ad Dositheum.



NTEA quidem ad te misi quædam à nobis animaduersa, quorum scripsimus demonstrationes, veluti quod omnis portio comprehensa sub recta linea & rectanguli coni sectione, sesquitertia est trianguli habẽtis eandẽ basim ac portio, eandẽque altitudnẽ: nũc quorumdã occurentium theorematum fecimus demonstrationes, cuiusmodi sunt hæc: Primum quidem, quod superficies sphæræ quadrupla sit maximi circuli eorum qui in ipsa sunt. Secundũ verò, quod cuiuscumque portionalis sphæræ superficiei æqualis fuerit circulus, cuius radius par sit rectæ lineæ ductæ à vertice in superficiem circuli, qui basis sit ipsius portionis. Ad hæc, quod omnis sphæræ cylindrus sesquialter sit, qui basim quidem habet maximo qui sit in sphæra circulo, altitudinem verò æqualem diametro sphæræ. Superficies verò ipsius cylindri sesquialtera superficiei sphęrę. Hęc quidem demonstrata naturâ præcesserant circa dictas figuras, non tamen fuerant ab his qui ante nos circa Geometriam versati erant, animaduersa, quia harum figurarum nondum fuerat exculta scientia; & qui contulerit ista cum antiquis, nondum ea reperiet considerata. Quanquam demonstrata plurima fuerint eorum quæ ab Eudoxo circa solida contemplata sunt: veluti, quod omnis pyramis tertia pars sit prismatis basim habentis eandem cum pyramide, paremque altitudinem. Et quod omnis conus tertia pars sit cylindri basim eandem habentis cum cono, & eandem altitudinem. Hæc enim naturâ præexistentia in his figuris, non vni dumtataxat, sed multis qui ab Eudoxo extiterunt, præstantibus Geometris, nouisse contigit. Licebit verò iis qui potuerint, eadem diligentiùs scrutari. Tum debemus Conone viuente ipsa emittere in vulgus. Hunc enim accepimus talia potissimum deprehendere, & ipsis accommodatam proferre demonstrationem. Ar-

bitrati itaque rectè se habere, si hæc inuenta impertitus fuerim iis, qui colunt Mathemata, mittimus tibi quas scripsimus demonstrationes, quasque licebit omnibus qui in Mathematicis versantur, perpendere. Vale. *Scribuntur autem primùm axiomata & hypotheses quæ conueniunt sequentibus demonstrationibus.*

DEFINITIONES.

1. SI fuerint aliquot in plano curuæ lineæ determinatæ, quarum extrema iungant rectæ lineæ, aut sunt totæ in easdem partes, aut nihil habent in alias.

2. Voco autem lineam cauam in easdem partes: in qua duobus quibuslibet assumptis punctis, quæ sunt rectæ inter assumpta puncta, vel omnes in easdem partes lineæ puncta iungentis cadunt, aut aliquæ quidem in easdem partes, quędam secus rectam lineam iungentem puncta, nullæ verò in alias partes.

3. Similiter etiam superficies quędam sunt terminatæ, non quidem plano, sed terminos habent in plano. Et plani in quo terminos habēt, aut tota vergūt in easdē partes, aut nihil habēt in alteras.

4. In easdem verò partes cauas superficies voco, in quibus si duo sumantur puncta: rectæ lineæ inter puncta mediæ, aut omnes cadunt in easdem partes superficiei, aut, quædam in easdem partes, quædam verò secus eandem partem: nulla verò in partes contrarias.

5. Frustum solidum appello figuram, quæ vbi sphæram Conus secuerit habens verticem in centro sphærę, comprehendetur tam à superficie coni intra sphæram demersa, quàm à superficie sphæræ intra conum contenta.

6. Rhombum verò solidum appello figuram ex duobus conis isoscelibus deformatam, quando habuerint ambo eandem basim, conuersos verò vertices in contrarias partes plani basis; ita vt eorum tres iaceant in rectam lineam.

7. Sphærarum portiones similes sunt quæ ex similibus circulorum portionibus nascuntur. *Assumo autem ista.*

Hypotheses.

1. Omnium linearum eadem puncta seu terminos habentium minimam esse rectam.

2. Aliarum verò linearum in plano existentium si iisdem terminentur punctis, easdem esse inæquales.

Lemma I.

Inter duas inæquales quantitates media proportionalis neutri æqualis est: Et ratio primæ ad tertiam vt dupla, maior est ratione primæ ad secundam vt simplici.

Lemma II.

Sub circulo figura multorum laterum & æqualium, vel conscripta vel inscripta fuerit: possibile est alij circulo aliam figuram vel conscribere, vel inscribere, parium numero laterum, & præcedenti similem.

Probl. IV. *Prop.* V.

Dato circulo, duabusque magnitudinibus inæqualibus, polygonum conscribere circulo, eidemque aliud inscribere, ita vt conscriptum habeat ad inscriptum minorem rationem, quàm maior magnitudo ad minorem.

Manifestum I.

Similiter ostendemus, quod duabus magnitudinibus inæqualibus datis & sectore, possibile est circa sectorem, multangularem figuram conscribere, & aliam similem eidem inscribere, ita vt conscripta ad inscriptam minorem habeat rationem, quàm maior magnitudo ad minorem.

Manifestum II.

Manifestum & illud est, quod si detur circulus vel sector, & aliquod spatium: possibile sit inscriptas haberi, & conscriptas figuras circulo, vel sectori æquilateras, tum reliquis partibus semper alias, donec segmenta supersint circuli vel sectoris, quæ sint minora subiecto plano. Hæc enim in elementis tradita sunt. *Fortè quia deduci potest ex* 1. *decimi Euclidis.*

Lemma.

In data ellipsi figuram describere similem alij in alia ellipsi descriptæ: hoc est, quæ ad suam ellipsim eandem habeat rationem quàm prima ad suam ellipsim.

Probl. V. *Prop.* VI.

Demonstrandum est, quod dato circulo vel sectore & plano: possibile sit circulo vel sectori conscribere figuram, ita vt circumsepta à circumscripta & circulo segmenta, minora sint plano dato.

Theorema II. *Prop.* VII.

✠ Si in cono isoscele pyramis inscribatur, æquilateram habens basim: superficies ipsius sine base, æqualis est triangulo basim quidem habenti æqualem ambitui basis, altitudinem verò perpendiculari demissæ à vertice in vnum ex lateribns basis.

Theor. III. *Prop.* VIII.

✠ Si circa conum isoscelem pyramis conscribatur: superficies pyramidis sine base, æqualis est trigono, basim quidem habenti æqualem ambitui basis, altitudinem verò lateri coni.

Theor. IV. *Prop.* IX.

Si in coni cuiusdam isoscelis circulum, qui coni sit basis, ceciderit linea recta, à cuius extremitatibus protrahantur lineæ rectæ ad verticem coni: triangulus definitus & ab incidente & à lineis actis ad verticem, minor est superficie coni, quæ est à vertice intra protractas.

Theor. V. *Prop.* X.

Si ducantur tangentes circulum qui sit basis coni, & quidem in eodem quo circulus plano existant, & in se mutuò incidant, à punctis verò contactuum, & mutuæ intersectionis ad coni verticem lineæ protrahantur: comprehensa triangula à tangentibus & lineis ad verticem coni protractis, maiora sunt superficie conica inter ipsa comprehensa.

Theor. VI. Prop. XI.

Si in superficie recti cylindri duæ rectæ lineæ fuerint: superficies cylindri inter duas rectas, maior est parallelogrammo comprehenso duabus rectis lineis in superficie cylindri ductis, & lineis earum extrema iungentibus.

Lemma.

In duobus circulis æqualibus si duæ lineæ agantur æquales, diametris minores, à quarum extremis punctis lineæ ducantur tangentes circulos, ab eodem latere concurrent, & erunt tangentes vnius circuli æquales tangentibus alterius. Ab extremitatibus verò diametri non possunt duci tangentes quæ concurrent.

Theor. VII. *Prop.* XII.

Si in superficie cuiusdam cylindri recti capiantur duæ lineæ rectæ, à quarum extremis punctis educantur lineæ tangentes circulos qui bases sunt cylindri, existantque in eodem cum circulo plano, & simul concurrant: parallelogramma comprehensa sub tangentibus & cylindri lateribus, maiora sunt cylindrica superficie, quæ est inter rectas ductas in superficie cylindri.

Manifestum III.

✠ His ergo demonstratis, ex dictis patet, quod si in isoscele cono pyramis inscribatur, superficies pyramidis sine base minor erit conica superficie.

Manifeſtum IV.

✠ Et quod ſi circa conum iſoſcelem pyramis conſcribatur; ſuperficies pyramidis ſine baſe maior eſt ſuperficie coni ſine baſe quæ illi contermina eſt.

Manifeſtum V.

✠ Ex iiſdem demonſtratis manifeſtum, quod ſi in recto cylindro priſma inſcribatur, ſuperficies priſmatis ex parallelogrammis compoſita, minor eſt ſuperficie cylindri ſine baſe.

Manifeſtum VI.

✠ Etiam, ſi circa rectum cylindrum priſma conſcribatur, ſuperficies priſmatis quæ conſtat parallelogrammis, maior eſt cylindrica ſuperficie ſine baſe.

Theor. VIII. *Prop.* XIII.

✠ Omnis cylindri recti ſuperficies ſine baſe, æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro, media proportionalis eſt inter latus & diametrum baſis cylindri.

Theor. IX. *Prop.* XIV.

✠ Omnis coni iſoſcelis ſuperficies ſine baſi, æqualis eſt circulo, cuius radius medius eſt proportionalis inter latus coni & radium circuli, qui eſt coni baſis.

Theor. X. *Prop.* XV.

✠ Cuiuſcumque coni iſoſcelis ſuperficies ad baſim, eam habet rationem, quam latus coni ad radium circuli qui baſis eſt coni.

Lemma I.

Si duæ rectæ prima & ſecunda ſecentur: rectangulum comprehenſum ſub vtraque, æquale erit tribus rectangulis, primo ſub prima parte primæ, & prima parte ſecundæ: ſecundo ſub ſecunda parte primæ, & eadem prima ſecundæ: tertio ſub ſecunda parte primæ & tota ſecunda.

Lemma II.

Si conus iſoſceles plano ſecatur baſi parallelo, interſectione fit circulus.

Lemma III.

Circulum ex circulo auferre vt remaneat circulus.

Theor. XI. *Prop.* XVI.

Si conus iſoſceles plano ſecat[illegible] baſi parallelo: ſuperficiei coni mediæ inter plana parallela, æqualis eſt circulus, cuius radius medius eſt proportionalis inter partem lateris coni comprehenſam parallelis planis, & lineam æqualem radiis duorum circulorum qui habentur in planis parallelis.

Lemma I.

Coni æqualem habentes altitudinem, eam inter se rationem habent, quam bases.

Lemma I.

Coni verò habentes æquales bases, eam inter se rationem habent quam altitudines.

Lemma III.

Si cylindrus plano secatur parallelo ad basim: cylindrus est ad cylindrum, vt axis ad axem.

Lemma IV.

Coni qui easdem bases habent, & altitudines, cum cylindris, in eadem sunt ratione quàm cylindri.

Lemma V.

Et æqualium conorum reciprocæ sunt bases altitudinibus: Atquè quorum reciprocæ fuerint bases altitudinibus, ipsi æquales sunt.

Lemma VI.

✠ Et coni quorum diametri basium eandem rationem habent, quam axes, seu quam altitudines: se habent in triplicata ratione dimetientium quæ in basibus. *Quæ omnia apud Euclidem lib.* 12. *Elementorum habentur.*

Theor. XII. *Prop.* XVII.

✠ Si fuerint duo coni isosceles, & fuerit alterius superficies æqualis basi alterius, linea verò à centro basis educta perpendiculariter in latus coni, altitudinis extiterit æqualis: coni erunt æquales.

Theor. XIII. *Prop.* XVIII.

✠ Cuilibet rhombo ex isoscelibus conis composito, æqualis est conus, qui basim habeat æqualem superficiei alterius coni eorum qui rhombum componunt: altitudinem verò æqualem perpendiculari à vertice alterius coni, in vnum latus primi illius deducto.

Theor. XIV. *Prop.* XIX.

Si conus æquicrurius plano æquidistanti basi secetur; tum à circulo facto conus contrascribatur, verticem habens centrum basis, factusque rhombus auferatur à toto cono: residuo æqualis est conus qui basim habeat æqualem superficiei coni mediæ inter parallela plana: altitudinem verò æqualem perpendiculari ductæ à centro basis in vnum latus.

Lemma problematicum.

Duorum conorum inuersim sumptorum in trunco coni secto plano parallelo basi, eandemque habentium cum trunco altitudinem, differentiam notare.

Theor. XV. *Prop.* XX.

Si rhombi ex æquicruriis conis compositi alter conus plano secetur parallelo basi: à circulo verò tum facto conus deorsum describatur verticem habens eundem quàm alter conus: à toto verò rhombo diuellatur factus rhombus: residuo æqualis erit conus habens basim æqualem superficiei coni, mediæ inter parallela plana: altitudinem verò parem perpendiculari à vertice huius coni in illius coni latus demissæ.

Lemma I.

Binæ quælibet rectæ lineæ circulo descriptæ, quarum extrema distant æqualibus arcubus, sunt inter se parallelæ.

Lemma II.

Si à puncto in circumferentia circuli capiantur duo arcus æquales, quorum extrema iungantur recta linea: diameter à puncto sumpto ducta per centrum circuli, hanc lineam iungentem arcuum extrema bifariam diuidet, & ad angulos rectos.

Theor. XVI. *Prop.* XXI.

Si circulo multangularis, parilatera, & æquilatera figura inscribatur: atque aganturrectæ iungentes latera figuræ, ita vt parallelæ sint vni ex his quæ duobus figuræ lateribus subtenduntur: omnes iungentes ad circuli diametrum eam habent rationem, quam altera subtendens dimidium vnius ex minimis habet ad multangularis figuræ latus.

Theor. XVII. *Prop.* XXII.

Si in sectione circuli polygonum inscribatur, latera habens sine base æqualia, & numero pari: agantur verò rectæ parallelæ basi, coniungentes figuræ latera: omnes hæ ductæ lineæ cum dimidio basis ad altitudinem sectionis, eandem rationem habebunt quam habet recta linea ducta ab extremitate diametri in figuræ latus, ad ipsum figuræ latus. *Vide longum corollarium Archimedis.*

Theor. XVIII. *Prop.* XXIII.

Inscriptæ in sphęra figurę superficies ęqualis est circulo, cuius radius potest rectangulum comprehensum sub latere figuræ & lineæ æquali omnibus iungentibus latera figuræ, ita vt fiant quadrilatera in ipsa, existentibusque parallelis rectæ lineæ duo latera figuræ subtendenti.

Theor. XIX. *Prop.* XXIV.

✠ Figuræ in sphæra inscriptæ superficies comprehensa sub conicis superficiebus, minor est quàm quadrupla maximi circuli eorum qui sunt in sphæra.

Theor. XX. *Prop.* XXV.

✠ Inſcriptæ in ſphæra figuræ comprehenſæ ſub conicis ſuperficiebus, æqualis eſt conus qui baſim quidem habeat circulum æqualem ſuperficiei figuræ inſcriptæ in ſphæra: altitudinem verò æqualem lineæ à centro ſphæræ in vnum ex lateribus figuræ planæ perpendiculariter eductæ.

Theor. XXI. *Prop.* XXVI.

✠ Inſcripta ſphæræ figura ſolida, comprehenſa ſub ſuperficiebus conicis, minor eſt quàm quadrupla coni, qui baſim quidem habeat æqualem maximo circulo eorum qui ſunt in ſphæra: altitudinem verò æqualem radio ſphæræ.

Lemma.

Figuræ æquilateræ & æquiangulæ circulo conſcriptæ, circulum conſcribere eodem cum primo centro. *Vide corollarium Archimedis.*

Theor. XXII. *Prop.* XXVII.

✠ Superficiei conſcriptæ ſolidæ figuræ circa ſphæram, æqualis eſt circulus, cuius linea ducta à centro poteſt æquale comprehenſo ſub vno latere figuræ, exiſtentibus parallelis alicui earum quę duo latera figuræ ſubtendunt.

Theor. XXIII. *Prop.* XXVIII.

✠ Solidę figurę conſcriptæ circa ſphæram, ſuperficies maior eſt quàm quadrupla maximi circuli eorum qui in ſphęra.

Lemma.

Si duo circuli idem centrum habuerint, & aliqua linea ducta ſit ab extremitate diametri maioris tangens minorem circulum, maioremque ſecans: linea ducta ab altero extremo huius lineæ ſecantis ad alterum diametri maioris circuli extremum, æqualis eſt diametro minoris circuli.

Manifeſtum VII.

Circumſcriptę figurę ſolidę circa minorem ſphæram æqualis eſt conus, qui baſim quidem habeat circulum æqualem ſuperficiei ſolidæ figuræ, altitudinem verò æqualem radio ſphærę.

Manifeſtum VIII.

Figura ſolida circumſcripta circa minorem ſphęram, maior eſt quadruplo coni baſim quidem habentis maximum circulum eorum qui in ſphæra, altitudinem verò radium ſphæræ.

Lemma I.

Propoſitarum quatuor magnitudinum ſi prima fuerit ad tertiam, vt ſecunda ad quartam: media proportionalis inter primam & ſecundam erit ad mediam proportionalem inter tertiam & quartam,

vt est prima ad tertiam, vel secunda ad quartam.

Lemma II.

Duarum figurarum similium, quarum altera conscribitur, altera inscribitur eidem circulo, vel circuli portioni, lineæ latera iungentes eam habent inter se rationem quàm figurarum latera.

Theor. XXIV. *Prop.* XXIX.

Si fuerit in sphæra figura solida inscripta, & alia circumscripta sub similibus figuris planis eodem quo suprà modo reuolutis: superficies circumscriptæ figuræ solidæ ad inscriptæ superficiem, duplicatam rationem habet, scilicet quam latus circumscriptæ figuræ planæ circa maximum circulum ad latus inscriptæ planæ figuræ in eodem circulo. Ipsa verò solida figura quæ circumscribitur ad figuram solidam quæ inscribitur, triplam rationem habet eiusdem rationis.

Theor. XXV. *Prop.* XXX.

✠ Cuiuscumque sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui sunt in ipsa. *Hinc constat, datæ sphæræ superficiei dari circulum æqualem.*

Lemma Problematicum I.

Inter duas datas magnitudines inæquales, duas alias reperire continuè proportionales in ratione Arithmetica.

Lemma II.

Inter duas datas magnitudines quantitatem reperire ad quam datarum prima minorem rationem habeat, quàm sit ea quæ triplicata producit eam rationem quam prima datarum habet ad secundam.

Theor. XXVI. *Prop.* XXXI.

Omnis sphæra quadrupla est coni basim quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in sphæra, altitudinem verò radium sphæræ.

Manifestum IX.

Manifestum quod omnis cylindrus basim quidem habens maximum circulum eorum qui sint in sphæra, altitudinem verò æqualem diametro sphæræ, sesquialter est sphæræ. Et superficies ipsius cum basibus etiam sesquialtera est superficiei sphæræ.

Lemma.

Si sit in sphæra circulus, per cuius diametrum planum agatur perpendiculare ad ipsum circulum, secat hoc planum sphæram in æqualia, & maximum sphæræ circulum offert.

Theor. XXVII. *Prop.* XXXII.

Superficies inscriptæ figuræ solidæ in portione sphæræ, æqualis est circulo, cuius radius potest æquale comprehenso rectangulo sub

vno latere inſcriptæ planæ figuræ in portione maximi circuli, & linea æquali omnibus parallelis baſi portionis cum ſemiſſe diametri baſis.

Lemma.

Per punctum axis ſphæræ agere planum perpendiculare ad axem, quod ſphæram dirimat in duo ſegmenta. *Videatur poriſma, ſeu coroll. Archim.*

Theor. XXVIII. *Prop.* XXXIII.

Superficies inſcriptæ figuræ in portione ſphæræ minor eſt circulo, cuius radius eſt æqualis lineæ eductæ à vertice portionis in circumferentiam circuli qui baſis eſt portionis.

Theor. XXIX. *Prop.* XXXIV.

Figura ſolida inſcripta in portione ſub conicis ſuperficiebus contenta, vnà cum cono, baſim quidem eandem habenti quam figura, verticem verò centrum ſphæræ, æquale eſt cono baſim habenti æqualem ſuperficiei figuræ, altitudinem verò perpendiculari ductæ à centro ſphæræ in vnum ex figuræ lateribus. *Quod intellige de portione ſphæræ hemicyclio minori.*

Lemma I.

Figura ſolida in ſphæræ portione hemiſphærio æquali inſcripta, conicisque ſuperficiebus contenta, æqualis eſt cono baſim habenti æqualem ſuperficiei figuræ: altitudinem verò æqualem perpendiculari excidenti à centro ſphæræ, & baſis portionis in figuræ planæ latus.

Lemma II.

Figura item ſolida in ſphæræ portione hemiſphærio maiore deſcripta, & enata ex reuolutione planæ ęquilateræque figuræ, ac laterum quaternario dimenſorum, demũ ita in portione circuli ſphæræ maximi deſcriptę, vt diameter circuli coniungat duos figurę ipſius planæ angulos, ęqualis eſt duobus conis, quorum primus habeat baſim parem ſuperficiei ipſius ſolidę figuræ, altitudinem verò æqualem perpendiculari ductæ à centro baſis in figuræ planæ latus: ſecundus verò qui baſim habeat baſim portionis, verticem verò in centro ſphæræ.

Lemma III.

Figura ſolida in ſphærę portione hemiſphærio maiore deſcripta conica ſimul ac cylindrica ſuperficiebus contenta, æqualis eſt ſeptuplo coni qui baſim habeat eandem quam figura, verticem vero centrum ſphæræ.

Lemma IV.

Figura solida in sphæræ portione hemispæhrio maiore descripta, & nata ex reuolutione figuræ planæ in circuli sphæræ maximi portione, ita inscripta vt diameter sphæræ vel circuli maximi incidat in latera opposita ad angulos obliquos, æqualis est tum cono qui basim habeat parem superficiei figuræ, & altitudinem æqualem perpendiculari à centro sphæræ demissæ in planæ figur latus, tum alij cono qui basim habeat basim figuræ solidæ, verticem verò centrum sphæræ: si tamen demeris differentiam coni ad basim trunci qui fit prope centrum à cono ad verticem, qui fit super circulo tanquam basi, cuius est diameter pars diametri sphæræ. *Videatur corell. Archim.*

Manifestum X.

Et patet quod superficies descriptæ figuræ solidæ circa segmentum ęqualis est circulo, cuius radius potest rectangulum comprehensum sub vno latere figuræ planę, & omnibus iungentibus angulos figurę planę, & adhuc dimidia basе ductæ planę figurę. Inscripta solida figura inscripta est in portione maioris sphęræ. Hoc verò manifestum per hoc quod priùs scriptum est.

Theor. XXX. *Prop.* XXXV.

Figurę solidę circa sphæræ portionem conscriptæ superficies maior est circulo, cuius radius æqualis est lineæ ductę à vertice portionis in circumferentiam circuli, qui basis est portionis.

The. XXXI. *Prop.* XXXVI.

Fit verò & circumscripta solida figura circa portionem cum cono, cuius basis est circulus circa diametrum; vertex verò centrum æqualis est cono, cuius basis quidem ęqualis est superficiei figurę, altitudo verò lineæ à centro in latus perpendiculari ductæ, quæ vtique ęqualis est radio sphæræ. *Videantur duo corollaria; & manifestum* II. *quod ita concludit.*

Manifestum XI.

Circumscriptæ figurę solidæ superficies ad inscriptę solidę figurę superficiem duplicatam rationem habet quam latus circumscriptæ figuræ planę habet ad latus inscriptæ figuræ planæ. At verò figura solida cum cono, triplicatam hab et eiusdem rationem.

Th. XXXI. *Prop.* XXXVI.

Cuiuscumque portionis sphæræ minoris semicirculo superficies ęqualis est circulo, cuius radius æqualis est lineæ à vertice portionis in peripheriam ductæ circuli, qui basis est portionis sphæræ.

Th. XXXII. *Prop.* XXXVII.

O

+ Et si maior fuerit hemisphærio portio, similiter ipsius superficies æqualis est circulo, cuius radius æqualis est lineę ductæ à vertice ad circumferentiam circuli, qui basis est portionis.

Th. XXXIII. *Prop.* XXXVII.

Omni segmento sphærę æqualis est conus qui basim quidem habeat æqualem superficiei segmenti sphæræ, quæ sectioni respondet, altitudinem verò æqualem radio sphærę.



ARCHIMEDIS
DE SPHÆRA
ET CYLINDRO.

LIBER SECVNDVS.

Dositheo S.



NTEA quidem mandasti mihi, scriberem eorũ problematũ demõstrationes, quæ prius ipse proposuerã Cononi. Accidit verò eorũ plurima scribi inter theoremata, quorum prius ad te misi demonstrationes: sicuti quod prop. 30. 36. 37. manifesto 9. & 38. prop. libri præcedentis demonstratum est. Quotquot enim horum theorematum & problematum inter illa scribuntur, in hoc libro exscripta ad te misi. Quæcumque verò inueniuntur alia, contemplationem puta de helicibus, & de conoidibus, enitar breui mittere. Primum autem problematum erat eiusmodi, sphærę datæ planum spatium inuenire æquale superficiei sphæræ. Est verò hoc manifestum & demonstratum ex dictis theorematibus, præsertim verò ex 30. propositione.

Problema I. *Propositio* I.

Secundum erat. Dato cono vel cylindro, sphæram inuenire cono vel cylindro æqualem.

Lemma I.

Lineam conchoidem describere.

Lemma II.

Linea conchoidis vndequaque verticis accedit ad lineam normalem,(modò ex perpendicularibus distantia perpendatur) quò magis recedit à vertice.

Lemma III.

Inter conchoidem & normalem non potest duci linea quin secet conchoidem.

Lemma IV. *Probl.*

Angulo dato & puncto, extra lineas angulum datum concipientes,; ducere à puncto dato lineam, cuius pars à lineis angulum datum concipientibus intercepta æqualis sit alicui datæ lineæ.

Lemma V.

Si primum fuerit ad secundum vt tertium ad quartum, erit primum ad dimidium secundi, vt duplum tertij ad quartum.

Lemma VI.

Inter duas datas lineas inæquales duas medias proportionales inuenire.

Lemma VII.

Si diametri duo sumantur ad normam in dato circulo,& vtrimque alterutrius recesentur duo arcus æquales,à quibus duæ perpendiculares excitentur ad alteram diametrorum, à cuius deinde extremitate ad arcum exteriorem ducatur linea : hæc linea ita diuidit proximam ex perpendicularibus, vt inter partem constituentem angulum rectum cum diametro, & partem maiorem diametri, relinquantur mediæ proportionales secta hæc perpendicularis & reliqua diametri pars. *Qui modus complectitur picturam lineæ ciss.ideæ, seu hederaceæ Dioclis.*

Lemma VIII. *Probl.*

Inter duas datas inuenire duas medias proportionales, mediante linea cissoide.

Lemma IX.

Modum Spori exponere.

Lemma X.

Si quatuor lineæ continuè proportionales decussatim, & ad angulos rectos constituantur, ita vt prima & quarta angulum simul, tum secunda & tertia alium simul angulum componant, perficiaturque ex secunda & tertia rectangulum, descriptæ parabolæ seu rectanguli coni sectiones diametris quidem secunda & tertia, rectis verò iuxta quas possunt ordinatim applicatę prima & quarta sese secabunt

in angulo rectanguli constituti sub secunda & tertia. *Vnde modus Menechmi qui fit corporum sectione explicatur. Sed & vnius solius parabolæ beneficio Mathematicus nobilissimus idem inuenit.*

Lemma XI. P*robl.*

Duas medias proportionales inter duas datas ex modo Menechmi inuenire. *Sed & anguli trisectionem, & alia plurima non inuenta hactenus, is qui suprà, parabolæ beneficio reperit.*

Theor. I. P*rop.* II.

✠ Omni portioni sphæræ æqualis est conus qui basim quidē habeat eandem ac portio, altitudinem verò lineam rectam quæ ad altitudinem portionis in ea sit ratione, qua composita ex radio sphæræ, & ex altitudine reliquę portionis ad ipsam altitudinem reliquæ portionis.

P*robl.* II. P*rop.* III.

Datam sphæram plano secare, ita vt superficies segmentorum rationem inter se inuicem habeant eandem quam sit alia data.

Lemma I.

Si fuerint quatuor rectæ lineæ continuè proportionales, est quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, vt prima ad tertiam, vel quadratum primæ ad quadratum secundæ, vt secunda ad quartam.

Lemma II.

Si inter duas quantitates eiusdem speciei, aliquæ aliæ homogenæ ponantur: ratio extremarum componitur ex rationibus intermediarum.

P*robl.* III. P*rop.* IV.

Datam sphæram secare, ita vt segmenta sphęræ inter se rationem habeant eandem quam quæ data sit.

Lemma I.

Duabus datis rectis lineis in ratione dupla, & terminis alicuius rationis: diuidere minorem illarum in ratione data; aut efficere vt sicut sunt duo termini simul rationis datæ ad consequentem, ita fiat minor ad inuentam; tum ita secare compositam ex vtraque, vt quadratum maioris sit ad quadratum partis, vt est reliqua pars ad inuentam.

Lemma II.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus & rectilineo proposito, ita secare maiorem, vt quemadmodum fuerit altera partium resectæ ad minorem lineam, ita sit spatium propositum rectilineum ad quadratum alterius portionis sectæ lineæ. *Huc Eutocij modus pertinet.*

Lemma III.

Propoſita linea, eaque ſecta, ita vt partes ſint in ratione dupla: parallelepipedum conſtructum baſe quadrato maioris partis, & altitudine minori portione, maximum eſt omnium quæ pariter confici poſſunt ex alia quacumque ſectione eiuſdem lineæ. *Vide confectionem probl. Archimedei: nempe quomodo ſphæra data ita ſecetur, vt ipſius ſegmenta rationem datam habeant.*

Lemma IV.

Si fuerint duo ſphærarum ſegmenta ſimilia, coni recti huiuſmodi ſegmentis æquales, inter ſe quoque ſunt ſimiles.

Probl. IV. *Prop.* V.

Dato ſegmento ſphæræ, ſimile & alij dato æquale idem ipſum conſtituere.

Probl. V. *Prop.* VI.

Datis duobus ſphæræ ſegmentis, ſiue eiuſdem, ſiue non, inuenire ſegmentum ſphæræ, quod ſit alteri datorum ſimile, ſuperficiem verò habeat æqualem ſuperficiei ſegmenti alterius.

Probl. VI. *Prop.* VII.

A data ſphæra ſegmentum plano ſecare, ita vt ſegmentum ad conum baſim habentem eandem cum ſegmento, & æqualem altitudinem, datam rationem habeat.

Lemma I.

Si cuique duarum linearum inæqualium eadem, vel quæque duarum æqualium addatur: erit maior inæqualium ad minorem inæqualium in maiori ratione, quàm compoſita ex maiori inæquali & altera æquali ad compoſitam ex minori inæquali, & altera æquali.

Lemma II.

Trium linearum, ſi prima ad ſecundam in minori ratione eſt quàm ſecunda ad quartam; rectangulum ſub prima & tertia minus erit ſecundæ quadrato. Contra maius erit, ſi prima ad ſecundam maiorem rationem habeat quàm ſecunda ad tertiam.

Lemma III.

Si quatuor magnitudinibus propoſitis, quod fit ſub prima & quarta minus eſt eo quod fit ex ſecunda & tertia: prima ad ſecundam minorem rationem habebit quàm tertia ad quartam.

Lemma IV.

Si trium linearum primæ quadratum habeat maiorem rationem ad quadratum ſecundæ quàm ſecunda habet ad tertiam: prima habebit ad tertiam maiorem rationem quàm ſit ratio ſeſquialtera rationis

ſecundæ ad tertiam.

Lemma V.

Si linea duobus punctis inæqualiter diuiditur: rectangulum quod fit ex duabus partibus medietatis ſigno proximioribus, maius eſt eo quod fit ex inæqualioribus partibus, magiſque à medio diſſitis.

Theor. II. *Prop.* VIII.

Si ſphæra plano ſecetur non per centrum, maius ſegmentum ad minus minorem quidem rationem habet quàm ſit dupla eius quam habet maioris ſegmenti ſuperficies ad minoris ſuperficiem, maiorem verò quàm ſit ſeſquialtera eiuſdem.

Lemma I.

Si proponantur duo coni, quorum baſis primi habeat maiorem rationem ad baſim ſecundi, quam altitudo ſecundi ad altitudinem primi, primus conus eſt maior ſecundo.

Lemma II.

Lineæ datæ lineam reperire potentia ſubduplam.

Lemma III.

Si fuerint quinque lineæ continuè proportionales, vt erit prima ad quintam, ſic erit quadratum ſecundæ ad quadratum quartę.

Theorema II. *Prop.* IX.

Sphæricorum ſegmentorum ſub æquali ſuperficie contentorum maximum eſt hemiſphærium.



ARCHIMEDIS DE CIRCVLI Dimensione Liber.

Propositio I. *Theorema* I.



MNIS circulus æqualis est triangulo rectangulo, cuius radius est par vni eorum quæ sunt circa rectum angulum: circumferentia verò basi.

Prop. II. *Theor.* II.

✠ Circulus ad quadratum suæ diametri, rationem habet quam vndecim ad quatuordecim.

Lemma I.

✠ Si duæ lineares quantitates in aliquot partes diuidantur: rectangula quæ ex singulis partibus vnius fiunt per alterius segmenta, æqualia sunt toti ab integris comprehenso.

Lemma II.

✠ Si rectangulum continetur sub duabus congeneis & linearibus quantitatibus, vt se habebit mensura ad alteram ipsarum, ita se habebit quod fit ex altera, & mensura ad totum rectangulum.

Lemma III.

✠ Si fuerint quatuor quantitates proportionales, numerus qui multiplicauerit aut diuiserit primum vt faceret secundum, idem multiplicat aut diuidit tertium vt producat quartum.

Lemma IV.

Dato rectangulo eiusque altero latere, dare ignotum latus.

Lemma V.

Dati in numeris quadrati latus inuenire.

Lemma VI.

Noti quadrati latus ignotum Geometricè cognoscere.

Lemma VII.

Si quatuor magnitudinum prima ad secundam maiorem rationem habuerit quàm tertia ad quartam, sumantur autem primæ & ter-

Lemma I.

Coni æqualem habentes altitudinem, eam inter se rationem habent, quam bases.

Lemma I.

Coni verò habentes æquales bases, eam inter se rationem habent quam altitudines.

Lemma III.

Si cylindrus plano secatur parallelo ad basim: cylindrus est ad cylindrum, vt axis ad axem.

Lemma IV.

Coni qui easdem bases habent, & altitudines, cum cylindris, in eadem sunt ratione quàm cylindri.

Lemma V.

Et æqualium conorum reciprocæ sunt bases altitudinibus: Atque quorum reciprocæ fuerint bases altitudinibus, ipsi æquales sunt.

Lemma VI.

✠ Et coni quorum diametri basium eandem rationem habent, quam axes, seu quam altitudines: se habent in triplicata ratione dimetientium quæ in basibus. *Quæ omnia apud Euclidem lib.* 12. *Elementorum habentur.*

Theor. XII. *Prop.* XVII.

✠ Si fuerint duo coni isosceles, & fuerit alterius superficies æqualis basi alterius, linea verò à centro basis educta perpendiculariter in latus coni, altitudinis extiterit æqualis: coni erunt æquales.

Theor. XIII. *Prop.* XVIII.

✠ Cuilibet rhombo ex isoscelibus conis composito, æqualis est conus, qui basim habeat æqualem superficiei alterius coni eorum qui rhombum componunt: altitudinem verò æqualem perpendiculari à vertice alterius coni, in vnum latus primi illius deducto.

Theor. XIV. *Prop.* XIX.

Si conus æquicrurius plano æquidistanti basi secetur; tum à circulo facto conus contrascribatur, verticem habens centrum basis, factusque rhombus auferatur à toto cono: residuo æqualis est conus qui basim habeat æqualem superficiei coni mediæ inter parallela plana: altitudinem verò æqualem perpendiculari ductæ à centro basis in vnum latus.

Lemma problematicum.

Duorum conorum inuersim sumptorum in trunco coni secto plano parallelo basi, eandemque habentium cum trunco altitudinem, differentiam notare.

Theor. XV. *Prop.* XX.

Si rhombi ex æquicruriis conis compositi alter conus plano secetur parallelo basi : à circulo verò tum facto conus deorsum describatur verticem habens eundem quàm alter conus : à toto verò rhombo diuellatur factus rhombus : residuo æqualis erit conus habens basim æqualem superficiei coni, mediæ inter parallela plana : altitudinem verò parem perpendiculari à vertice huius coni in illius coni latus demissæ.

Lemma I.

Binæ quælibet rectæ lineæ circulo descriptæ, quarum extrema distant æqualibus arcubus, sunt inter se parallelæ.

Lemma II.

Si à puncto in circumferentia circuli capiantur duo arcus æquales, quorum extrema iungantur recta linea : diameter à puncto sumpto ducta per centrum circuli, hanc lineam iungentem arcuum extrema bifariam diuidet, & ad angulos rectos.

Theor. XVI. *Prop.* XXI.

Si circulo multangularis, parilatera, & æquilatera figura inscribatur : atque agantur rectæ iungentes latera figuræ, ita vt parallelæ sint vni ex his quæ duobus figuræ lateribus subtenduntur: omnes iungentes ad circuli diametrum eam habent rationem, quam altera subtendens dimidium vnius ex minimis habet ad multangularis figuræ latus.

Theor. XVII. *Prop.* XXII.

Si in sectione circuli polygonum inscribatur, latera habens sine base æqualia, & numero pari : agantur verò rectæ parallelæ basi, coniungentes figuræ latera : omnes hæ ductæ lineæ cum dimidio basis ad altitudinem sectionis, eandem rationem habebunt quam habet recta linea ducta ab extremitate diametri in figuræ latus, ad ipsum figuræ latus. *Vide longum corollarium Archimedis.*

Theor. XVIII. *Prop.* XXIII.

Inscriptæ in sphæra figuræ superficies æqualis est circulo, cuius radius potest rectangulum comprehensum sub latere figuræ & lineæ æquali omnibus iungentibus latera figuræ, ita vt fiant quadrilatera in ipsa, existentibusque parallelis rectæ lineæ duo latera figuræ subtendenti.

Theor. XIX. *Prop.* XXIV.

✠ Figuræ in sphæra inscriptæ superficies comprehensa sub conicis superficiebus, minor est quàm quadrupla maximi circuli eorum qui sunt in sphæra.

Theor. XX. *Prop.* XXV.

✠ Inscriptæ in sphæra figuræ comprehensæ sub conicis superficiebus, æqualis est conus qui basim quidem habeat circulum æqualem superficiei figuræ inscriptæ in sphæra: altitudinem verò æqualem lineæ à centro sphæræ in vnum ex lateribus figuræ planæ perpendiculariter eductæ.

Theor. XXI. *Prop.* XXVI.

✠ Inscripta sphæræ figura solida, comprehensa sub superficiebus conicis, minor est quàm quadrupla coni, qui basim quidem habeat æqualem maximo circulo eorum qui sunt in sphæra: altitudinem verò æqualem radio sphæræ.

Lemma.

Figuræ æquilateræ & æquiangulæ circulo conscriptæ, circulum conscribere eodem cum primo centro. *Vide corollarium Archimedis.*

Theor. XXII. *Prop.* XXVII.

✠ Superficiei conscriptæ solidæ figuræ circa sphæram, æqualis est circulus, cuius linea ducta à centro potest æquale comprehenso sub vno latere figuræ, existentibus parallelis alicui earum quę duo latera figuræ subtendunt.

Theor. XXIII. *Prop.* XXVIII.

✠ Solidę figurę conscriptæ circa sphæram, superficies maior est quàm quadrupla maximi circuli eorum qui in sphęra.

Lemma.

Si duo circuli idem centrum habuerint, & aliqua linea ducta sit ab extremitate diametri maioris tangens minorem circulum, maioremque secans: linea ducta ab altero extremo huius lineæ secantis ad alterum diametri maioris circuli extremum, æqualis est diametro minoris circuli.

Manifestum VII.

Circumscriptę figurę solidę circa minorem sphæram æqualis est conus, qui basim quidem habeat circulum æqualem superficiei solidæ figuræ, altitudinem verò æqualem radio sphærę.

Manifestum VIII.

Figura solida circumscripta circa minorem sphęram, maior est quadruplo coni basim quidem habentis maximum circulum eorum qui in sphæra, altitudinem verò radium sphæræ.

Lemma I.

Propositarum quatuor magnitudinum si prima fuerit ad tertiam, vt secunda ad quartam: media proportionalis inter primam & secundam erit ad mediam proportionalem inter tertiam & quartam,

vt est prima ad tertiam, vel secunda ad quartam.

Lemma II.

Duarum figurarum similium, quarum altera conscribitur, altera inscribitur eidem circulo, vel circuli portioni, lineæ latera iungentes eam habent inter se rationem quàm figurarum latera.

Theor. XXIV. *Prop.* XXIX.

Si fuerit in sphæra figura solida inscripta, & alia circumscripta sub similibus figuris planis eodem quo suprà modo reuolutis: superficies circumscriptæ figuræ solidæ ad inscriptæ superficiem, duplicatam rationem habet, scilicet quam latus circumscriptæ figuræ planæ circa maximum circulum ad latus inscriptæ planæ figuræ in eodem circulo. Ipsa verò solida figura quæ circumscribitur ad figuram solidam quæ inscribitur, triplam rationem habet eiusdem rationis.

Theor. XXV. *Prop.* XXX.

✠ Cuiuscumque sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui sunt in ipsa. *Hinc constat, datæ sphæræ superficiei dare circulum æqualem.*

Lemma Problematicum I.

Inter duas datas magnitudines inæquales, duas alias reperire continuè proportionales in ratione Arithmetica.

Lemma II.

Inter duas datas magnitudines quantitatem reperire ad quam datarum prima minorem rationem habeat, quàm sit ea quæ triplicata producit eam rationem quam prima datarum habet ad secundam.

Theor. XXVI. *Prop.* XXXI.

Omnis sphæra quadrupla est coni basim quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in sphæra, altitudinem verò radium sphæræ.

Manifestum IX.

Manifestum quod omnis cylindrus basim quidem habens maximum circulum eorum qui sint in sphæra, altitudinem verò æqualem diametro sphæræ, sesquialter est sphæræ. Et superficies ipsius cum basibus etiam sesquialtera est superficiei sphæræ.

Lemma.

Si sit in sphæra circulus, per cuius diametrum planum agatur perpendiculare ad ipsum circulum, secat hoc planum sphæram in æqualia, & maximum sphæræ circulum offert.

Theor. XXVII. *Prop.* XXXII.

Superficies inscriptæ figuræ solidæ in portione sphæræ, æqualis est circulo, cuius radius potest æquale comprehenso rectangulo sub

vno latere inscriptæ planæ figuræ in portione maximi circuli, & linea æquali omnibus parallelis basi portionis cum semisse diametri basis.

Lemma.

Per punctum axis sphæræ agere planum perpendiculare ad axem, quod sphæram dirimat in duo segmenta. *Videatur porisma, seu coroll. Archim.*

Theor. XXVIII. *Prop.* XXXIII.

Superficies inscriptæ figuræ in portione sphæræ minor est circulo, cuius radius est æqualis lineæ eductæ à vertice portionis in circumferentiam circuli qui basis est portionis.

Theor. XXIX. *Prop.* XXXIV.

Figura solida inscripta in portione sub conicis superficiebus contenta, vnà cum cono, basim quidem eandem habenti quam figura, verticem verò centrum sphæræ, æquale est cono basim habenti æqualem superficiei figuræ, altitudinem verò perpendiculari ductæ à centro sphæræ in vnum ex figuræ lateribus. *Quod intellige de portione sphæræ hemicyclio minori.*

Lemma I.

Figura solida in sphæræ portione hemisphærio æquali inscripta, conicisque superficiebus contenta, æqualis est cono basim habenti æqualem superficiei figuræ: altitudinem verò æqualem perpendiculari excidenti à centro sphæræ, & basis portionis in figuræ planæ latus.

Lemma II.

Figura item solida in sphæræ portione hemisphærio maiore descripta, & enata ex reuolutione planæ ęquilateræque figuræ, ac laterum quaternario dimensorum, demũ ita in portione circuli sphæræ maximi descriptę, vt diameter circuli coniungat duos figurę ipsius planæ angulos, ęqualis est duobus conis, quorum primus habeat basim parem superficiei ipsius solidę figuræ, altitudinem verò æqualem perpendiculari ductæ à centro basis in figuræ planæ latus: secundus verò qui basim habeat basim portionis, verticem verò in centro sphæræ.

Lemma III.

Figura solida in sphærę portione hemisphærio maiore descripta conica simul ac cylindrica superficiebus contenta, æqualis est septuplo coni qui basim habeat eandem quam figura, verticem vero centrum sphæræ.

Lemma IV.

Figura solida in sphæræ portione hemispæhrio maiore descripta, & nata ex reuolutione figuræ planæ in circuli sphæræ maximi portione, ita inscripta vt diameter sphæræ vel circuli maximi incidat in latera opposita ad angulos obliquos, æqualis est tum cono qui basim habeat parem superficiei figuræ, & altitudinem æqualem perpendiculari à centro sphæræ demissæ in planæ figur latus, cum alij cono qui basim habeat basim figuræ solidæ, verticem verò centrum sphæræ: si tamen demeris differentiam coni ad basim trunci qui fit prope centrum à cono ad verticem, qui fit super circulo tanquam basi, cuius est diameter pars diametri sphæræ. *Videatur corell. Archim.*

Manifestum X.

Et patet quod superficies descriptæ figuræ solidæ circa segmentum ęqualis est circulo, cuius radius potest rectangulum comprehensum sub vno latere figuræ planę, & omnibus iungentibus angulos figurę planę, & adhuc dimidia base ductæ planę figurę. Inscripta solida figura inscripta est in portione maioris sphęræ. Hoc verò manifestum per hoc quod priùs scriptum est.

Theor. XXX. *Prop.* XXXV.

Figurę solidę circa sphæræ portionem conscriptæ superficies maior est circulo, cuius radius æqualis est lineæ ductę à vertice portionis in circumferentiam circuli, qui basis est portionis.

The. XXXI. *Prop.* XXXVI.

Fit verò & circumscripta solida figura circa portionem cum cono, cuius basis est circulus circa diametrum; vertex verò centrum æqualis est cono, cuius basis quidem ęqualis est superficiei figurę, altitudo verò lineæ à centro in latus perpendiculari ductæ, quæ vtique ęqualis est radio sphæræ. *Videantur duo corollaria; & manifestum* II. *quod ita concludit.*

Manifestum XI.

Circumscriptæ figurę solidæ superficies ad inscriptę solidę figurę superficiem duplicatam rationem habet quam latus circumscriptæ figuræ planę habet ad latus inscriptæ figuræ planæ. At verò figura solida cum cono, triplicatam habet eiusdem rationem.

Th. XXXI. *Prop.* XXXVI.

Cuiuscumque portionis sphæræ minoris semicirculo superficies ęqualis est circulo, cuius radius æqualis est lineæ à vertice portionis in peripheriam ductæ circuli, qui basis est portionis sphæræ.

Th. XXXII. *Prop.* XXXVII.

✠ Et si maior fuerit hemisphærio portio, similiter ipsius superficies æqualis est circulo, cuius radius æqualis est lineæ ductæ à vertice ad circumferentiam circuli, qui basis est portionis.

Th. XXXIII. *Prop.* XXXVII.

Omni segmento sphæræ æqualis est conus qui basim quidem habeat æqualem superficiei segmenti sphæræ, quæ sectioni respondet, altitudinem verò æqualem radio sphæræ.



ARCHIMEDIS
DE SPHÆRA
ET CYLINDRO.
LIBER SECVNDVS.

Dositheo S.



NTEA quidem mandasti mihi, scriberem eorũ problematum demõstrationes, quæ priùs ipse proposuerã Cononi. Accidit verò eorũ plurima scribi inter theoremata, quorum priùs ad te misi demonstrationes: sicuti quod prop. 30. 36. 37. manifesto 9. & 38. prop. libri præcedentis demonstratum est. Quotquot enim horum theorematum & problematum inter illa scribuntur, in hoc libro exscripta ad te misi. Quæcumque verò inueniuntur alia, contemplationem puta de helicibus, & de conoidibus, enitar breui mittere. Primum autem problematum erat eiusmodi, sphæræ datæ planum spatium inuenire æquale superficiei sphæræ. Est verò hoc manifestum & demonstratum ex dictis theorematibus, præsertim verò ex 30. propositione.

Problema I. *Propositio* I.

Secundum erat. Dato cono vel cylindro, sphæram inuenire cono vel cylindro æqualem.

Lemma I.

Lineam conchoidem describere.

Lemma II.

Linea conchoidis vndequaque verticis accedit ad lineam normalem, (modò ex perpendicularibus distantia perpendatur) quò magis recedit à vertice.

Lemma III.

Inter conchoidem & normalem non potest duci linea quin secet conchoidem.

Lemma IV. *Probl.*

Angulo dato & puncto, extra lineas angulum datum concipientes, ducere à puncto dato lineam, cuius pars à lineis angulum datum concipientibus intercepta æqualis sit alicui datæ lineæ.

Lemma V.

Si primum fuerit ad secundum vt tertium ad quartum, erit primum ad dimidium secundi, vt duplum tertij ad quartum.

Lemma VI.

Inter duas datas lineas inæquales duas medias proportionales inuenire.

Lemma VII.

Si diametri duo sumantur ad normam in dato circulo, & vtrimque alterutrius recesentur duo arcus æquales, à quibus duæ perpendiculares excitentur ad alteram diametrorum, à cuius deinde extremitate ad arcum exteriorem ducatur linea: hæc linea ita diuidit proximam ex perpendicularibus, vt inter partem constituentem angulum rectum cum diametro, & partem maiorem diametri, relinquantur mediæ proportionales secta hæc perpendicularis & reliqua diametri pars. *Qui modus complectitur picturam lineæ ciss.ideæ, seu hederaceæ Dioclis.*

Lemma VIII. *Probl.*

Inter duas datas inuenire duas medias proportionales, mediante linea cissoide.

Lemma IX.

Modum Spori exponere.

Lemma X.

Si quatuor lineæ continuè proportionales decussatim, & ad angulos rectos constituantur, ita vt prima & quarta angulum simul, tum secunda & tertia alium simul angulum componant, perficiaturque ex secunda & tertia rectangulum, descriptæ parabolæ seu rectanguli coni sectiones diametris quidem secunda & tertia, rectis verò iuxta quas possunt ordinatim applicatę prima & quarta sese secabunt

in angulo rectanguli constituti sub secunda & tertia. *Vnde modus Menechmi qui fit corporum sectione explicatur. Sed & vnius solius parabolæ beneficio Mathematicus nobilissimus idem inuenit.*

Lemma XI. *Probl.*

Duas medias proportionales inter duas datas ex modo Menechmi inuenire. *Sed & anguli trisectionem, & alia plurima non inuenta hactenus, is qui suprà, parabolæ beneficio reperit.*

Theor. I. *Prop.* II.

✠ Omni portioni sphæræ æqualis est conus qui basim quidē habeat eandem ac portio, altitudinem verò lineam rectam quæ ad altitudinem portionis in ea sit ratione, qua composita ex radio sphæræ, & ex altitudine reliquę portionis ad ipsam altitudinem reliquæ portionis.

Probl. II. *Prop.* III.

Datam sphæram plano secare, ita vt superficies segmentorum rationem inter se inuicem habeant eandem quam sit alia data.

Lemma I.

Si fuerint quatuor rectæ lineæ continuè proportionales, est quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, vt prima ad tertiam, vel quadratum primæ ad quadratum secundæ, vt secunda ad quartam.

Lemma II.

Si inter duas quantitates eiusdem speciei, aliquæ aliæ homogenæ ponantur: ratio extremarum componitur ex rationibus intermediarum.

Probl. III. *Prop.* IV.

Datam sphæram secare, ita vt segmenta sphęræ inter se rationem habeant eandem quam quæ data sit.

Lemma I.

Duabus datis rectis lineis in ratione dupla, & terminis alicuius rationis: diuidere minorem illarum in ratione data; aut efficere vt sicut sunt duo termini simul rationis datæ ad consequentem, ita fiat minor ad inuentam; tum ita secare compositam ex vtraque, vt quadratum maioris sit ad quadratum partis, vt est reliqua pars ad inuentam.

Lemma II.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus & rectilineo proposito, ita secare maiorem, vt quemadmodum fuerit altera partium resectæ ad minorem lineam, ita sit spatium propositum rectilineum ad quadratum alterius portionis sectæ lineæ. *Huc Eutocij modus pertinet.*

Lemma III.

Propoſita linea, eaque ſecta, ita vt partes ſint in ratione dupla: parallelepipedum conſtructum baſe quadrato maioris partis, & altitudine minori portione, maximum eſt omnium quæ pariter confici poſſunt ex alia quacumque ſectione eiuſdem lineæ. *Vide confectionem probl. Archimedei: nempe quomodo ſphæra data ita ſecetur, vt ipſius ſegmenta rationem datam habeant.*

Lemma IV.

Si fuerint duo ſphærarum ſegmenta ſimilia, coni recti huiuſmodi ſegmentis æquales, inter ſe quoque ſunt ſimiles.

Probl. IV. *Prop.* V.

Dato ſegmento ſphæræ, ſimile & alij dato æquale idem ipſum conſtituere.

Probl. V. *Prop.* VI.

Datis duobus ſphæræ ſegmentis, ſiue eiuſdem, ſiue non, inuenire ſegmentum ſphæræ, quod ſit alteri datorum ſimile, ſuperficiem verò habeat æqualem ſuperficiei ſegmenti alterius.

Probl. VI. *Prop.* VII.

A data ſphæra ſegmentum plano ſecare, ita vt ſegmentum ad conum baſim habentem eandem cum ſegmento, & æqualem altitudinem, datam rationem habeat.

Lemma I.

Si cuique duarum linearum inæqualium eadem, vel quæque duarum æqualium addatur: erit maior inæqualium ad minorem inæqualium in maiori ratione, quàm compoſita ex maiori inæquali & altera æquali ad compoſitam ex minori inæquali, & altera æquali.

Lemma II.

Trium linearum, ſi prima ad ſecundam in minori ratione eſt quàm ſecunda ad quartam; rectangulum ſub prima & tertia minus erit ſecundæ quadrato. Contra maius erit, ſi prima ad ſecundam maiorem rationem habeat quàm ſecunda ad tertiam.

Lemma III.

Si quatuor magnitudinibus propoſitis, quod fit ſub prima & quarta minus eſt eo quod fit ex ſecunda & tertia: prima ad ſecundam minorem rationem habebit quàm tertia ad quartam.

Lemma IV.

Si trium linearum primæ quadratum habeat maiorem rationem ad quadratum ſecundæ quàm ſecunda habet ad tertiam: prima habebit ad tertiam maiorem rationem quàm ſit ratio ſeſquialtera rationis

ſecundæ ad tertiam.

Lemma V.

Si linea duobus punctis inæqualiter diuiditur: rectangulum quod fit ex duabus partibus medietatis ſigno proximioribus, maius eſt eo quod fit ex inæqualioribus partibus, magiſque à medio diſſitis.

Theor. II. *Prop.* VIII.

Si ſphæra plano ſecetur non per centrum, maius ſegmentum ad minus minorem quidem rationem habet quàm ſit dupla eius quam habet maioris ſegmenti ſuperficies ad minoris ſuperficiem, maiorem verò quàm ſit ſeſquialtera eiuſdem.

Lemma I.

Si proponantur duo coni, quorum baſis primi habeat maiorem rationem ad baſim ſecundi, quam altitudo ſecundi ad altitudinem primi, primus conus eſt maior ſecundo.

Lemma II.

Lineæ datæ lineam reperire potentia ſubduplam.

Lemma III.

Si fuerint quinque lineæ continuè proportionales, vt erit prima ad quintam, ſic erit quadratum ſecundæ ad quadratum quartę.

Theorema II. *Prop.* IX.

Sphæricorum ſegmentorum ſub æquali ſuperficie contentorum maximum eſt hemiſphærium.



ARCHIMEDIS DE CIRCVLI
Dimensione Liber.

Propositio I. *Theorema* I.



OMNIS circulus æqualis est triangulo rectangulo, cuius radius est par vni eorum quæ sunt circa rectum angulum: circumferentia verò basi.

Prop. II. *Theor.* II.

✠ Circulus ad quadratum suæ diametri, rationem habet quam vndecim ad quatuordecim.

Lemma I.

✠ Si duæ lineares quantitates in aliquot partes diuidantur: rectangula quæ ex singulis partibus vnius fiunt per alterius segmenta, æqualia sunt toti ab integris comprehenso.

Lemma II.

✠ Si rectangulum contineatur sub duabus congeneis & linearibus quantitatibus, vt se habebit mensura ad alteram ipsarum, ita se habebit quod fit ex altera, & mensura ad totum rectangulum.

Lemma III.

✠ Si fuerint quatuor quantitates proportionales, numerus qui multiplicauerit aut diuiserit primum vt faceret secundum, idem multiplicat aut diuidit tertium vt producat quartum.

Lemma IV.

Dato rectangulo eiusque altero latere, dare ignotum latus.

Lemma V.

Dati in numeris quadrati latus inuenire.

Lemma VI.

Noti quadrati latus ignotum Geometricè cognoscere.

Lemma VII.

Si quatuor magnitudinum prima ad secundam maiorem rationem habuerit quàm tertia ad quartam, sumantur autem prima & ter-

tiæ æquemultiplices: æquemultiplex primæ habebit maiorem quoque rationem ad secundam quàm æquemultiplex tertiæ ad quartam.

Prop. III. Theor. III.

✝ Cuiuscumque circuli circumferentia tripla est diametri, & adhuc excedit minori quidem quàm septima parte diametri, maiori verò quàm septuagesimis primis.



ARCHIMEDIS DE CONOIDIBVS ET SPHÆROIDIBVS.

Dositheo bene agere.



SCRIPTAS tibi mitto in hoc quidem libro reliquorum theorematum demonstrationes, quas non habueras in præcedentibus: & aliorum rursus tandem aliquando inuentorum: quorum cùm multoties antea aggressus essem contemplationem, visum mihi fuerat negotium difficile, ac de eorum inuentione diu hæsitaueram: vnde contigerat, vt ipsa proposita vnà cum alijs tibi data non fuissent. Verùm postea curiosius ea contemplatus, inueni quæ me anxium retinuerant. Cæterum priora theoremata de rectangula portione conoidali proponebantur. At quæ nunc inuenta sunt, de obtusa conoide sunt, ac de figuris sphæroidalibus, quarum nonnullas oblongas, quasdam prolatas appello. De rectangula quidem conoide hæc subiiciebantur.

DEFINITIONES.

I.

SI rectanguli coni portio, manente diametro circumducta redeat denuò vnde prodierit: comprehensa figura sub rectanguli coni

ni sectione vocetur rectangula conois, vel rectangulum conoides.

2. Et axem quidem ipsius, illam manentem diametrum vocari.

3. Verticem verò punctum secundùm quod axis tangit superficiem conoidis.

4. Et si planum tetigerit figuram rectangulæ conoidis, aliudque planum illi parallelum ductum secuerit aliquam particulam conoidis: basim quidem resectę portionis vocari planum comprehensum à conoide in resecante plano.

5. Verticem verò punctum, in quo illud aliud planum tangit conoidem.

6. Axem demum conclusam in portione partem rectæ lineæ, quæ ducitur ab apice portionis parallelo axi conoidis.

7. De amblygonia verò conoide supponebamus quidem ista. Si in eodem plano fuerint obtusi anguli coni sectio, & ipsius diameter, tum lineæ quæ dicuntur proximæ sectioni coni, manente verò diametro circumuoluatur planum, in quo sunt dictæ lineæ proximę, donec redierit vnde profectum fuerit: istæ quidem lineæ sectioni obtusi anguli coni proximæ, manifestò conum isoscelem comprehendent, cuius vertex erit punctum, in quod concurrunt lineæ proximę: axis verò diameter manens.

8. Fihura verò comprehensa sub obtusi anguli coni sectione, amblygoniam seu obtusiangulum conoidem vocari.

9. Axem verò ipsius manentem, diametrum.

10. Verticem autem punctum secundùm quod tangit axis superficiem conoidis.

11. Cæterùm conum conceptum sub proximis sectioni amblygonij coni comprehendentem conoidem appellari.

12. Lineam verò rectam, mediam inter verticem conoidis, & verticem coni comprehendentis conoidem adhærentem axi nuncupari.

13. Et si amblygoniam conoidem tetigerit aliquod planum, & huic tangenti plano, aliud planum agatur parallelum, quod secet portionem conoidis: basim quidem resectæ portionis appellari planum comprehensum sub sectione conoidis, in secante plano.

14. Verticem verò punctum secundum, quod planum conoidem tangens ipsam attingit.

15. Axem verò comprehensam in segmento partem lineæ: quæ ducitur per verticem segmenti, & apicem coni comprehendentis conoidem.

16. Et quæ demum media est inter dictos vertices adiectam axi vocitari.

Lemma.

Duabus datis lineis duas alias inuenire & efficere, vt quemadmodum fuerit prima datarum ad secundam, ita sit quadratum prioris inuentæ ad quadratum posterioris.

Problma 1. 2. & 3.

Parabolem, hyperbolem, & ellipsim in plano describere.

Lemma.

Dato quadrato, & altero latere eorum, sub quibus continetur rectangulum illi quadrato æquale, reliquum latus cognoscere.

Problema.

Ex data ellipseos portione integram ellipsim cognoscere.

✠ 17. Rectangulæ igitur conoides omnes similes sunt.

✠ 18. Amblygoniarum verò conoidum similes illæ vocentur quarum & coni comprehendentes conoides similes fuerint. Similes portiones sectionum coni Apollonius definiuit.

In quarum singulis ductis lineis basi parallelis numero æqualibus, sūt ipsæ parallelæ & bases ad abscissas diametrorum partes sumptas à verticibus in iisdem rationibus, tum abscissæ ipsæ ad abscissas.

19. De sphæroidibus verò figuris supponebamus ista. Si acutianguli coni sectio manente maiori diametro reuoluatur, donec redeat rursus vnde profecta est, comprehensam figuram ab oxygonij coni sectione oblongam sphæroidem vocari. Si verò manente minore diametro rouoluatur acutianguli coni sectio, donec redeat vnde prodierit, constitutam figuram ab acutianguli coni sectione, prolatam sphæroidem nuncupari.

20. Vniuscuiusque verò sphæroidis axem appellari manentem diametrum.

21. Verticem verò punctum quo axis tangit superficiem sphæroidis.

✠ 22. Centrum autem vocati medium axis.

23. Diametrum denique per centrum ad angulos rectos ductam axi.

✠ 24. Et si sphæroidum figurarum vtramuis plana parallela tetigerint non secantia: tangentibus verò his planis aliud parallelum planum agatur secans sphæroidem: factarum quidem portionum basim vocari comprehensam in sphæroide particulam plani secantis.

✠ 25. Vertices verò puncta quibus parallela plana sphæroidē tāgunt

26. Axes autem receptas in portionibus particulas rectæ earum apices coniungentis.

27. Similes verò vocari sphæroideas figuras, quarum axes ad diametros eandem rationem habent.

28. Segmenta verò spæroidearum figurarum & conoidearum similia vocari, si directa fuerint ex similibus figuris, & similes habuerint bases, & axes eorum vel recti existentes ad plana basium, vel angulos æquales constituentes ad homologas basium diametros eandem rationem habuerint mutuò ad homologas basium diametros.

Demonstratis verò huiusmodi theorematibus, per ipsa reperiuntur theoremata multa & problemata, quale est istud: Quod similes sphæroides & similium tam sphæroidearum figurarum quàm conoidearum segmenta triplicem axium rationem inter se habeanr.

Et rursus, quod in æqualibus sphæroideis figuris quadrata dimetientum reciprocè æquipollent axibus.

Et si in sphæroideis figuris quadrata dimetientium æquipollent reciprocè axibus, æquales sunt sphæroides.

Præscribentes igitur & theoremata & subsidia, quæ necessaria sunt ad demonstrationes illorum, postea tibi quæ proposita sunt, scribemus. Vale.

SVBSIDIA.

1. SI conus plano secatur in omnia coni latera coincidente, sectio erit vel circulus vel acutianguli coni sectio.

2. Si quidem ergo circulus fuerit sectio: manifestum est comprehensum ab ipsa segmentum ad verticem vsque coni, conum esse.

3. S verò sectio fuerit ellipsis: deducta à cono figura vsque ad verticem coni, segmentum coni nuncupetur.

4. Segmenti verò basis dicatur planum comprehensum sub ellipsi.

5. Vertex autem punctum quod idem est apex coni.

6. Axis demum iuncta linea à vertice ad centrum ellipseos.

7. Atque si cylindrus duobus planis parallelis secatur coincidentibus in omnia cylindri latera: fient vel circuli vel acutiangulorum conorum sectiones æquales, & inter se similes.

8. Si quidem igitur sectiones circuli fiant: manifestum quod resecta à cylindro figura inter parallela plana, cylindrus erit.

9. Si verò & sectiones acutiangulorum conorum sectiones fuerint:

excepta è cylindro figura inter parallela plana, frustum cylindri appelletur.

10. Huius autem frusti basis quidem dicatur, quodlibet planorum conceptorum sub acutiangulorum conorum sectionibus.

11. Axis verò recta quæ coniungit centra sectionum acutiangulorum conorum: eritque ipsa in eadem recta linea cum axe cylindri.

12. Diametrum voco cuiuscumque segmenti lineam quæ bifariam secat omnes rectas ductas in segmento basi ipsius æquidistantes.

13. Similia cylindri frusta, similiaque coni segmenta sunt, quæ similibus insistunt basibus, quarumque axes faciunt æquales angulos ad similes basium diametros, ad easque pares rationes habent.

Propositio prima.

Si fuerint magnitudines quotcumque æquali sese excedentes, fueritque excessus æqualis minimę: Et aliæ item magnitudines, numero quidem æquales illis, magnitudine verò singulæ pares maximæ: omnes quidem magnitudines, quarum vnaquæque æqualis est maximæ omnium æquali sese excedentium, minores sunt quàm duplę: reliquarum vero verò sine maxima maiores, quàm duplæ.

Prop. II.

Si magnitudines quotlibet multitudine aliis magnitudinibus æqualibus numero binæ, eandem rationem habuerint similiter ordinatæ: ponantur verò primæ magnitudines ad alias magnitudines, vel omnes, vel aliquæ, earum in quibusuis rationibus, tum secundæ ad alias magnitudines homologæ in iisdem rationibus: omnes primæ magnitudines ad omnes, quibus conferantur, eandem rationem habebunt, quam habent omnes secundæ magnitudines ad omnes, quibus proponuntur.

Prop. III.

Si fuerint lineæ inter se æquales quotlibet numero, ad quarum vnamquamque accedat spatium excedens forma quadrata, fuerint verò latera excedentium quadratorum, ex ęquo alia aliis maiora, & excessus æqualis eorum minimo: assumantur verò & alia spatia superioribus æqualia numero, sed magnitudine singula sint æqualia maximo illorum: hæc ad omnia quidem alia spatia minorem rationem habebunt ea, quam habet linea æqualis duabus, lateri scilicet maximi excedentis quadrati, & vni ex æqualibus assumptis ad æqualem duabus, tertiæ nimirum parti dicti lateris maximi quadrati, & dimidiæ vnius æqualium: maiorẽ verò hac eadem ad reliqua spatia inæ-

æqualia dempto maiori habebunt.

Manifestum I.

Si coni sectionem aliquot lineæ tetigerint ab eodem puncto eductæ: fuerint verò & aliæ ductæ in ipsa coni sectione parallelæ tangentibus, & se mutuò secantes: comprehensa parallelogramma sub earum segmentis, eandem habebunt rationem ad alia, quæ existunt, quadrata sub tangentibus. Eiusdem autem rationis erit contentum sub segmentis alterius lineæ, cum quadrato tangentis sibi eiusdem parallelæ.

Lemma I.

✠ In antiqua parabola linea, iuxta quam possunt, quæ in sectione ordinatim ducuntur, dupla est illius quæ à vertice sectionis vsque ad axem coni: in recentibus verò maior esse potest aut minor quàm dupla.

Lemma II.

✠ Sumptis duabus paraboles portionibus secundùm duas lineas, quarum altera rectè, altera obliquè abscindat diametrum sectionis. Tum ab extremitate secantis obliquè ducatur perpendicularis in diametrum portionis, & vt semissis lineæ obliquæ ad perpendicularem, ita fiat linea quæpiam ad eam iuxta quam possunt, quæ in recta portione: hæc quæpiam erit linea iuxta quam possunt, quæ in non recta portione ordinatim ducuntur.

Prop. IV.

Si ab eadem rectanguli coni sectione duo segmenta quomodocumque resecentur, quæ partes diametros habeant ipsa etiam segmenta æqualia erunt, vt & triangula in ipsis inscripta, eandem habentia basim cum segmentis, & altitudinem eandem.

Prop. V.

✠ Planum comprehensum sub acutianguli coni sectionẽ, ad circulum qui habeat diametrum æqualem maiori diametro sectionis acutianguli coni, eam rationem habet, quam minor diameter ad maiorem, hoc est, ad circuli diametrum.

Prop. VI.

Omne planum sub acutianguli sectione contentum ad quemlibet circulum eandem rationem habet, quam rectangulum contentum sub diametris sectionis acutianguli coni ad quadratum diametri circuli.

Prop. VII.

Plana sub acutianguli coni sectionibus contenta eandem habent rationem inter se, quam comprehensa rectangula sub dametris se-

ctionum acutiangulorum conorum inter se.

Manifestum II.

Ex hoc verò manifestum est, quod comprehensa plana sub similibus acutiangulorum conorum sectionibus, eandem rationem habent inter se quam habent potentia inter se sectionum diametri similis rationis.

Lemma I.

Si fuerint tres lineæ in eodem ordine ratione, sicuti tres aliæ, rectangulum sub extremis vnius ordinis erit ad quadratum mediæ, sicuti rectangulum alterius ordinis ad quadratum quoque mediæ.

Lemma II. *Problematicum.*

Dato angulo secto bifariam, datoque puncto in alterutro crure, à puncto dato lineam rectam educere in alterum crus, quæ ita dirimatur a linea angulum secante, vt rectangulum comprehensum sub eductę segmentis partibus contentis inter ambo crura, sit ad quadratum secantis angulum in ratione data.

Prop. VIII.

Acutianguli coni sectione data, & linea à centro acutianguli coni sectionis excitata recta ad planum in quo est acutianguli coni sectio: possibile est conum inuenire, qui verticem habeat extremitatem excitatæ lineæ, & in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio.

Prop. IX.

Acutianguli coni sectione data, & linea non rectò excitata à centro sectionis acutianguli coni sectio; possibile est conum inuenire qui verticem habeat extremitatem exsuscitatæ lineæ, in cuius superficie sit data trianguli coni sectio.

Prop. X.

Acutianguli coni sectione data, & linea à centro acutianguli coni sectionis erecta in plano, quod ab altera diametro assurgit rectò ad planum in quo est acutianguli coni sectio: possibile est cylindrum inuenire qui habeat axem in linea recta erecta, in cuius supetficie erit data acutianguli coni sectio.

Prop. XI.

Quod quidem omnis conus ad conum compositam habeat rationem, tam ex ratione basium quàm ex ratione altitudinum, demonstratur ab iis, qui ante fuerunt: Eademque demonstratio concludit quod omne segmentum coni ad segmentum coni compositam rationem habet, tum ex basium, tum ex altitudinum ratione. Et quod

omnis portio cylindri, tripla est segmenti coni eandem basim habentis, quam portio, & eandem altitudinem. Hæc ipsa demum demonstratio ostendit quòd cylindrus triplus est coni basim habentis eandem cum cylindro, altitudinemque eandem.

Lemma I.

✠ Omne segmentum coni, tertia pars est frusti cylindri easdem cum segmento coni habentis basim & altitudinem.

Lemma II.

Sub eodem fastigio existentia frusta cylindri, vel segmenta coni, sunt inter se sicuti bases.

Lemma III.

Si cylindri frustum plano secetur parallelo oppositis planis: erit portio ad portionem, vt altitudo ad altitudinem.

Lemma IV.

Quæ inæqualibus fuerint basibus frusta cylindri, aut segmenta coni, sunt inter se sicut altitudines.

Lemma V.

Cylindrorum æqualia frusta, vel conorum æqualia segmenta habent reciprocas bases verticibus: & quæ reciprocas bases habent verticibus, illa sunt æqualia.

Lemma VI.

Frusta cylindrorum, & segmenta conorum, sunt inter se in ratione composita ex rationibus basium, & altitudinum.

Lemma VII.

Similia cylindrorum frusta, seu coni segmenta, se habent inter se in triplicata ratione diametrorum, quæ in basibus, vel axium ipsorum.

Propositio XII. continens quinque conclusiones.

I. Si rectangulum conois plano secetur per axem, vel æquidistanter axi, sectio erit rectangulæ conoidis sectio eadem quæ comprehendit figuram: diameter verò ipsius erit communis sectio planorum, & eius quod secat figuram, & eius quod per axem ducitur rectum ad planum secans. Et si scindatur plano recto ad axem, sectio circulus erit centrum habens in axe.

✠ 2. Si amblygonia conois plano secatur per axem, vel æquidistans axi, vel per verticem coni comprehendentis conoidem, sectio erit amblygonij coni sectio.

3. Et si quidem per axem eadem erit quæ comprehendit figuram: sed si æquidistanter axi, similis erit ipsi. Si autem per verticem coni conoidē comprehendentis, non erit similis. Cæterùm diameter

ſectionis erit communis ſectio planorum, & eius quod ſecat figuram, & eius quod per axem ducitur rectum ad planum ſecans. Si ſecatur recto plano ad axem, ſectio circulus erit centrum habens in axe.

✠ IV. Si ſphæroidearum figurarum aliqua plano ſecatur per axem, vel æquidiſtanter axi, ſectio erit acutianguli coni ſectio. Et ſi quidem per axem, ipſa erit quæ comprehendit figuram; ſi verò æquidiſtanter axi, ſimilis ipſi. Diameter verò ſectionis erit illa communis planorum, & eius quod ſecat figuram, & eius quod ducitur æquidiſtanter axi, recto ad ſecans planum. Si porrò ſecatur plano recto ad axem, ſectio circulus erit centrum habens in axe.

✠ 5. Denique quibuſlibet dictarum figurarum plano ſectis per axem, lineæ à punctis, quę in ſuperficie figurę ſunt, non in ipſa ſectione, perpendiculares ductæ ad planum ſecans, intra figuram ſectionis cadunt. Harum autem omnium facilè eſt dare demonſtrationes.

Lemma I.

Quæcumque conois vel ſphærois per axem ſecetur, redditur eadem coni ſectio, ex cuius circumvolutione nata eſt expoſita vel conois, vel ſphærois, eſtque redditæ ſectionis diameter linea communis duobus planis, & figuram ſecanti, & illi, quod per axem figuræ actum, ſuper ſecante plano erigitur.

Lemma II.

Conoide vel ſphæroide ſecta plano ad axem perpendiculari, fit ſectione circulus, centrum habens in axe.

Lemma III.

Quibuſlibet dictarum figurarum plano ſectis per axem, lineæ à punctis, quæ in ſuperficie figuræ ſunt, non in ipſa ſectione perpendiculares ductæ ad planum ſecans, intra figuram ſectionis cadunt.

Lemma IV.

✠ Si parabolica conis ſecatur æquidiſtantes axi, fit parabole, eadem nempe ei quæ figuram comprehendit: eſtque diameter ipſius communis ſectio planorum, & eius, quod ſecat figuram æquidiſtanter axi, & eius, quod per axem figuræ ducitur perpendiculare ad illud planum ſecans.

Lemma V.

Si recta linea duobus punctis ſecatur, fueritque rectangulum ex partibus vnius ſectionis æquale rectangulo ex partibus alterius, erunt ipſæ partes inter ſe ęquales, maior maiori, minorque minori.

Lemma VI.

✠ Si hyperbolica conois plano ſecatur æquidiſtanter axi, ſectio

erit

erit hyperbole similis illi quæ figuram descripsit, eiusque diameter erit communis intersectio planorum; & eius quod figuram secat, & eius quod ducitur per axem rectò ad planum secans.

Lemma VII.

✠ Si conois hyperbolica plano per verticem coni ipsam continentis conoidem, ducto secetur: sit hyperbole, dissimilis illi quæ figuram complectitur: eiusque diameter est linea communis duobus planis & illi secanti, & ei quod per axem conoidis ducitur perpendiculare ad prius illud secans per verticem coni conoidem comprehendentis eductum.

Lemma VIII.

✠ Si sphæroidearum figurarum aliqua plano secatur æquidistanter axi, sectio erit ellipsis similis ipsi quæ figuram comprehendit. Diameter verò sectionis erit illa communis planorum, & eius quod secat figuram, & eius quod ducitur æquidistanter axi recti ad planum secãs.

Lemma IX.

✠ Lineæ in sectione coni obliquè ad axem ductæ parallelam ducere, quæ coni sectionem tangat.

Prop. XIII.

✠ Si rectangula conois plano secetur, non quidem per axem, neque æquidistanter axi, neque ad rectos angulos cum axe, sectio erit acutianguli coni sectio: diameter verò ipsius maior linea concepta in conoide ab intersectione facta planorum, & eius scilicet quod secat figuram, & eius quod ducitur rectò per axem ad planum secans. Minor verò diameter æqualis erit distantiæ linearum ductarum æquidistanter axi, ab extremis diametri maioris.

Prop. XIV.

Si obtusiangula conois plano secatur coincidente in omnia coni latera conoidem comprehendentis non rectis ad axem angulis; sectio erit acutianguli coni sectio: diameter verò maior ipsius erit concepta in conoide à sectione facta planorum alterius quidem secantis figuram, & alterius acti per axem recto ad planum secans.

Prop. XV.

Si oblonga sphærois plano secetur non recto ad axem, sectio erit acutianguli coni sectio: diameter verò ipsius maior erit concepta in sphæroide sectio duorum planorum, eius scilicet quod secat figuram, & eius quod ducitur per axem rectò ad planum secans.

Coroll I.

Si prolata sphærois plano secetur, alia quidem eadem erunt: Atque diametrorum minor erit concepta in sphæroide linea.

Corollarium II.

Ex ipsis manifestum est in omnibus figuris, quod si planis parallelis secentur, omnes sectiones similes erunt: quadrata enim à perpendicularibus facta ad parallelogramma intersectionum easdem rationes habebunt.

Prop. XVI.

In rectangula conoide, à quocumque puncto superficiei conoidis ducantur lineæ rectæ parallelæ axi: quæ ad eas partes ducuntur, in quas tendit cauitas conoidis, cadunt extra conoidem; quæ verò ad contrarias, intra. *Propositionis secunda pars.*

In amblygonia conoide, à quolibet puncto superficiei ipsius ductis rectis parallelis alicui lineæ, quæ in conoide agitur à vertice coni comprehendentis conoidem: quæ quidem ducuntur in easdem partes, ad quas tendit figuræ curuitas, extra cadent; quæ verò in contrarias, intra. P*ropositionis tertia pars.*

Si conoideas figuras planum tetigerit non secans conoidem: in vno tantùm puncto tanget, & per contactus punctum axemque actum planum, rectum erit ad planum tangens.

Prop. XVII.

Si sphæroidearum figurarum quamlibet planum attingat non secans figuram, in vno tantùm puncto tanget, & per contactum & axem planum actum fuerit, rectum erit ad planum tangens. *Idemque de conoide dicendum eadem omnino ratione.*

Prop. XVIII.

Si aliquam ex sphæroideis figuris duo plana parallela tetigerint: linea iungens contactuū pūcta, per cētrum sphæroidis porrigetur.

Prop. XIX.

Si quamcumque sphæroidearum figurarum duo parallela plana ducta tangant: agatur verò & aliquod planum per centrum sphæroidis æquidistanter tangentibus: quæ per factam sectionem aguntur, parallelę ei quæ coniungit contactuum puncta, extra sphæroidem cadent. *Propositionis secunda pars.*

Si verò parallelum planum tangentibus signis (seu planis) non agatur per centrum; manifestum est ductarum à sectione linearum partes versus minus segmentum protractas, extra sphæroidem cadere: actas verò ad maius segmentum, intra.

Prop. XX.

Omnis figura sphæroidea plano secta per centrum bifariam secatur à plano, & ipsum & superficies ipsius.

Prop. XXI.

Dato segmento cuiuslibet conoidis resecto plano recto ad axem: aut sphæroidis cuiuscumque frusto non maiore dimidia sphæroide similiter auulso: possibile est segmentum solidum inscribere, & aliud circumscribere ex cylindris æqualem altitudinem habentibus simul compositis, ita vt circumscripta figura inscriptam minori exsuperet omni proposita solida magnitudine.

Prop. XXII.

Portione data cuiusuis conoidis plano secta non recto ad axem, vel cuiuscumque sphæroidis non maiore dimida sphæroide similiter resecta: possibile est in ipsa figuram solidam inscribere, & aliam circumscribere ex cylindrorum frustis constantes, ita vt circumscripta figura inscriptam exsuperet quantitate minori, quàm sit quælibet exposita solida magnitudo

Lemma.

Si quatuor magnitudinum prima sit quàm secunda maior: prima verò minori quantitate superet tertiam quàm secunda quartam: quarta minor erit quàm tertia. Inuerso verò ordine, si prima sit minor secunda, minorique quantitate tertia excedat primam, quàm quarta secundam, erit quarta maior tertia.

His autem præscriptis *(inquit Archimedes)* demonstrabimus quæ proposita fuerant de figuris.

Prop. XXIII.

✠ Omnis portio rectangulæ conoideos resectæ plano recto ad axem, sesquialtera est coni basim habentis eandem cum portione, & axem.

Prop. XXIV.

✠ Etiam si plano non recto ad axem resecetur portio à rectangula conoide similiter sesquialtera erit segmenti coni basim habentis eandem cum portione, & axem eundem.

Lemma I.

Datis circulo & ellipsi, descriptaque in circulo figura laterum æqualium longitudine & numero parium: describere in ellipsi figuram, ad quam inscripta circulo sit, vt circulus ad ellipsim.

Lemma II.

Si sub eodem fastigio existant cylindrus & frustum cylindri, vel conus & segmentum coni: erunt inter se sicuti bases.

Lemma III.

✠ Cylindri & frusta cylindrorum, tum coni & segmenta conorum, habent inter se rationem compositam ex rationibus basium & altitudinum.

Prop. XXV.

Si rectangulæ conoidis duæ portiones secentur planis, altero quidem recto ad axem, altero obliquo, fuerint verò ambarum portionum axes æquales, sectiones erunt æquales.

Prop. XXVI.

✠ Si rectangulæ conoideos duæ portiones secentur planis quomodocumque ductis: portiones huiusmodi rationem inter se habebunt, quàm quadrata axium earumdem.

EPIPHORA.

Hinc deducimus in diuersis conoidibus rectangulis sumptas quomodocumque portiones, quarum axes sint æquales, ipsas esse æquales: & si axes fuerint inæquales, easdem se habere inter se sicuti axium earumdem quadrata.

Prop. XXVII.

Omnis sectio obtusiangulæ conoideos secta plano recto ad axem, ad conum basim habentem eandem cum sectione & altitudinem eandem, hanc habet rationem quam habet linea composita, & ex æquali axi sectionis, & ex tripla adiecta axi, ad lineam æqualem duabus, axi scilicet sectionis, & duplę adiectæ axi.

Prop. XXVIII.

✠ Et proinde si non recta ad axem plano secetur: portio amblygoniæ conoideos ad coni segmentum basim habentis eandem ac segmentum, eundemque axem, eandem habebit rationem quam linea æqualis duabus, & axi portionis & triplę additę ad axem, ad æqualem binis & axi & duplę adiectæ axi.

Prop. XXIX.

✠ Cuiuscumque figuræ sphæroideæ plano sectæ per centrum recto ad axem, dimidium duplum est coni basim habentis eandem cum portione, & eundem axem.

Prop. XXX.

✠ Et proinde si sphæroides non rectum ad axem plano per centrum secatur, similiter dimidium sphæroidis duplum erit segmenti coni basim habentis eandem cum portione, & axem eundem.

Lemma.

Si duæ quantitates quomodocumque bisecentur, & prima fuerit ad alteram ex suis partibus in minori ratione, quàm secunda ad alteram ex suis partibus: erit prima ad reliquam sui partem in maiori ratione quàm secunda ad reliquam sui partem, & contra.

Prop. XXXI.

Cuiuscumque figuræ sphæroideæ plano non per centrum sectæ, sed rectò ad axem: minor portio ad conum, eandem cum ipsa basim

habentem, eundemque axem, hanc habet rationem, quam linea composita ex dimidio axe sphæroidis, & ex axe maioris portionis, habet ad axem maioris portionis.

Prop. XXXII.

Et proinde si non rectò ad axem secetur sphærois, neque per centrum, minor ipsius portio ad segmentum coni basim habentis eandem cum portione, & axem eundem, hanc habebit rationem quam composita linea ex dimidia eius, quæ coniungit vertices factarum portionum, & ex axe maioris portionis ad axem maioris portionis.

Prop. XXXIII.

✠ Cuiuscumque figuræ sphæroideæ plano sectæ rectò ad axem non per centrum, maior portio ad conum, qui basim habeat eandem quam portio, & axem eundem, eam habet rationem, quam æqualis duabus, & dimidiæ axis sphæroidis, & axi minoris portionis habet, ad axem minoris portionis.

Prop. XXXIV.

Et proinde si non rectò ad axem plano secetur sphærois, neque per centrum: maior portio ipsius ad segmentum coni basim habentis eandem quam portio, & eundem axem, eam habebit rationem, quam composita ex dimidia coniungentis vertices factarum portionum, & ex axe minoris portionis ad axem minoris portionis habet. *Quæ sequuntur, vt & lemmata præcedentia, Riualti sunt.*

Theoremat I. *tres partes continens.*

✠ 1. Similes sphæroideæ figuræ triplicatam suorum axium rationem habent.

✠ 2. Similes sphæroideon figurarum portiones triplicatam suorum axium rationem habent.

3. Conoideæ figuræ similes, portionesque conoideon figurarum similes triplicatam suorum axium rationem habent. *Hinc inueniri potest conus qui conoidi vel sphæroidi, vel portioni conoidis aut sphæroidis sit inæqualis.*

Theorema II.

Æqualium sphæroideon figurarum quadrata, quæ sub diametris consimilibus reciprocè respondent axibus, sphæroides figuræ sunt æquales.

EPIPHORA.

Idem concludendum est de æqualibus conoidibus parabolicis, tum de portionibus æqualibus conoideon rectangularum, quarum rectangula sub diametris basium reciproca sunt basibus.

Lemma I.

Duorum conorum inæqualium differentiam ostendere, quæ quoque sit conus.

Lemma II.

Duorum conorum rationem exprimere superficiebus ac lineis.

Lemma III.

Dato plano seiuncto à sphæroide data, planum agere quod datam sphæroidem tangat, & parallelum sit dato plano.

Problema.

A data sphæroidea vel conoidea portione, portionem abscindere plano æquidistanter ad datum planum acto, ita vt resecta portio æqualis sit dato cono, vel cylindro, vel datæ sphæræ.

ARCHIMEDIS DE QVADRATVRA PARABOLES.

Archimedes Dositheo.

CVM audiissem defunctum esse Cononem, qui nobis reliquus erat in amicitia, tibique admodum fuerat familiaris, putà in Geometria maximè versatus, virum quidem mortuum amarè planxi, vt amicissimum, & hominem in Mathematicis planè mirabilem. Atque tunc derepente statui mittere ad te, sicuti antea ad Cononem solebam, Geometricum theorema, quod nemo quidem priùs est contemplatus, nunc verò à nobis ostenditur, mechanicè quidem primò inuentum, deinde & Geometricè demonstratum. Nonnulli ante nos qui Geometriam tractare nouerunt, conati sunt scribere quomodo possibile esset circulo, vel circuli segmento dato inuenire æquale rectilineum: & posteà tentarunt quadrare spatium sub totius coni sectione, & recta linea comprehensum, incertæ fidei lemmata assumentes, quæque à multis non inuenta, damnata sunt. Cęterùm qui statuerit quadrare portionem rectanguli coni sectione comprehensam neminem scimus. Hoc verò à nobis iam tandẽ inuenitur. Demonstratur enim quod omne segmentum comprehensum sub recta & rectanguli coni sectione sesquitertium sit trianguli basim habentis eandem & ęqualem altitudinem cum sectione: assumpto scilicet lemmate ad hoc demonstrandum: quod possibile sit inæqualium spatiorum excessum quo maius excedit minus, toties compo-

nere, vt ipsum excedat quodcumque propositum spatium. Vtebantur & illi superiores Geometræ eodem lẽmate. Etenim per hoc axioma demonstrarunt omnes circulos habere rationem inter se duplicatam suarum dimetientium. Et sphæras habere inter se rationem triplicatam suarũm diametrorum, Adhuc & omnem pyramidem tertiam partem esse cylindri eandem habentis basim cum cono, & parem altitudinem. Ita hoc assumentes lemma, scripserunt. Contingit verò vt vnumquodque ex his demonstratis theorematibus, non minus fidei quàm ipsum lemma, nactnm sit. Nuper verò in similem fidem adduximus ea quæ à nobis data sunt. Cùm itaque huiusce theorematis demonstrationes scripsissemus, mittimus primum quidem quemadmodum mechanicè cognitę sint: postea verò qua ratione geometricè fuerint ostensę. Pręscribuntur etiam & elementa conica quæ demonstrando vsui sunt. Vale.

Propositiones & Theoremata.

I.

SI fuerit rectanguli coni sectio, in qua A B G, & linea B D parallela diametro vel ipsa diameter, tũ linea A B parallela ei quę tangit sectionem coni in puncto B, æqualis erit A D ipsi D G: & si ęqualis fuerit A D ipsi D G, parallelæ erunt tum A G, tum ea quæ coni sectionem tangit in B.

2. Si fuerit rectanguli coni sectio A B G, fuerit verò recta B D, vel parallela diametro; vel ipsamet diametrus: tum linea A B G, parallela lineæ tangenti sectionem rectanguli coni in puncto B, demum linea E G coni sectionem tetigerit in G, erunt B D, B E ęquales.

3. Si fuerit rectanguli coni sectio, A B G, linea verò B D vel parallela diametro, vel ipsâmet diametrus, & ducantur quędam rectæ A D, E Z parallelæ tangenti sectionem coni in B, erit vt B D, longitudine ad B Z, sic potentia linea A D ad lineam E Z.

Lemma. Si fuerint tres linęę, quarum prima sit ad secundam potentia, sicut est ad tertiam longitudine, erunt tres illę lineæ proportionales,

4. Sit portio contenta sub recta & rectanguli coni sectione, A B G, agaturque linea B D è medio lineæ A G parallela diametro, vel ipsa sit diametrus, tum recta B G uncta producatur: si quidem demittatur aliqua alia puta Z T parallela ipsi B D secans vtramque rectarum A G, & B G, eandem habeb t rationem Z T ad T I, quam D A ad D Z.

5. Sit portio cõtenta sub recta, & rectãguli coni sectione ABG, & à puncto A ducatur parallela diametro ZA. à pũcto verò G tãgẽtes coni sectionem in puncto G, quæ sit GZ. si quidem aliqua recta ducatur in triãgulo ZAG, parallela ipsi AZ. in eadẽ ratione ipsa ducta secabitur à sectione rectanguli coni, ac linea AG ab ipsa ducta proportionaliter. Similis verò rationis erit portio lineæ AG, quæ est A portioni ductæ lineç quæ est ab A.

Lem. Si duæ portiones similes punctum vnum in extremo angulo commune habuerint, basesque in eadem recta linea, & describantur ita vt altera alteram includat: quæcumque lineæ ducentur à puncto communi secantes minorem portionem, & eductæ vsque ad ambitum maioris, omnes secentur à minori in eadem ratione, & erit sicut vna ad sui partem portionibus inclusam: sic singulæ reliquarum ad singulas sui partes similiter inclusas.

Problema. Data sectionę, maiorem vel minorem similem super eadẽ recta basis extensa, & à puncto communi initio scilicet basis, describere, quouis axe dato, vel qualibet base proposita. *Videantur 3. coroll. Riualti.*

Intelligatur verò quod est, hoc vnum iam contemplandum & conspiciendum in statu recto ad horizontem, & in linea AB. Postea quæ sunt ad partes D supponantur deorsum, quæ verò in oppositum tendunt, sursum. Triangulum verò BDG sit rectangulum rectum, habens ad B angulum, & latus BG æquale dimidio stateræ: Manifestum quod existente AB æquali ipsi BG, si suspendatur triangulum à punctis BG, suspendatur verò & aliud spatium Z ab altera parte stateræ iuxta A, & æquiponderet spatium Z à puncto A suspensum cum triangulo BGD sic existente vt nunc iacebat: dico spatium Z trianguli BGD tertiam partem esse. *Vide Riualtum.*

7. Si rursus trutina AG, linea, cuius medium sit B, & appendatur secus B, triangulum GDI. sit verò GDI triãgulum amblygoniũ basim habẽs DI, altitudinem verò lineã æqualem dimidio trutinæ, appendatur triangulum DGI à pũctis B & G. Rursus spatium Z appensũ ab A æquiponderet cum triangulo BDI, sic habente vt nũc iacet, similiter demonstrabitur spatium Z tertiam partem esse trianguli GDI.

8. Sit trutina AB; mediũ verò ipsius sit B, & appendatur post B triangulum GDE rectangulum rectum habens angulũ E: & appẽdatur è trutina secus GE. Verùm spatium Z appẽdatur puncto A, & æquiponderet cum GDE sic se habente vt nunc iacet. Quam verò rationem habet AB ad BE, eam habeat GDE triangulum ad spatium C, dico spatium Z triangulo GDE minus esse, spatio vero C maius.

9. Sit rursum

I X.

Sit rursum trutina A G, medium verò ipsius B. Tum triangulum G D C amblygonium basim habens D C, altitudinem verò E G, & suspendatur è trutina ad G E. Spatium verò Z appendatur ex A, & æquiponderet cum trigono D G C sic se habenti vt iacet: quam veró rationem habet A B ad B E, eam habeat G D C triangulum ad L. Dico Z maius quidem esse quàm L; minus verò D G C triangulo. *Videatur Lemma Rinalti.*

X

Sit rursum A B G trutina, mediumque ipsius B, trapezium verò B D I C angulos rectos habens in punctis B I. Latus verò C D tendens ad G, & quam habet rationem B A ad B I, eandem habeat trapezium B D C I ad L. Suspensum verò fuerit istud trapezium B D I C in trutina è punctis B I. Appensumque itidem fuerit spatium Z puncto A, & æquiponderet cum trapezio B D I C sic habenti vt nunc subiacet. Dico spatium Z minus esse ipso L.

X I.

Sit rursum bilanx A G, & medium ipsius B. Sit verò trapezium C D T R habens latera C D, & T R ad G tendentia; reliqua verò D R, & T C perpendicularia ad B G: Tum D R cadat in B. quam verò rationem habet A B ad B I candē habet trapezium D C T R ad L. Et quidem trapezium D C T R suspendatur è libra secus puncta B I, vt & Z è puncto A, & æquiponderet Z cum trapezio D C T R sic se habente vt nunc iacet: similiter demonstrabitur vt priùs, minus esse Z spatium ipso L.

X I I.

Sit rursus statera A G, mediumque ipsius B. Sit verò trapezium D E I C in punctis quidem E & I angulos rectos habens, lateraque C D & E I ad punctum G tendentia. Atque quam rationem habet A B ad B I, eandem habeat trapezium D C I E ad spatium M. Quam verò rationem habet A B ad B E, eandem rationem habeat D C I E trapezium ad L. Appensum autem fuerit istud trapezium D C I E ad stateram è punctis E I. Sed spatium Z appendatur ab A, & æquiponderet trapezio sic se habenti vt nunc iacet. Dico spatium Z spatio L maius esse, spatio verò M minus.

XIII.

Sit rursus trutina A G, cuius medium circa B. Sit verò trapezium C D T R, itaut latera ipsius C D, & T R tendant ad G, reliqua verò D T, C R perpendicularia ad B G. Appensum autem fuerit in statera è punctis E I. Tum spatium Z suspendatur ad punctum A, & æquiponderet cum trapezio D C T R sic se habente vt nunc est. Et quam ratio-

nem habet A ad B E, eandem habeat D C T R trapezium ad L ſpatium. Quam verò rationem habet A B ad B I, eam habeat idem trapezium ad M. Similiter demonſtrabitur vt priùs, ſpatium Z ſpatio L maius, ſpatio verò M minus.

XIV.

Sit portio B K G comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione. Sit etiam primum B G ad rectos angulos diametro, & educatur à B puncto linea B D parallela diametro: à puncto verò G linea G D tangens ſectionem coni in puncto G. Erit quippe B G D triangulus rectangulus. Diuidatur itaque illa B G in portiones quotcunque B E, E Z, Z H, H I, & à ſectionibus huiuſmodi æquidiſtantes diametro ducantur lineæ E S, Z T, H V, T X. A punctis autem quibus ipſæ ſecant coni ſectionem, iungantur lineæ ad G, & vltra producantur. Dico quod triangulum B D G, trapeziorum quidem C E, L Z, M H, N I, & trianguli X I G minus ſit quam triplum: trapeziorum verò Z F, H K, I P, & trianguli I O G maius ſit quàm triplum.

X V.

Sit rurſum ſectio B K G comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione: linea verò B G non ſit ad rectos diametro: neceſſe quidem eſt vel lineam à puncto B æquidiſtanter diametro ductam ad eaſdem partes ſectioni, vel eam quæ trahitur à puncto G, obtuſum facere angulum ad B G. Sit itaque quæ obtuſum angulum facit ea quæ ad G B. Et ducatur à puncto B parallela diametro linea B D. Et à puncto G agatur G D tangens coni ſectionem in puncto G. Et diuidatur B G in quotlibet partes æquales, quæ ſint B E, E Z, Z H, H I, I G. Et à punctis E, Z, H, I, parallelæ diametro ducantur E S, Z T, H V, I X, & à punctis quibus ſecant ipſam coni ſectionem iungantur ad G, & vltra producantur. Dico quippe & nunc triangulum B D G, trapeziorum quidem B F, L Z, K H, P I, & trianguli G I X minus eſſe quàm triplum: aliorum verò Z F, H K, I P, & trianguli G O I maius eſſe quàm triplum.

XVI.

Sit rurſum portio hæc B K G comprehenſa ſub recta, & rectanguli coni ſectione, & agatur per B linea quidem B D parallela diametro; à puncto verò G alia G D tangens coni ſectionem in puncto G, ſit adhuc trianguli B D G, tertia pars ſpatium z. Dico portionem B K G æqualem eſſe ſpatio Z.

XVII.

✠ Hoc demonſtrato, manifeſtum quod omnis portio comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione, ſeſquitertia eſt trianguli habentis baſim eandem cum ipſa portione, & altitudinem æqualem.

DEFINITIONES.

I. Sectionum comprehensarum sub recta & curua linea: basim quidem appello rectam.

II. Altitudinem verò maximam perpendicularem, à curua linea decidentem in basim portionis.

III. Verticem verò punctum, à quo maxima perpendicularis agitur.

Propositiones & Theoremata.

XVIII.

Si in portione quæ comprehenditur sub recta & rectanguli coni sectione, à medio basis ducatur recta parallela diametro, vertex erit portionis punctum, in quo quæ acta est parallela diametro, secat coni sectionem.

XIX.

Si in portione comprehensa sub recta & rectanguli coni sectione ducantur duæ rectæ diametro parallelæ, altera quidem à media basi, altera verò à medio dimidiæ: quæ quidem à medio ducta fuerit, alterius quæ à dimi dia agitur, longitudine sesquitertia erit.

XX.

S in portione comprehensa sub recta & rectanguli coni sectione triangulus inscribatur eandem basim habens cum portione eandemque altitudinem: maior est inscriptus dimidio portionis.

Manifest. Liquet quod sic in hac portione possibile sit polygonum inscribere, ita vt relictæ portiones omni proposito spatio sint minores.

XXI.

✠ Si in portione comprehensa sub recta & rectanguli coni sectione triangulus inscribatur eandem basim habens cum portione, & eandem altitudinem: inscribantur verò & alia trigona eandem basim habentia cum portionibus, & altitudinibus eandem: vniuscuiusque triangulorum in reliquis portionibus descriptorum, octuplum est triangulum quod in tota portione describitur.

XXII.

Si portio comprehensa sub recta & rectanguli coni sectione, & spatia ponantur deinceps quotlibet in quadrupla ratione: fuerit verò maximum spatiorum æquale triangulo portioni inscripto easdem basim, & altitudinem habente cum portione: omnia simul spatia minora sunt portione.

✠ *Lem.* Tertia pars quartæ partis totius, iuncta eidem quartæ, tertiam totius partem efficit.

XXIII.

✠ Si magnitudines ponantur deinceps in quadrapla ratione: omnes eiusmodi magnitudines, & adhuc minimæ tertia pars in vnum compositæ, sesquitertiæ erunt maximæ.

XXIV.

✠ Omnis portio comprehensa sub recta, & rectanguli coni sectione, sesquitertia est trianguli eandem basim habentis cum ipsa & æqualem altitudinem. *Hinc spatium parabolicum in quadratum mutari potest.*

ARCHIMEDIS

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

seu de Spiralibus.

Archimedes Dositheo ΧΑΙΡΕΙΝ.

IN iis quæ ad Cononem missa sunt theorematibus, eorum quidem, quorum à me flagitabas assiduè demonstrationes, multorum à Hercule latas conscriptas habes; nonnullas rursus eorumdem in hoc libro ad te scriptas mitto. Ne mireris verò si longum tempus consumpserimus antequam horum demonstrationes dederimus. Hoc enim contigit quod cupiuerim priusquam eas darem, & ipsis, inquirere eos qui in Mathematicis exercitati sunt. Quot enim in Geometria theoremata visa primùm impossibilia, tempore perfectionem capiunt? Conon quidem non sufficiens tempus sortitus in eorum disquisitione, vitam cum morte commutauit, & ea dubia reliquit, quamquam omnia inuenerat, vt & alia multa, quibus plurimùm Geometriam adauxit. Scimus quippe in illo fuisse non vulgarem Mathematicarum artium peritiam, laborisque supra modum tolerantiam. Post obitum verò Cononis multi exacti sunt anni, quibus à nemine, quod nouerimus, vllum sit horum problematum tentatum. Volo autem eorum singula persequi. Etenim contigit duo quædam eorum, quæ apud Cononem erant, hoc libro inserta fuisse, finem tandem consecutura: vt qui prædicant omnia se inuenisse, demonstrationem verò eorum nullam proferentes, sophisticè agunt, ea aliquando spondere videantur reperisse, quæ sunt impossi-

bilia. Quotquot itaque sunt huiusmodi problematum, tum quorumdam quorum demonstrationes nullas habes, denique cæterorum, quas In hoc libro latas probamus, tibi declarabo. Primum itaque fuerat: *sphæra data planum spatium reperire æquale superficiei sphæræ.* Quod quidem primùm factum est manifestum dato de sphæra libro. Cùm enim illic demonstratum fuerit, *quod omnis sphæræ superficies quadrupla est circuli maximi eorum qui sunt in sphæra,* manifestè possibile est, spatium planum inuenire æquale superficiei sphæræ. Secundũ verò: *cono dato vel cylindro inuenire sphærã ipsi cono vel cylindro parẽ.* Tertium autẽ: *datã sphæram plano secare ita vt segmẽta ipsius inter se ordinatã rationem habeant.* Adhæc quartũ: *datam sphæram plano secare, itaut superficiei portiones ordinatam rationem inter se habeant.* Præterea quintum: *datum sphæræ segmentum dato sphæræ segmento assimilari.* Tandum sextum: *datis duobus sphæræ segmentis, siue eiusdem, siue diuersæ, inuenire segmentum sphæræ, quod sit quidem simile alteri segmentorum, superficiem verò habeat æqualem superficiei alterius.* Denique septimum fuerat: *à data sphæra segmentum resecare plano, itaut segmentum ad conum basim habentem eandem cum segmento, & altitudinem æqualem, ordinatam rationem habeat non minorem ea, quam habent tria ad duo.* Horum quidem omnium demonstrationes Hercules tulit. Quod verò ab ipsis seiungebatur, falsum erat. Est autem huiusmodi. Si sphæra plano secatur in inæqualia, maius segmentum ad minus duplam habet rationem eius quam habet maior superficies ad minorem. Quod verò istud falsum sit, per ea quæ prius missa sunt, manifestum est, Distinguebatur enim & hoc in ipsis. Si sphæra plano secatur in inæqualia, ad rectos angulos cuidam diametro eorum quæ sunt in sphæra, maius segmentum ad minus eandem habebit rationem, quam portio diametri maior ad minorem. Segmentum enim sphæræ maius, ad minus minorem quidem rationem habet dupla eius, quam habet maior superficies ad minorem: maiorem verò quàm sesquialteram. Erat rursus & extremum separatorum problematum falsum: Nempe si diameter alicuius sphæræ secatur, itaut quadratum quod fit à maiori portione, triplum sit quadrati, quod à minore fit portione, & per sectionis punctum planum agatur rectum ad diametrum, ipsum sphæram secare in talem specie figuram, quale est maius sphæræ segmentum, maximum scilicet segmentorum æqualem habentium superficiem. Quod verò sit hoc falsum, apparet ex præmissis ad te theorematibus. Demonstratum enim est quod hemisphærium maximum est comprehensorum sub æquali superficie sphæræ segmentorum. Post autem ista de cono, hæc etiam proponebantur. Si rectanguli coni sectio, manente diametro, circumuoluatur, itaut sit diameter axis: descripta figura à sectione re-

ctanguli *conois*, siue *conoides* appelletur. Tum si conoideam figuram planum quod iam tetigerit, tangenti verò plano aliud planum ductum secuerit aliquam conoidis portionem, resectæ portionis basis quidem vocetur ipsum planum secans: Vertex verò punctum quo alterum planum conoidem tangit. Porrò si dicta figura plano secatur recto ad axem, manifestum est sectionem fore circulum. Quod autem resecta portio sesquialtera sit coni basim habentis eandem, quam portio, & altitudinem æqualem, demonstrare oportet. Ac si conoidis duæ portiones resecentur planis, quomodocunq; ductis, fore vt fiant acutiangulorum conorum sectiones, patet. Cæterùm, si secantia plana non recta fuerint ad axem, segmenta ad se inuicem eandem habere rationem, quam potentiâ inter se habent lineæ à verticibus eorum axi æquidistanter ductæ, vsque ad secantia plana, etiam est demonstrandum. Horum autem demonstrationes similiter ad te mittuntur. Post ista verò hæc de spirali proposita sunt, quæ aliud longéque diuersum problematum genus redolent, nihil commune habens cùm prædictis. Horum porrò demonstrationes in hoc libro tibi rescripsimus. Res autem ita se habet.

DEFINITIONES.

I. SI in plano recta linea altero termino manente, æquali celeritate circumlata redeat deinceps eò, vnde profecta est: simul verò cum linea circvmuoluta feratur punctum pari velocitate sibi ipsi, secundum lineam rectam ducto, motus initio ab immobili termino. istud punctum lineam spiralem in plano describet.

II. Vocetur igitur hoc quidem manens punctum rectæ lineæ, quæ circumuoluitur, principium Helicis.

✠ III. Positio verò lineæ, à qua incipit recta circumferri, principium circulationis.

✠ IV. Linea porrò quam quidem in prima reuolutione pertransierit punctum latum secundum rectam, prima vocetur: quam verò in secunda gyratione idem punctum perambulauerit, secunda: atque de aliis similiter, quæ circumuolutionibus proportionaliter denominentut.

✠ V. Spatium verò comprehensum sub Helice in prima reuolutione descripta, & linea recta quæ prima est, primum appelletur. Quod verò comprehenditur sub Helice in secunda reuolutione descripta, & linea recta secunda, secundum nominetur. Et alia deinceps sic vocentur.

VI. Atque si à puncto, quod est principium Helicis, agatur aliqua linea recta : ea quæ sunt ad easdem huius rectæ partes, ad quas circumuolutio fertur, antecendentia vocentur : quæ verò in contraria, consequentia.

✠ VII. Descriptus autem circulus centro quidem puncto, quod est principium spiralis ; interuallo verò hac recta, quæ est prima, primus appelletur : descriptus verò centro quidem eodem, interuallo verò dupla recta, secundus dicatur : & alij deinceps eodem modo denominentur.

Præmittuntut verò, vt fit in aliis Geometricis, quæ quasdem vtilitates habent ad illorum demonstrationes.

Assumo prætcrea vt rata lemmata, quæ in aliis libris iam euulgatis habentur, cuiusmodi est.

✠ *Lemma.* Inæqualium linearum, & inæqualium spatiorum excessum, quo excedit maior minorem sibi ipsi coadditum : possibile esse excedere quamcumque earum, quæ inter se comparantur, quantitatum.

PROPOSITIONES.

Propositio I. *Theorema* I.

✠ SI secundùm aliquam rectam feratur quoddam punctum æquè velociter sibi ipsi latum, & sumantur in ipsa duæ lineæ : sumptæ candem habebunt rationem inter se, quam tempora, in quibus punctum istas lineas pertransierit.

Prop. II. *Theor.* II.

✠ Si duorum punctorum vnoquoque pariformiter secundùm rectam lineam lato, non quidem æquali simul celeritate, capiantur in vnaquaque linearum duæ lineæ, quæ primæ in æqualibus sub punctis discurrentibus teritur, & item secundæ, eandem inter se rationem habent accéptæ lineæ.

Prop. III. *Probl.* I.

Circulis quotlibet datis, possibile est rectam sumere, quæ sit maior circulorum datorum peripheriis.

Prop. IV. *Probl.* II.

Duabus datis lineis inæqualibus, recta, & circuli circumferentia, possibile est sumere rectam, maiore quidem linearum datarum minorem, minore verò maiorem. *Vide Lemma.*

Prop. V. *Probl.* III.

Circulo dato, & linea recta tangente circulum, possible est à centro circuli ducere rectam ad tangentem, itaut quæ recta fuerit inter tangentem & circuli circumferentiam, ad radium circuli minorem rationem habeat, quàm circumferentia circuli, quæ est inter contactam & productam ad datam cuiuscunque circuli circumferentiam.

Lemma.

Si circulum tetigerit quæpiam linea, impossibile est ducere aliam lineam à puncto contactus, quæ circulum non secet ab ea parte, qua angulum recto minorem efficit cum radio ducto à centro ad punctum contactus.

Prop. VI. *Probl.* IV.

Circulo dato, & in circulo linea minore, diametro, possibile est à centro circuli ad peripheriam ipsius eiaculari rectam, secantem eam quæ in circulo data est, lineam; ita vt comprehensa recta inter peripheriam & rectam in circulo datam ad coniunctam à termino eiaculatæ, qui est in circumferentia ad alteram partem eius rectæ, quæ in circulo data est, ordinatam rationem habeat; modo tamen vt data ratio minor sit ea quam habet dimidia datæ in circulo, ad eam quæ à centro perpendiculariter in ipsam ducitur.

Prop. VII. *Probl.* V.

Iisdem datis, & recta data extra circulum porrecta possibile est à centro lineam eiaculari ad extrà porrectam, itaut quæ fuerit inter circumferemtiam & porrectam ad lineam iunctam à termino eiaculatæ ad terminum porrectæ ordinatam rationem habeat: dummodo tamen data ratio maior fuerit ea, quam habet dimidia datæ in circulo, ad eam quæ à centro perpendiculariter in ipsam agitur.

Lemma I.

Si recta in circulo ab alia recta bifariam secatur, & ad angulos rectos: impossibile est ab eodem puncto, à quo secans ducitur, aliam secantem agere in sectam, itaut partes inter sectam, & peripheriam circuli æquales sint: quod tamen fieri potest, si secta linea bifariam non dirimitur. *Videatur Lemma 2.*

Prop. VIII. *Probl.* VI.

Circulo dato, & in circulo linea minore ipsa diametro, & alia tangente circulum in termino lineæ in circulo datæ; possibile est à centro circuli eiaculari aliquam rectam ad rectam datam, itaut pars ipsius contenta inter peripheriam circuli, & datam lineam in circulo ad partem comprehensam à tangente, ordinatam rationem habeat: si modo data ratio sit minor ea quam habet dimidia datæ in circulo, ad eam quæ à centro circuli perpendiculariter in ipsam ducitur.

Prop. IX.

Prop. IX. Probl. VII.

Iisdem datis, & in circulo data linea vlterius porrecta: possibile est à centro circuli eiaculari rectam in datam porrectam, itaut pars inter circumferentiam & porrectam ad conceptam in tangente à puncto contactus, ordinatam rationem habeat: si modo data ratio maior fuerit ea quam habet dimidia datæ in circulo ad eam quæ à centro perpendiculariter in ipsam ducitur.

Prop. X. Theor. III.

✠Si lineæ deinceps ponantur quotcumque, æquali sese inuicem excedentes, fuerit verò excessus æqualis minimæ: Et aliæ lineæ ponantur numero quidem æquales illis, magnitudine vero singulæ pares maximæ: quadrata ab æqualibus maximæ, comprehensa, & quod fit à maxima quadratum, & quod comprehenditur sub minima & linea æquali omnibus æqualiter sese excedentibus, tripla erunt omnium quadratorum linearum sese æqualiter excedentium.

Lemma.

✠ Si fuerint duæ quantitates eiusdem speciei in aliqua ratione, antecedentisque pars sit ad partem consequentis in minori ratione quàm tota ad totam; reliquum antecedentis erit ad reliquum consequentis in maiori ratione quàm tota ad totam

Manifestum I.

✠ Inde igitur patet quod quadrata omnia quæ ab æqualibus maximæ describuntur, eorum quadratorum quæ ab æquali sese inuicem excedentibus fiunt, minora sint quàm tripla.

Minifestum II.

Reliquorum verò, sublato maximæ quadrato, maiora sunt quàm tripla.

Manifestum III.

Propterea si similes figuræ describantur ab omnibus quæ sese æquali inuicem superant, & ab iis quæ sunt illarum maximæ æquales: quæ sanè fiunt ab æqualibus maximæ, eorum quæ fiunt ab iis quę sese æqualiter excedunt, minora sunt quàm tripla: Sublata verò figura quæ describitur à maxima reliquarum sunt plusquam tripla.

Prop. XI. Theor. IV.

Si lineæ deinceps quotlibet ponantur, æqualiter sese mutuo excedentes, & aliæ lineę constituantur, multitudine quidem vna pauciores quàm sint illę ęqualiter sese inuicem excedentes, magnitudine verò singulę æquales illarum maximæ, quadrata omnia quæ ab æqualibus maximę, ad quadrata quę sese æqualiter mutuo excedunt, fiunt, sine minima, minorem rationem habent, quàm quadratum

S

quod à maxima ad æquale duobus, ſcilicet comprehenſo ſub maxima & minima, & tertiæ parti quadrati exceſſus quo maxima minimam ſupetat: ad quadrata autem quæ fiunt ab æqualiter ſeſe inuicem excedentibus, ſine eo quadrato, quod fit ab omnium maxima, hac ipſa maiorem rationem habent.

ΕΠΙΦΟΡΑ.

Hinc concludimus, quod ſi exceſſus maximæ ſupra minimam fuerit minimæ æqualis, fore vt ratio quadrati maximæ ad rectangulum ſub maxima & minima, cum tertia parte quadrati exceſſus maximæ ſupra minimam, ſit vt 12. ad 7.

Manifeſtum IV.

Idcirco ſi ſimiles figuræ deſcribantur ab omnibus, tum ab iis quæ ſeſe mutuo æqualiter excedunt, tum ab æqualibus maximæ: figuræ omnes ab æqualibus maximæ deſcriptæ ad eas quæ ab iis quæ mutuo ſeſe æqualiter excedunt, ſine ea quæ à minima fit figura, minorem rationem habebunt quàm quadratum quod à maxima ad æquale duobus tam ei, quod comprehenditur à maxima, & minima, & tertiæ parti eius, quod ab exceſſu fit, quo maxima minimam ſuperat: ad eas verò quæ ab iiſdem lineis fiunt figuris, ſine ea quæ à maxima deſcribitur eadem illa ratione maiorem.

Prop. XII. *Theor.* V.

Si in ſpiralem vna quidem circumuolutione deſcriptam, à principio ſpiralis, rectæ quotlibet cadant, quæ æquales inter ſe angulos contineant, ſeſe mutuò æqualiter excedent. *Vide Corollarium.*

Lemma I.

Si tres lineæ ordine ſeſe inuicem æquali exceſſu ſuperauerint, maxima, & minima ſimul duplæ ſunt mediæ.

Lemma II.

Si à iugo trianguli decidit linea in baſim bifariam diuidens angulum iugi, duo latera angulum hunc continentia maiora ſunt quàm dupla eius quæ à iugo demiſſa linea.

Prop. XIII. *Theor.* VI.

Si recta linea ſpiralem tetigerit, in vno tantùm puncto tanget.

Prop. XIV. *Theor.* VII.

✠ Si in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ lineæ à puncto, quod eſt principium ſpiralis, & producantur ad circumferentiam vſque primi circuli: eandem rationem inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quam arcus circuli, medij inter terminum ſpiræ, & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in conſequentia arcubus à fine ſpiralis.

Prop. XV. Theor. VIII.

Si in Helicem in secunda reuolutione factam lineæ rectæ ceciderint à principio Helicis; eandem rationem eiusmodi rectæ ad inuicem quàm dicti arcus cum tota circuli circumferentia circuli simul assumpta, habebunt.

Manifestum V.

Hoc ipso demonstrabitur, quod si in spiralem ex tertia reuolutione ortam ceciderint rectæ lineæ, eandem inter se rationem habebunt quam dicti arcus cum integra circuli circumferentia bis accepta. Similiter verò omnes cadentes in alias spirales demonstrantur eandem habere rationem quam dicti arcus cum integra circuli circumferentia toties assumpta, quotus est vnitate minor, reuolutionum numerus, licet alterutra cadens in finem spiralis incidat.

Prop. XVI. Theor. IX.

✠ Si spiralem ex prima reuolutione ortam recta linea tetigerit, & à contactu recta linea ducta fuerit ad punctum quod sit principium spiralis, quos facit angulos tangens cum hac ducta inæquales erunt, & quidem qui in antecedentia vergit, obtusus est; qui in consequentia acutus.

Manifestum VI.

Similiter verò demonstrabitur, quod si tangens spiralem in fine ipsius tetigerit, idem omnino sequetur.

Prop. XVII. Theor. X.

Quinimo si spiralem ex secunda reuolutione natam recta linea tetigerit, idem accidet.

Manifestum VII.

Eadem verò accident, & si tangens per terminum spiralis attingat. Similiter verò demonstrabitur: Quod si spiralem ex quacunque reuolutione natam recta tetigerit, etiam in fine ipsius, quod inæquales angulos faciet ad eam, quæ à tactu ad principium spiræ coniungitur: & eum quidem qui fiet in antecedentibus, obtusum, alium verò in consequentibus acutum.

Lemma.

Si quatuor magnitudinum prima fuerit minor tertia, & secunda maior quarta: prima minorem rationem habebit ad secundam, quàm tertia ad quartam. Contrà verò si prima fuerit maior tertia, & secunda minor quarta, prima maiorem habebit rationem ad secundam, quàm tertia ad quartam.

Prop. XVIII. Theor. XI.

Si spiralem ex prima circumuolutione ortam recta linea tetigerit

in termino ſpiræ: A puncto verò quod eſt in principio ſpiræ, quædam ducatur ad angulos rectos ei quæ eſt principium reuolutionis, ducta incidet in tangentem, & ipſius quæ pars media erit inter tangentem, & principium ſpiræ, æqualis erit peripheriæ primi circuli.

Prop. XIX. *Theor.* XII.

✠ At ſi ſpiralem ex ſecunda reuolutione ortam in termino tetigerit linea recta, & à principio ſpiræ ducatur aliqua ad angulos rectos lineæ, quæ ſit initium reuolutionis: ipſa coincidet in tangentem, & erit recta media inter tangentem & principium ſpiræ dupla circumferentiæ ſecundi circuli.

Manifeſtum VIII.

Hoc ipſo modo demonſtrandum eſt, quo ſi ſpiralem ex quacunque circumuolutione natam tangat quædam recta in termino ſpiræ: tum ab initio ſpiralis ducatur linea recta ad principium reuolutionis, cadet in tangentem, totuplexque erit circumferentiæ circuli, quotus eſt numerus reuolutionis denominatus ab eodem numero.

Prop. XX. *Theor.* XIII.

✠ Si ſpiralem in prima reuolutione factam recta linea tetigerit non in termino ſpiræ, à contactu verò ad principium volutæ recta iungatur, tum centro quidem principio ſpiralis, interuallo verò illa iuncta, circulus deſcribatur: à principio præterea ſpiralis agatur aliqua ad rectos angulos: quæ à contactu ad principium helicis iungitur, cadet in tangentem, & erit recta inter concurſum & principium helicis, æqualis arcui deſcripti circuli, qui intercedit inter contactum & ſectionem qua ſecat deſcriptus circulus principium reuolutionis, capto in antecedentibus arcu à puncto qui eſt in principio circumuolutionis.

Manifeſtum IX.

Hoc verò ipſo modo demonſtrabitur, ſi recta ſpiralem ex ſecunda natam reuolutione tetigerit, non in termino ſpiralis, & cætera alia præparentur, quod quæ pars eſt media cadentis in tangentem à principio ſpiralis, æqualis eſt toti deſcripti circuli circumferentiæ, & adhuc arcui medio inter dicta puncta ſimiliter accepto. Et rurſus ſi aliqua linea ſpiralem quamcumque ex reuolutione ortam tetigerit, non quidem in termino, & cætera ſtruantur, quod recta quæ eſt inter dicta puncta, multiplex quædam eſt peripheriæ circuli, qui deſcribitur ſecundùm numerum vno minorem eo quo reuolutiones appellantur, & adhuc æqualis arcui qui eſt inter dicta puncta ſimiliter ſumpto.

Probl. XXI. *Prop.* VIII.

Circa ſumptum ſpatium comprehenſum ſub helice in prima reuolutione orta, & prima linea quæ principium facit reuolutionis: poſ-

ſibile eſt figuram planam deſcribere, & aliam eidem inſcribere, ex ſimilibus ſectionibus compoſitam, ita vt circumſcripta maior ſit quàm inſcripta quocumque propoſitô ſpatio.

Manifeſtum X.

Inde manifeſtum eſt, quod poſſibile eſt circa dictum ſpatium figuram, qualis dicta ſit, ſcribere, ita vt circumſcripta figura maior ſit ſpatio, & quidem quantitate minori quocumque propoſito ſpatio: & rurſus aliam inſcribere, ita vt ſpatium ſimiliter maius ſit inſcripta figura quantitate minori, quocumque propoſito ſpatio.

Prop. XXII. *Probl.* IX.

Circa ſumptum ſpatium quod comprehendatur ſub helice ex ſecunda reuolutione deſcripta, & recta linea que eſt ſecunda earum quæ principium faciunt reuolutionis: poſſibile eſt figuram planam conſcribere ex ſimilibus ſectoribus conſtantem, & aliam in ipſo inſcribere, ita vt circumſcripta maior ſit inſcripta minori quantitate quàm ſit quodcumque propoſitum ſpatium.

Manifeſtum XI.

Liquet itaque quod poſſibile ſit & circumſcribere figuram circa ſumptum ſpatium, quæ maior ſit quantitate minori, omni propoſito ſpatio, & rurſus ſumptum ſpatium maius eſſe inſcripta figura quantitate minori, omni propoſito ſpatio.

Manifeſtum. XII.

Hoc ipſo autem modo manifeſtum eſt, quod poſſibile ſit circa ſumptum ſpatium comprehenſum ſub ſpirtali ex quantacumque reuolutione orta, & recta linea quæ ſit in principio reuolutionis ab eodem numero quam reuolutio denominata, conſcribere figuram planam qualis dicitur; ita vt circumſcripta hæc figura maior ſit aſſumpto ſpatio, quantitate minori quolibet propoſitô ſpatio, & rurſus inſcribere, ita vt aſſumptum ſpatium maius ſit hac inſcripta figura quantitate minori omni propoſito ſpatio.

Prop. XXIII. *Probl.* X.

Sumpto ſpatio comprehenſo ſub ſpirali, quæ ſit minor ea quæ ex vna reuolutione generatur, nec habeat terminum principium ſpiralis, & lineis rectis, quæ à principio ſpiralis ducantur; poſſibile eſt circa huiuſmodi ſpatium figuram planam circumſcribere ex ſimilibus ſectoribus conflatam, & aliam inſcribere, ita vt circumſcripta figura inſcripta ſit maior minori quidem quantitate quàm ſit propoſitum ſpatium.

Manifeſtum XIII.

Hinc igitur manifeſtè patet quòd poſſibile ſit circa dictum ſpatium planum, quale dictum eſt, conſcribere, itaut circumſcripta figura

S ii

nem habet A ad B E, eandem habeat D C T R trapezium ad L ſpatium. Quam verò rationem habet A B ad B I, eam habeat idem trapezium ad M. Similiter demonſtrabitur vt priùs, ſpatium Z ſpatio L maius, ſpatio verò M minus.

XIV.

Sit portio B K G comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione. Sit etiam primum B G ad rectos angulos diametro, & educatur à B puncto linea B D parallela diametro: à puncto verò G linea G D tangens ſectionem coni in puncto G. Erit quippe B G D triangulus rectangulus. Diuidatur itaque illa B G in portiones quotcunque B E, E Z, Z H, H I, & à ſectionibus huiuſmodi æquidiſtantes diametro ducantur lineæ E S, Z T, H V, T X. A punctis autem quibus ipſæ ſecant coni ſectionem, iungantur lineæ ad G, & vltra producantur. Dico quod triangulum B D G, trapeziorum quidem C E, L Z, M H, N I, & trianguli X I G minus ſit quam triplum: trapeziorum verò Z F, H K, I P, & trianguli I O G maius ſit quàm triplum.

X V.

Sit rurſum ſectio B K G comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione: linea verò B G non ſit ad rectos diametro: neceſſe quidem eſt vel lineam à puncto B æquidiſtanter diametro ductam ad eaſdem partes ſectioni, vel eam quæ trahitur à puncto G, obtuſum facere angulum ad B G. Sit itaque quæ obtuſum angulum facit ea quæ ad G B. Et ducatur à puncto B parallela diametro linea B D. Et à puncto G agatur G D tangens coni ſectionem in puncto G. Et diuidatur B G in quotlibet partes æquales, quæ ſint B E, E Z, Z H, H I, I G. Et à punctis E, Z, H, I, parallelæ diametro ducantur E S, Z T, H V, I X, & à punctis quibus ſecant ipſam coni ſectionem iungantur ad G, & vltra producantur. Dico quippe & nunc triangulum B D G, trapeziorum quidem B F, L Z, K H, P I, & trianguli G I X minus eſſe quàm triplum: aliorum verò Z F, H K, I P, & trianguli G O I maius eſſe quàm triplum.

XVI.

Sit rurſum portio hæc B K G comprehenſa ſub recta, & rectanguli coni ſectione, & agatur per B linea quidem B D parallela diametro; à puncto verò G alia G D tangens coni ſectionem in puncto G, ſit adhuc trianguli B D G, tertia pars ſpatium z. Dico portionem B K G æqualem eſſe ſpatio Z.

XVII.

✠ Hoc demonſtrato, manifeſtum quod omnis portio comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione, ſeſquitertia eſt trianguli habentis baſim eandem cum ipſa portione, & altitudinem æqualem.

DEFINITIONES.

I. Sectionum comprehenſarum ſub recta & curua linea: baſim quidem appello rectam.

II. Altitudinem verò maximam perpendicularem, à curua linea decidentem in baſim portionis.

III. Verticem verò punctum, à quo maxima perpendicularis agitur.

Propoſitiones & Theoremata.

XVIII.

Si in portione quæ comprehenditur ſub recta & rectanguli coni ſectione, à medio baſis ducatur recta parallela diametro, vertex erit portionis punctum, in quo quæ acta eſt parallela diametro, ſecat coni ſectionem.

XIX.

Si in portione comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione ducantur duæ rectæ diametro parallelæ, altera quidem à media baſi, altera verò à medio dimidiæ: quæ quidem à medio ducta fuerit, alterius quæ à dimi dia agitur, longitudine ſeſquitertia erit.

XX.

S in portione comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione triangulus inſcribatur eandem baſim habens cum portione eandemque altitudinem: maior eſt inſcriptus dimidio portionis.

Manifeſt. Liquet quod ſic in hac portione poſſibile ſit polygonum inſcribere, ita vt relictæ portiones omni propoſito ſpatio ſint minores.

XXI.

✠ Si in portione comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione triangulus inſcribatur eandem baſim habens cum portione, & eandem altitudinem: inſcribantur verò & alia trigona eandem baſim habentia cum portionibus, & altitudinibus eandem: vniuſcuiuſque triangulorum in reliquis portionibus deſcriptorum, octuplum eſt triangulum quod in tota portione deſcribitur.

XXII.

Si portio comprehenſa ſub recta & rectanguli coni ſectione, & ſpatia ponantur deinceps quotlibet in quadrupla ratione: fuerit verò maximum ſpatiorum æquale triangulo portioni inſcripto eaſdem baſim, & altitudinem habente cum portione; omnia ſimul ſpatia minora ſunt portione.

✠ *Lem.* Tertia pars quartæ partis totius, iuncta eidem quartæ, tertiam totius partem efficit.

XXIII.

✠ Si magnitudines ponantur deinceps in quadrapla ratione: omnes eiusmodi magnitudines, & adhuc minimæ tertia pars in vnum compositæ, sesquitertiæ erunt maximæ.

XXIV.

✠ Omnis portio comprehensa sub recta, & rectanguli coni sectione, sesquitertia est trianguli eandem basim habentis cum ipsa & æqualem altitudinem. *Hinc spatium parabolicum in quadratum mutari potest.*

ARCHIMEDIS

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

seu de Spiralibus.

Archimedes Dositheo ΧΑΙΡΕΙΝ.

IN iis quæ ad Cononem missa sunt theorematibus, eorum quidem, quorum à me flagitabas assiduè demonstrationes, multorum à Hercule latas conscriptas habes; nonnullas rursus eorumdem in hoc libro ad te scriptas mitto. Ne mireris verò si longum tempus consumpserimus antequam horum demonstrationes dederimus. Hoc enim contigit quod cupiuerim priusquam eas darem, & ipsis, inquirere eos qui in Mathematicis exercitati sunt. Quot enim in Geometria theoremata visa primùm impossibilia, tempore perfectionem capiunt? Conon quidem non sufficiens tempus sortitus in eorum disquisitione, vitam cum morte commutauit, & ea dubia reliquit, quamquam omnia inuenerat, vt & alia multa, quibus plurimùm Geometriam adauxit. Scimus quippe in illo fuisse non vulgarem Mathematicarum artium peritiam, laborisque supra modum tolerantiam. Post obitum verò Cononis multi exacti sunt anni, quibus à nemine, quod nouerimus, vllum sit horum problematum tentatum. Volo autem eorum singula persequi. Etenim contigit duo quædam eorum, quæ apud Cononem erant, hoc libro inserta fuisse, finem tandem consecutura: vt qui prædicant omnia se inuenisse, demonstrationem verò eorum nullam proferentes, sophisticè agunt, ea aliquando spondere videantur reperijsse, quæ sunt impossi-

bilia. Quotquot itaque ſunt huiuſmodi problematum, tum quorumdam quorum demonſtrationes nullas habes, denique cæterorum, quas in hoc libro latas probamus, tibi declarabo. Primum itaque fuerat: *ſphæra data planum ſpatium reperire æquale ſuperficiei ſphæræ.* Quod quidem primùm factum eſt manifeſtum dato de ſphæra libro. Cùm enim illic demonſtratum fuerit, *quod omnis ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt circuli maximi eorum qui ſunt in ſphæra*, manifeſtè poſſibile eſt, ſpatium planum inuenire æquale ſuperficiei ſphæræ. Secundũ verò: *cono dato vel cylindro inuenire ſphærã ipſi cono vel cylindro parẽ.* Tertium autẽ: *datã ſpæram plano ſecare itavt ſegmẽta ipſius inter ſe ordinatã rationem habeant.* Adhæc quartũ; *datam ſphæram plano ſecare, itaut ſuperficiei portiones ordinatam rationem inter ſe habeant.* Præterea quintum: *datum ſphæræ ſegmentum dato ſphæræ ſegmento aſſimilari.* Tandum ſextum: *datis duobus ſphæræ ſegmentis, ſiue eiuſdem, ſiue diuerſæ, inuenire ſegmentum ſphæræ, quod ſit quidem ſimile alteri ſegmentorum, ſuperficiem verò habeat æqualem ſuperficiei alterius.* Denique ſeptimum fuerat: *à data ſphæra ſegmentum reſecare plano, itaut ſegmentum ad conum baſim habentem eandem cum ſegmento, & altitudinem æqualem, ordinatam rationem habeat non minorem ea, quam habent tria ad duo.* Horum quidem omnium demonſtrationes Hercules tulit. Quod verò ab ipſis ſeiungebatur, falſum erat. Eſt autem huiuſmodi. Si ſphæra plano ſecatur in inæqualia, maius ſegmentum ad minus duplam habet rationem eius quam habet maior ſuperficies ad minorem. Quod verò iſtud falſum ſit, per ea quæ prius miſſa ſunt, manifeſtum eſt, Diſtinguebatur enim & hoc in ipſis. Si ſphæra plano ſecatur in inæqualia, ad rectos angulos cuidam diametro eorum quæ ſunt in ſphæra, maius ſegmentum ad minus eandem habebit rationem, quam portio diametri maior ad minorem. Segmentum enim ſphæræ maius, ad minus minorem quidem rationem habet dupla eius, quam habet maior ſuperficies ad minorem: maiorem verò quàm ſeſquialteram. Erat rurſus & extremum ſeparatorum problematum falſum: Nempe ſi diameter alicuius ſphæræ ſecatur, itaut quadratum quod fit à maiori portione, triplum ſit quadrati, quod à minore fit portione, & per ſectionis punctum planum agatur rectum ad diametrum, ipſum ſphæram ſecare in talem ſpecie figuram, quale eſt maius ſphæræ ſegmentum, maximum ſcilicet ſegmentorum æqualem habentium ſuperficiem. Quod verò ſit hoc falſum, apparet ex præmiſſis ad te theorematibus. Demonſtratum enim eſt quod hemiſphærium maximum eſt comprehenſorum ſub æquali ſuperficie ſphæræ ſegmentorum. Poſt autem iſta de cono, hæc etiam proponebantur. Si rectanguli coni ſectio, manente diametro, circumuoluatur, itaut ſit diameter axis: deſcripta figura à ſectione re-

ctanguli *conois*, siue *conoides* appelletur. Tum si conoideam figuram planum quod iam tetigerit, tangenti verò plano aliud planum ductum secuerit aliquam conoidis portionem, resectæ portionis basis quidem vocetur ipsum planum secans: Vertex verò punctum quo alterum planum conoidem tangit. Porrò si dicta figura plano secatur recto ad axem, manifestum est sectionem fore circulum. Quod autem resecta portio sesquialtera sit coni basim habentis eandem, quam portio, & altitudinem æqualem, demonstrare oportet. Ac si conoidis duæ portiones resecentur planis, quomodocunq; ductis, fore vt fiant acutiangulorum conorum sectiones, patet. Cæterùm, si secantia plana non recta fuerint ad axem, segmenta ad se inuicem eandem habere rationem, quam potentiâ inter se habent lineæ à verticibus eorum axi æquidistanter ductæ, vsque ad secantia plana, etiam est demonstrandum. Horum autem demonstrationes similiter ad te mittuntur. Post ista verò hæc de spirali proposita sunt, quæ aliud longéque diuersum problematum genus redolent, nihil commune habens cum prædictis. Horum porrò demonstrationes in hoc libro tibi rescripsimus. Res autem ita se habet.

DEFINITIONES.

I. SI in plano recta linea altero termino manente, æquali celeritate circumlata redeat deinceps eò, vnde profecta est: simul verò cum linea circvmuoluta feratur punctum pari velocitate sibi ipsi, secundum lineam rectam ducto, motus initio ab immobili termino. istud punctum lineam spiralem in plano describet.

II. Vocetur igitur hoc quidem manens punctum rectæ lineæ, quæ circumuoluitur, principium Helicis.

✠ III. Positio verò lineæ, à qua incipit recta circumferri, principium circulationis.

✠ IV. Linea porrò quam quidem in prima reuolutione pertransierit punctum latum secundum rectam, prima vocetur: quam verò in secunda gyratione idem punctum perambulauerit, secunda: atque de aliis similiter, quæ circumuolutionibus proportionaliter denominentur.

✠ V. Spatium verò comprehensum sub Helice in prima reuolutione descripta, & linea recta quæ prima est, primum appelletur. Quod verò comprehenditur sub Helice in secunda reuolutione descripta, & linea recta secunda, secundum nominetur. Et alia deinceps sic vocentur.

VI. Atque si à puncto, quod est principium Helicis, agatur aliqua linea recta: ea quæ sunt ad easdem huius rectæ partes, ad quas circumuolutio fertur, antecendentia vocentur: quæ verò in contraria, consequentia.

✠ VII. Descriptus autem circulus centro quidem puncto, quod est principium spiralis; interuallo verò hac recta, quæ est prima, primus appelletur: descriptus verò centro quidem eodem, interuallo verò dupla recta, secundus dicatur: & alij deinceps eodem modo denominentur.

Præmittuntur verò, vt fit in aliis Geometricis, quæ quasdem vtilitates habent ad illorum demonstrationes.

Assumo præterea vt rata lemmata, quæ in aliis libris iam euulgatis habentur, cuiusmodi est.

✠ *Lemma*. Inæqualium linearum, & inæqualium spatiorum excessum, quo excedit maior minorem sibi ipsi coadditum: possibile esse excedere quamcumque earum, quæ inter se comparantur, quantitatum.

PROPOSITIONES.

Propositio I. *Theorema* I.

✠ Si secundùm aliquam rectam feratur quoddam punctum æquè velociter sibi ipsi latum, & sumantur in ipsa duæ lineæ: sumptæ eandem habebunt rationem inter se, quam tempora, in quibus punctum istas lineas pertransierit.

Prop. II. *Theor.* II.

✠ Si duorum punctorum vnoquoque pariformiter secundùm rectam lineam lato, non quidem æquali simul celeritate, capiantur in vnaquaque linearum duæ lineæ, quæ primæ in æqualibus sub punctis discurrentibus teritur, & item secundæ, eandem inter se rationem habent acceptæ lineæ.

Prop. III. *Probl.* I.

Circulis quotlibet datis, possibile est rectam sumere, quæ sit maior circulorum datorum peripheriis.

Prop. IV. *Probl.* II.

Duabus datis lineis inæqualibus, recta, & circuli circumferentia, possibile est sumere rectam, maiore quidem linearüm datarum minorem, minore verò maiorem. *Vide Lemma.*

Prop. V. *Probl.* III.

Circulo dato, & linea recta tangente circulum, possible est à centro circuli ducere rectam ad tangentem, itaut quæ recta fuerit inter tangentem & circuli circumferentiam, ad radium circuli minorem rationem habeat, quàm circumferentia circuli, quæ est inter contactam & productam ad datam cuiuscunque circuli circumferentiam.

Lemma.

Si circulum tetigerit quæpiam linea, impossibile est ducere aliam lineam à puncto contactus, quæ circulum non secet ab ea parte, qua angulum recto minorem efficit cum radio ducto à centro ad punctum contactus.

Prop. VI. *Probl.* IV.

Circulo dato, & in circulo linea minore, diametro, possibile est à centro circuli ad peripheriam ipsius eiaculari rectam, secantem eam quæ in circulo data est, lineam; ita vt comprehensa recta inter peripheriam & rectam in circulo datam ad coniunctam à termino eiaculatæ, qui est in circumferentia ad alteram partem eius rectæ, quæ in circulo data est, ordinatam rationem habeat; modo tamen vt data ratio minor sit ea quam habet dimidia datæ in circulo, ad eam quæ à centro perpendiculariter in ipsam ducitur.

Prop. VII. *Probl.* V.

Iisdem datis, & recta data extra circulum porrecta possibile est à centro lineam eiaculari ad extrà porrectam, itaut quæ fuerit inter circumferemtiam & porrectam ad lineam iunctam à termino eiaculatæ ad terminum porrectæ ordinatam rationem habeat: dummodo tamen data ratio maior fuerit ea, quam habet dimidia datæ in circulo, ad eam quæ à centro perpendiculariter in ipsam agitur.

Lemma I.

Si recta in circulo ab alia recta bifariam secatur, & ad angulos rectos: impossibile est ab eodem puncto, à quo secans ducitur, aliam secantem agere in sectam, itaut partes inter sectam, & peripheriam circuli æquales sint: quod tamen fieri potest, si secta linea bifariam non dirimitur. *Videatur Lemma 2.*

Prop. VIII. *Probl.* VI.

Circulo dato, & in circulo linea minore ipsa diametro, & alia tangente circulum in termino lineæ in circulo datæ; possibile est à centro circuli eiaculari aliquam rectam ad rectam datam, itaut pars ipsius contenta inter peripheriam circuli, & datam lineam in circulo ad partem comprehensam à tangente, ordinatam rationem habeat: si modo data ratio sit minor ea quam habet dimidia datæ in circulo, ad eam quæ à centro circuli perpendiculariter in ipsam ducitur.

Prop. IX.

Prop. IX. Probl. VII.

Iisdem datis, & in circulo data linea vlterius porrecta: possibile est à centro circuli eiaculari rectam in datam porrectam, itaut pars inter circumferentiam & porrectam ad conceptam in tangente à puncto contactus, ordinatam rationem habeat: si modo data ratio maior fuerit ea quam habet dimidia datæ in circulo ad eam quæ à centro perpendiculariter in ipsam ducitur.

Prop. X. Theor. III.

✠ Si lineæ deinceps ponantur quotcumque, æquali sese inuicem excedentes, fuerit verò excessus æqualis minimæ: Et aliæ lineæ ponantur numero quidem æquales illis, magnitudine vero singulæ pares maximæ; quadrata ab æqualibus maximæ, comprehensa, & quod fit à maxima quadratum, & quod comprehenditur sub minima & linea æquali omnibus æqualiter sese excedentibus, tripla erunt omnium quadratorum linearum sese æqualiter excedentium.

Lemma.

✠ Si fuerint duæ quantitates eiusdem speciei in aliqua ratione, antecedentisque pars sit ad partem consequentis in minori ratione quàm tota ad totam; reliquum antecedentis erit ad reliquum consequentis in maiori ratione quàm tota ad totam

Manifestum I.

✠ Inde igitur patet quod quadrata omnia quæ ab æqualibus maximæ describuntur, eorum quadratorum quæ ab æquali sese inuicem excedentibus fiunt, minora sint quàm tripla.

Minifestum II.

Reliquorum verò, sublato maximæ quadrato, maiora sunt quàm tripla.

Manifestum III.

Propterea si similes figuræ describantur ab omnibus quæ sese æquali inuicem superant, & ab iis quæ sunt illarum maximæ æquales: quæ sanè fiunt ab æqualibus maximæ, eorum quæ fiunt ab iis quę sese æqualiter excedunt, minora sunt quàm tripla: Sublata verò figura quæ describitur à maxima reliquarum sunt plusquam tripla.

Prop. XI. Theor. IV.

Si lineæ deinceps quotlibet ponantur, æqualiter sese mutuo excedentes, & aliæ lineę constituantur, multitudine quidem vna pauciores quàm sint illę ęqualiter sese inuicem excedentes, magnitudine verò singulę æquales illarum maximæ, quadrata omnia quæ ab æqualibus maximę, ad quadrata quę sese æqualiter mutuo excedunt, fiunt, sine minima, minorem rationem habent, quàm quadratum

quod à maxima ad æquale duobus, scilicet comprehenso sub maxima & minima, & tertiæ parti quadrati excessus quo maxima minimam superat: ad quadrata autem quæ fiunt ab æqualiter sese inuicem excedentibus, sine eo quadrato, quod fit ab omnium maxima, hac ipsa maiorem rationem habent.

ΕΠΙΦΟΡΑ.

Hinc concludimus, quod si excessus maximæ supra minimam fuerit minimæ æqualis, fore vt ratio quadrati maximæ ad rectangulum sub maxima & minima, cum tertia parte quadrati excessus maximæ supra minimam, sit vt 12. ad 7.

Manifestum IV.

Idcirco si similes figuræ describantur ab omnibus, tum ab iis quæ sese mutuo æqualiter excedunt, tum ab æqualibus maximæ: figuræ omnes ab æqualibus maximæ descriptæ ad eas quæ ab iis quæ mutuo sese æqualiter excedunt, sine ea quæ à minima fit figura, minorem rationem habebunt quàm quadratum quod à maxima ad æquale duobus tam ei, quod comprehenditur à maxima, & minima, & tertiæ parti eius, quod ab excessu fit, quo maxima minimam superat: ad eas verò quæ ab iisdem lineis fiunt figuris, sine ea quæ à maxima describitur eadem illa ratione maiorem.

Prop. XII. *Theor.* V.

Si in spiralem vna quidem circumuolutione descriptam, à principio spiralis, rectæ quotlibet cadant, quæ æquales inter se angulos contineant, sese mutuò æqualiter excedent. *Vide Corollarium.*

Lemma I.

Si tres lineæ ordine sese inuicem æquali excessu superauerint, maxima, & minima simul duplæ sunt mediæ.

Lemma II.

Si à iugo trianguli decidit linea in basim bifariam diuidens angulum iugi, duo latera angulum hunc continentia maiora sunt quàm dupla eius quæ à iugo demissa linea.

Prop. XIII. *Theor.* VI.

Si recta linea spiralem tetigerit, in vno tantùm puncto tanget.

Prop. XIV. *Theor.* VII.

✠ Si in spiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ lineæ à puncto, quod est principium spiralis, & producantur ad circumferentiam vsque primi circuli: eandem rationem inter se habebunt istæ in spiralem incidentes, quam arcus circuli, medij inter terminum spiræ, & limites linearum productarum in circumferentia factos, sumptis in consequentia arcubus à fine spiralis.

Prop. XV. Theor. VIII.

Si in Helicem in secunda reuolutione factam lineæ rectæ ceciderint à principio Helicis; eandem rationem eiusmodi rectæ ad inuicem quàm dicti arcus cum tota circuli circumferentia circuli simul assumpta, habebunt.

Manifestum V.

Hoc ipso demonstrabitur, quod si in spiralem ex tertia reuolutione ortam ceciderint rectæ lineæ, eandem inter se rationem habebunt quam dicti arcus cum integra circuli circumferentia bis accepta. Similiter verò omnes cadentes in alias spirales demonstrantur eandem habere rationem quam dicti arcus cum integra circuli circumferentia toties assumpta, quotus est vnitate minor, reuolutionum numerus, licet alterutra cadens in finem spiralis incidat.

Prop. XVI. Theor. IX.

✠ Si spiralem ex prima reuolutione ortam recta linea tetigerit, & à contactu recta linea ducta fuerit ad punctum quod sit principium spiralis, quos facit angulos tangens cum hac ducta inæquales erunt, & quidem qui in antecedentia vergit, obtusus est; qui in consequentia acutus.

Manifestum VI.

Similiter verò demonstrabitur, quod si tangens spiralem in fine ipsius tetigerit, idem omnino sequetur.

Prop. XVII. Theor. X.

Quinimo si spiralem ex secunda reuolutione natam recta linea tetigerit, idem accidet.

Manifestum VII.

Eadem verò accident, & si tangens per terminum spiralis attingat. Similiter verò demonstrabitur: Quod si spiralem ex quacunque reuolutione natam recta tetigerit, etiam in fine ipsius, quod inæquales angulos faciet ad eam, quæ à tactu ad principium spiræ coniungitur: & eum quidem qui fiet in antecedentibus, obtusum, alium verò in consequentibus acutum.

Lemma.

Si quatuor magnitudinum prima fuerit minor tertia, & secunda maior quarta: prima minorem rationem habebit ad secundam, quàm tertia ad quartam. Contrà verò si prima fuerit maior tertia, & secunda minor quarta, prima maiorem habebit rationem ad secundam, quàm tertia ad quartam.

Prop. XVIII. Theor. XI.

Si spiralem ex prima circumuolutione ortam recta linea tetigerit

sibile est figuram planam describere, & aliam eidem inscribere, ex similibus sectionibus compositam, ita vt circumscripta maior sit quàm inscripta quocumque proposito spatio.

Manifestum X.

Inde manifestum est, quod possibile est circa dictum spatium figuram, qualis dicta sit, scribere, ita vt circumscripta figura maior sit spatio, & quidem quantitate minori quocumque proposito spatio: & rursus aliam inscribere, ita vt spatium similiter maius sit inscripta figura quantitate minori, quocumque proposito spatio.

Prop. XXII. *Probl.* IX.

Circa sumptum spatium quod comprehendatur sub helice ex secunda reuolutione descripta, & recta linea que est secunda earum quæ principium faciunt reuolutionis: possibile est figuram planam conscribere ex similibus sectoribus constantem, & aliam in ipso inscribere, ita vt circumscripta maior sit inscripta minori quantitate quàm sit quodcumque propositum spatium.

Manifestum XI.

Liquet itaque quod possibile sit & circumscribere figuram circa sumptum spatium, quæ maior sit quantitate minori, omni proposito spatio, & rursus sumptum spatium maius esse inscripta figura quantitate minori, omni proposito spatio.

Manifestum. XII.

Hoc ipso autem modo manifestum est, quod possibile sit circa sumptum spatium comprehensum sub spirtali ex quantacumque reuolutione orta, & recta linea quæ sit in principio reuolutionis ab eodem numero quam reuolutio denominata, conscribere figuram planam qualis dicitur; ita vt circumscripta hæc figura maior sit assumpto spatio, quantitate minori quolibet proposito spatio, & rursus inscribere, ita vt assumptum spatium maius sit hac inscripta figura quantitate minori omni proposito spatio.

Prop. XXIII. *Probl.* X.

Sumpto spatio comprehenso sub spirali, quæ sit minor ea quæ ex vna reuolutione generatur, nec habeat terminum principium spiralis, & lineis rectis, quæ à principio spiralis ducantur; possibile est circa huiusmodi spatium figuram planam circumscribere ex similibus sectoribus conflatam, & aliam inscribere, ita vt circumscripta figura inscripta sit maior minori quidem quantitate quàm sit propositum spatium.

Manifestum XIII.

Hinc igitur manifestè patet quòd possibile sit circa dictum spatium planum, quale dictum est, conscribere, itaut circumscripta figura

S ii

maior sit spatio quantitate minori, quàm sit propositum spatium.

Prop. XXIV. Theor. XIV.

✠ Comprehensum à spirali ex prima reuolutione nata, & prima linea quæ principium est reuolutionis: spatium, tertia pars est primi circuli.

Corollar. 1. Hinc sequitur reliquum circuli, quod superest, post spatium illud ablatum, esse duas tertias circuli, scilicet spatij duplum.

Corollar. 2. Hinc etiam deducimus, quòd si à principio spiralis in ipsam recta linea ducatur, spatium contentum spirali, & hac recta linea tertiam partem esse eius partis circuli, qui centro principio spiralis & interuallo linea in spiralem incidente describitur, contentæ circumferentia huiusce circuli, & duabus lineis, nempe incidente, tum parte eius quæ principium est reuolutionis, à circulo resecta.

Prop. XXV. *Theor.* XV.

Spatium sub helica ex secunda reuolutione descripta, & recta linea, secunda eius quæ est in principio reuolutionis, ad secundum circulum hanc habet rationem, quam habent 7. ad 12. quæ eadem est quam habent hæc duo, nempe quod comprehenditur sub radio secundi circuli, & radio primi circuli, & tertia pars quadrati excessus quo excedit radius secundi circuli radium primi circuli, ad quadratum à radio secundi circuli.

Manifestum XIV.

Hoc ipsomet modo demonstrabitur, & quod comprehensum spatium sub spirali ex quacumque circumuolutione generata, & recta eodem numero quo reuolutiones denominata, ad circulum eodem rursus numero significatum, quo circumuolutiones, rationem habet quam complexum, tum ex eo quod comprehenditur sub radio ipsiusmet circuli secundùm ipsum numerum dicti, & radio circuli secundùm numerum vnitate minorem, quàm sit reuolutionum numerus denominati, tum ex tertia parte quadrati quod fit ab excessu, quo excedit radius maioris circuli prædictorum, radium minoris circuli prædictorum, habet ad quadratum eius, quæ ducitur à centro maioris circuli prædictorum.

Prop. XXVI. *Theor.* XVI.

Comprehensum spatium sub spirali, quæ est minor ea quæ ex vna reuolutione fit, nec habet terminum principium spiralis, & rectis quæ à terminis ipsius in principium spiralis ducuntur, ad sectorem habentem radium æqualem maiori earum, quæ à termino ad principium spiralis ducitur: arcum verò qui intercipitur inter rectas ductas secun-

dùm easdem partes spiralis, hanc habet rationem, quam habent hæc duo, rectangulum comprehensum sub rectis à terminis in principium spiralis, ductis, & tertia pars quadrati excessus quo maior dictarum linearum superat minorem, ad quadratum maioris linearum à terminis ad spiralis principium coniunctarum. *Vide Lemma, & Corollarium.*

Lemma. Expositis tribus lineis inæqualibus, rectangulum sub maiori & media superat id quod fit à media & minima, quantitate rectanctanguli sub media & parte, qua maxima superat minimam comprehensi.

Prop. XXVII. *Theor* XVII.

✠ Spatiorum comprehensorum sub spiralibus, & rectis lineis quæ in circumuolutione sunt, tertium quidem secundi duplum est: quartum verò triplum: quintum autem quadruplum, & semper quod sequitur, secundum numeros qui deinceps sunt, multiplex est secundi spatij. Primum verò spatium sexta pars est secundi.

Prop. XXVIII *Theor.* XVIII.

Si in Helica ex quacumque reuolutione generata duo puncta sumantur, quæ non sint ipsius termini: à sumptis verò punctis iungantur rectæ ad principium Helicis: & centro quidem principio spiralis interuallis verò lineis à punctis ad principium spiralis ductis, circuli describantur: comprehensum spatium sub maiori arcuum medio inter ductas lineas, & helica media inter easdem rectas, ac recta linea producta, hanc habebit rationem ad comprehensum spatium sub minori arcu, & eadem spirali, & alia recta coniungedte vtriusque terminos, quam radius minoris circuli cum duabus tertiis excessus, quo excedit radius maioris circuli radium minoris, ad radium minoris circuli cum vna tertia parte eiusdem excessus.

Prop. XXIX. *Theor.* XIX.

✠ Si in spiralem ex vna reuolutione ortam, & à principio spiralis recta linea ceciderit: spatium comprehensum sub spirali, & linea prima eam rationem habet ad spatium contentum sub prima spiralis parte & linea incidente, quam habet cubus primæ lineæ ad cubum lineæ incidentis. *Videatur Corollarium.*

Lemma. Si fuerint duo quantitatum inæqualium ordines, in quorum primo sit prima ad secundam, & secunda ad tertiam, vt in secundo prima ad secundam, & secunda ad tertiam: erit in illo differentia primæ & secundæ ad differentiam eiusdem primæ & tertiæ, vt in hoc differentiam primæ & secundæ, ad differentiam primæ & tertiæ.

Problema 1. Propositi anguli imperatam partem assignare.

Problema 2. Omnes figuras quotquotlibet laterum in circulo describere. Cognosces autem facilè quot rectis æquiualeant anguli figuræ propositæ; duplicatus enim triangulorum numerus, in quot figura diuiditur, prædictum numerum constituit. Exempli gratia, Heptagonum in quinque triangulos dirimitur, quapropter decem angulos rectos angulis suis continet, quorum vnusquisque recto & ⅖ recti par est. Idem reperies (mi THEOTIME) si à numero laterum duplicato quaternarium auferas.

ARCHIMEDIS
DE PLANIS ÆQVIPONDERANTIBVS SEV ISORROPICIS, VEL CENTROBARICIS.
LIBER PRIMVS.

Petitiones.

I. ÆQVALIA pondera ab æqualibus distantiis æquiponderare.
II. Æqualia verò pondera ab inæqualibus distãtiis non æquiponderare, sed inclinari ad grauitatem quæ à distantia maiori tendet.
III. Si ponderibus æquiponderantibus ab aliquibus distantiis alteri ipsorum ponderum adiiciatur aliquid, non ampliùs æquiponderare, sed inclinari ad pondus illud quod additum est.
✠ IV. Similiter verò, & si ab altero ponderum auferatur aliquid: non æquiponderare, sed inclinari versus illud pondus à quo nihil ablatum fuerit.
✠ V. Æqualium & similium figurarum planarum inter se mutuo conuenientium, centra grauitatum inter se mutuo conuenire.
✠ VI. Puncta verò similiter poni in similibus figuris, à quibus ad æquales angulos ductæ rectæ, angulos ad latera similium rationum æquales efficiunt.
✠ VII. Inæqualium verò, sed similium centra grauitatum similiter esse posita.
✠ VIII. Si magnitudines ab æqualibus distantiis æquiponderant, etiam alias ipsis æquales ab iisdem distantiis æquiponderare.

9. Cuiuscunque figuræ si fuerit ambitus in easdem partes cauus, centrum grauitatis figuræ intus esse.

10. Planum contentum sub recta linea, & rectanguli coni sectione, planum parabolicum appellari.

11. Similes sectiones coni esse, in quarum singulis, ductis lineis basi parallelis numero æqualibus, sunt ipsæ parallelæ, & bases ad abscissas, ab ipsis parallelis à vertice partes diametrorum, in eadem ratione, tum abcissæ ipsæ ad abscissas.

12. Figuras euidenter descriptas in portionibus parabolicis esse similes, quæ describuntur numero laterum pares.

Propositiones & Theoremata.

1. Æquiponderantia grauia ab æqualibus distantijs, æqualia sunt.

2. Inæqualia grauia non æquiponderant ab æqualibus distantijs, sed inclinabuntur ad maius.

3. Inæqualia grauia ab inæqualibus distantiis æquiponderant, & quidem maius à minori.

4. Si duę æquales magnitudines non habent idem centrum grauitatis: magnitudinis ex vtrisque magnitudinibus compositæ centrum grauitatis est in medio rectæ lineæ centra grauitatum ipsarum magnitudinum coniungentis.

5. Si trium magnitudinum cētra grauitatis in rectam lineam fuerint posita, & magnitudines æqualem grauitatem habuerint. Tum quæ inter centra lineæ, fuerint æquales: magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis erit punctum, quod est mediæ ipsarum centrum grauitatis. *Videatur corollarium.*

Manifestum I.

Vnde manifestum est, quod si quotcunque magnitudinum numero imparium centra grauitatis in recta linea fuerint constituta, sique æqualiter abfuerint à media magnitudine & æqualem habuerint grauitatem, nempe si rectæ lineæ inter earum centra fuerint æquales: magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis erit punctum quod & mediæ ipsarum centrum est grauitatis.

Manifestum II.

Si quoque pares fuerint multitudine magnitudines, & centra grauitatis earum in rectam fuerint constituta & media ipsorum æqualem grauitatem habuerint, fuerintque lineæ inter centra rectæ æquales: magnitudinis ex omnibus illis magnitudinibus compositæ grauitatis centrum erit medium rectæ lineæ coniungentis centra grauitatis magnitudinum, vt dictum est. *Vide lemma.*

6. Commensurabiles magnitudines ex distantijs reciprocis eandem rationem habentibus quam pondera, ęquiponderant.

7. At vero si incommensurabiles fuerint magnitudines, similiter æquiponderabunt à distantijs permutatim rationem habentibus eandem quam magnitudines.

Lemma I. Quolibet plano in duas partes secto, si partium centra recta linea coniungantur, agetur hæc recta per centrum totius.

Lemma II. Si æquiponderantibus æquiponderantia addantur, omnia æquiponderant: aut ab æquiponderantibus si æqualiter ponderantia auferantur, etiam reliqua æquiponderant.

8. Si ab aliqua magnitudine resecetur quædam portio non habens idem centrum cum toto: reliquæ magnitudinis centrum grauitatis est in recta linea coniungente centra grauitatum totius magnitudinis, & ablatæ portionis, producta ad easdem partes, versus quas centrum est totius magnitudinis, nempe si assumpta aliqua pars ex producta, coniungente dicta centra, habeat eandem rationem ad illam quæ est inter centra, quam habet grauitas detractæ magnitudinis ad grauitatem reliqui, erit centrum illud assumptæ terminus.

9. Cuiuscunque parallelogrammi centrum grauitatis est in recta linea coniungente opposita parallelogrammi latera bifariam facta.

10. Cuiuscunque parallelogrammi centrum grauitatis est punctum, quo diametri coincidunt.

11. Si duo triangula similia inter se fuerint, & in ipsis puncta similiter posita ad ipsa triangula alterúmque punctum trianguli in quo steterit, centrum grauitatis fuerit, reliquum quoque punctum centrum est grauitatis eius in quo stat trianguli: similiter verò dicimus puncta iacere in similibus figuris illa, à quibus rectæ ad æquales angulos ductæ lineæ æquales, ad similia latera angulos faciunt.

12. Si duo triangula similia fuerint, vnius verò triãguli centrum grauitatis fuerit in recta, quę ducta est ab vno angulo in mediam basim: etiam reliqui trianguli centrũ grauitatis erit in linea similiter ducta.

Lemma I. Si triangulus bifariam dirimatur linea à superiori angulo in oppositum laus educta, ipsumque bifariam dirimente: basis autem semisses in partes æquales distribuantur, & à sectionum punctis rectæ intra triangulum ducantur parallelæ illi bifariam triangulum secanti harum parallelarum binæ æqualiter remotæ à centro æquales erunt.

Lemma 2. *pendet à figura.*

Lemma 3. Si trianguli bina latera lineæ secuerint basi ęquidistantes & ab angulo opposito in reliquam basim lineæ demittantur, hæc illas, & basim secant proportionaliter: tum vicissim hæ, & latera secta.

ab illis,& basi proportionaliter secantur.

Lem. 4. Si trianguli omnia latera bifariam secentur,lineisque iungantur sectionum puncta,fient quatuor similia toti,& inter se & æqualia triangula.

18. Cuiuscumque trianguli centrum grauitatis est in recta linea,quæ ab angulo in mediam basim ducitur.

19. Cuiuscunque trianguli centrum grauitatis est punctum, in quod coincidunt lineę ductæ ab angulis trianguli in media latera opposita. *Vnde sequitur lineam ab angulo trianguli per centrum ipsius grauitatis actam in oppositum latus,ipsum bifariam secare.*

Lemma I. Si trapezium duo latera habuerit inæqualia & parallela, quæ bifariam secta recta linea iungantur è sectionum punctis, reliqua vero latera producantur vnà cum linea iungente:latera producta in iūgēte cōcurrent:Eritque in iungente centrum grauitatis trapezij.

Lemma II.Si per centrum grauitatis trianguli agatur linea parallela vni ex lateribus : inter eam & ductum parallelum latus resecabitur tertia pars aliorum laterum. Et si linea ducta parallela vni lateri resecuerit tertiam reliquorum partem, centrum grauitatis trianguli in ea continebitur.

Hinc sequitur lineæ cuiuslibet eductæ ab angulo per centrum grauitatis trianguli in oppositum latus,tertiam partem contineri inter centrum, & oppositum latus.

Lemma III. Quatuor magnitudinum proportionalium, duplum primæ cum secunda est ad duplum secundæ cum prima, vt duplum tertiæ cum quarta ad duplum quartę cum tertia.

Lemma 4. Si è duobus trianguli lateribus in latera opposita lineæ agantur,quæ ea similiter secent:ipsæ quoque se diriment in ratione quam habet quodlibet latus ad suam partem angulo proximam, tum si à reliquo angulo per punctum intersectionis præcedentium tertia linea ducatur in oppositum latus,ipsum bifariam secabit.

13. Cuiuscumque trapezij duo latera parallela habentis, centrum grauitatis est in recta linea coniungente bisectiones parallelorum, ita diuisa, vt portio ipsius terminata in bisectione minoris parallelorum ad reliquam sectionem,habeat eam rationem quam habet æqualis duplæ maioris cum minori ad duplam minoris cum maiori parallelorum laterum. *Ex dictis sequens problema nascitur:* Cuiuscumque rectilineæ figuræ centrum grauitatis reperire.

Theorema.

Si fuerint duæ qualitates in æquilibrio,quæ ambæ vel ambarū vna, radijs adhæserint:à centris autem grauitatum earumdem in radios,

quibus appenduntur, perpendiculares agantur: incidēt hæ in radiorum puncta, à quibus si appensæ fuerint eædem quantitates, ita vt iam radijs non toto corpore adhæreant, sed tantùm ab illis punctis appendeant, manebunt rursus in æquilibrio. *Vide corollarium.*

ARCHIMEDIS

ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν.

LIBER SECVNDVS.

Problema Riualti.

PLANO sub recta linea & parabolica sectione contento parallelogrammum æquale reperire, ipsúmque ad datam rectam lineam applicare, ita vt recta hæc illud bifariam dirimat.

Propositiones & Theoremata.

1. Si duo spatia comprehensa sub recta linea & rectanguli coni sectione, quæ possumus ad datam rectam lineam applicare, idem grauitatis centrum non habeant, compositæ ex vtrisque magnitudinibus centrum grauitatis erit in recta linea coniungente grauitatis eorum centrum, quæ dictam rectam sic diuiserat, vt portiones ipsius permutatim eandem rationem ac ipsa spatia habuerint.

Manifestum I.

Si in portione sub recta & rectanguli coni sectione, comprehensa triangulum inscribatur eandem basim habens ac portio, & altitudinem æqualem: & rursus in reliquis portionibus triangula inscribantur easdem habentia bases cum portionibus & altitudines æquales, & semper in reliquis portionibus triangula fiant hoc ipso modo: Nata hinc figura in portione euidenter inscribi dicatur. Manifestum verò est, quod figuræ sic inscriptæ angulos à vertice quidem portionis deinceps proximos iungentes lineæ sint parallelæ basi portionis, & quod à diametro portionis bifariam diuidantur, diametrum verò diuidant in rationes numerorum deinceps imparium vna dicto ad verticem portionis. Hoc autem demonstrandum fuit in ordinibus.

Si verò in portione comprehensa sub recta linea & rectanguli coni sectione rectilineum euidenter inscribatur: inscripti centrum grauitatis erit in diametro portionis.

Lemma 1. Parabolæ omnes sunt similes.

Lemma 2. Si fuerit sicut totum ad ablatum; & rursus vt totum ad reliquum, sic totum ad reliquum: Erit ablatum ad reliquum, vt ablatum ad reliquum, & vt totum ad totum, sic totum ad totum.

Lemma 3. Si fuerit prima ad secundam vt tertia ad quartam, prima verò fuerit ad partem secundæ, vt tertia ad partem quartæ, erunt secunda & quarta diuisæ in eadem ratione, & contra.

Lemma 4. Si duæ lineæ similiter secantur, & à punctis tam extremitatum quam sectionum lineæ assurgant parallelæ in similibus rationibus quarum extrema rectis iungantur: trapezia quæ hinc nascentur, erunt inter se sicuti trapezia quæ orientur illinc. *Vide coroll.*

3. Si in vtraque datarum portionum similium comprehensum sub recta & rectanguli coni sectione rectilineæ figuræ euidenter describātur, quarum latera sint multitudine æqualia: figurarum centra grauitatum similiter secant diametros portionum.

4. Cuiuscumque portionis comprehensę sub recta linea, & rectanguli coni sectione, centrum grauitatis est in portionis diametro.

Lemma. Si in parabola figura euidenter inscribatur, duarúmque oppositarum portionum relictarum centra grauitatum linea recta copulentur: centrum magnitudinis ex ambabus portionibus compositæ incidet in diametrum totius. *Vide corollarium.*

5. Si in portione comprehensa sub recta linea, & rectanguli coni sectione, rectilinea figura euidēter inscribatur: totius portionis centrū grauitatis propius erit vertici portionis quàm inscriptæ figuræ cētrū.

Corollarium. Ex demonstratis deducere possumus, quod si ex quatuor magnitudinibus prima in maiori fuerit ratione ad secundam quàm tertia ad quartam, esse secundam minorem quarta.

Lemma 1. Quatuor magnitudinum si prima quàm secunda maior fuerit, & tertia quàm quarta, prima est ad quartam in maiori ratione, quàm secunda ad tertiam.

Lemma 2. Figuræ γνωρίμως inscriptæ in parabola; quanto pluribus lateribus constabit, tanto propiùs centrum grauitatis accedet ad verticem portionis.

6. Portione data comprehensa recta linea, & rectāguli coni sectione, possibile est in ipsa sectione figuram euidenter inscribere, ita vt recta linea quæ media fuerit inter centra grauitatum portionis, & inscriptæ figuræ minor sit, qualibet linea recta proposita.

7. Duarum portionum similium comprehensarum sub recta linea, & rectanguli coni sectione, centra grauitatum in eadem ratione secant diametros.

Lemma. Si prima magnitudo fuerit quadrupla secundæ, & secunda tripla tertiæ, prima secundæ & tertiæ simul, tripla erit.

8. Cuiuscumque portionis comprehensæ sub recta, & rectanguli coni sectione, centrum grauitatis dirimit portionis diametrum, ita

vt pars ipſius quę eſt ad verticem, ſit ſeſquialtera partis, quę eſt verſus baſim. *Videantur duo corollaria.*

Lemma I. Quatuor magnitudinum inæqualium in continua proportione exiſtentium exceſſus in eadem proportione exiſtunt.

Lemma II. Si fuerint aliquot magnitudines, & aliæ totidem in eadem ratione: vt fuerint in primo ordine omnes præcedentes ad vltimam, ſic erunt in alio ordine omnes præcedentes ad vltimam: *Vide corollarium.*

Lemma III. Magnitudo magnitudinis ſeſquialtera, trium eiuſdem quintarum eſt dupla ſeſquialtera.

IX.

Si quatuor fuerint lineæ proportionales in continua proportione, & quam habet rationem minima ad exceſſum quo maxima excedit minimam, eandem aliqua aſſumpta habeat ad tres quintas exceſſus, quo ſuperat maxima proportionalium tertiam: quam verò rationem habet æqualis duplæ maximæ proportionalium & quadruplæ ſecundæ & ſextuplæ tertiæ & triplæ quartæ ad æqualem quintuplæ maximæ, & decuplæ ſecundæ & decuplæ tertiæ, & quintuplæ quartæ, eadem habeat quædam aſſumpta ad exceſſum quo maxima proportionalium tertiam ſuperat: hæ duæ aſſumptæ ſimul erunt duæ quintæ ipſius maximæ.

Lemma. Si in aliqua parabola lineæ ordinatim ducantur: portiones ab ipſis conſtitutæ ſe habent inter ſe vt cubi baſium, vel ſemiſſium baſium ipſarum portionum.

X.

Cuiuſcumque fruſti à rectanguli coni ſectione dirempti centrum grauitatis eſt in recta linea quæ diameter eſt fruſti: eo ſcilicet modo iacens in media quinta huius rectæ lineæ in quinque partes æquales ſectæ, vt particula ipſius quintæ propior minori baſi fruſti ad reliquam particulam eam rationem habeat quam habet ſolidum habens quidem baſim quadratum maioris baſis fruſti, altitudinem verò lineam æqualem vtrique, & duplæ maioris baſis & minori ipſarum.

Hiſce de æquiponderantibus libris tractatus Commandini, & Valerij ſubiungendus eſſent, vt centrum grauitatis perfectiùs in omni corpore intelligeretur; niſi illud in mechanicorum libris facturi eſſemus, quos ſi placet (mi THEOTIME) expectabis; accipieſque interim libros qui ad hydraulicam attinent; de qua etiam, Deo iuuante, in mechanicis agendum erit.

ARCHIMEDIS περὶ τῶν ὀχουμένων, hoc est de insidentibus in humido.

LIBER I.

Positiones, seu Hypotheses.

I.

✠ PONATVR humidi eam esse naturam, vt partibus ipsius æqualiter iacentibus, & continuatis inter sese, minus pressa à magis pressa expellatur: vnaquæque autem pars eius premitur humido supra ipsam existente ad perpendiculum, si humidum sit descendens in aliquo, aut ab alio aliquo pressum.

II.

✠ Ponatur eorum quæ in humido sursum vel deorsum feruntur, vnumquodque sursum vel deorsum ferri secundùm perpendicularem, quæ per centrum grauitatis ipsorum ducitur. *His addit. 3. Riualtus,* nempe.

III.

✠ Humidum omne pondus habere.

Propositiones & Theoremata.

I.

✠ SI superficies aliqua plano secetur per idem semper punctum; sitque sectio circuli circumferentia centrum habens punctum illud, per quod plano secatur: sphæræ superficies erit.

II.

✠ Omnis humidi consistentis atque mouentis superficies sphærica est, cuius sphæræ centrum est idem quod centrum terræ.

III.

✠ Solidarum magnitudinum quæ æqualem molem habentes æquè graues sunt atque humidum in humidum consistens demissæ mergentur, ita vt ex humidi superficie nihil extet: non tamen adhuc deorsum ferentur.

IV.

✠ Solidarum magnitudinum quæcumque leuior humido fuerit, demissa in humidum manens non demergetur tota, sed aliqua pars ipsius ex humidi superficie extabit.

V.

✠ Solidarum magnitudinum quæcumque leuior humido fuerit

demissa in humidum *manens*, vsque eo demergetur vt tanta moles humidi, quanta est partis demersæ, eandem quam tota magnitudo grauitatem habeat. VI.

Solidæ magnitudines humido leuiores in humidũ impulsæ, sursum ferũtur tanta vi, quanto humidum molem habẽs magnitudini æqualẽ, grauius est ipsa magnitudine. VII.

✠ Solidæ magnitudines humido grauiores demissæ in humidum ferentur deorsum, donec descendant: & erũt in humido tanto leuiores, quanta est grauitas humidi molem habentis solidæ magnitudini æqualem.

Lemma. Si circuli se secuerint, iunganturque eorum sectiones lineâ: ipsa dirimetur bifariam, & ad angulos rectos ab alia linea quæ eorum centra coniunget. VIII.

✠ Si aliqua magnitudo solida leuior humido, quæ figuram portionis sphæræ habeat, in humidum demittatur, ita vt basis portionis non tangat humidum: figura insidebit recta, ita vt axis portionis sit secundùm perpendicularem.

Et si ab aliquo inclinetur figura, vt basis portionis humidum contingat: non manebit inclinata si demittatur, sed recta restituetur.

IX. Quod si figura humido leuior in humidum demittatur, ita vt basis tota sit in humido: insidebit recta, ita vt axis ipsius secundùm perpendicularem constituatur.

* Accuratè legendi sunt isti libri, cùm in ijs multorum arcanorum, & machinarum admirabilium semina insint; nec possit afferri ratio plurimorum effectuum, qui tam in arte, quàm in natura quotidie cernuntur, nisi ex istis libris depromatur: quibus alia de differentiis ponderum in aëre, & aqua iungi possent; quod in mechanicis commodius fieri poterit.

ARCHIMEDIS DE IIS QVÆ vehuntur in humido.

LIBER II.

Propositiones & Theoremata.

I.

✠ SI magnitudo aliqua humido leuior demittatur in humidum, eam in grauitate proportionem habebit ad humidum æqualis molis

molis, quam pars magnitudinis demersa habet ad totam magnitudinem.

Lemma. Si parabolem contingat linea in puncto, sumatur vero in diametro paraboles linea æqualis ei quæ vsque ad axem: tum à puncto contactus ducatur linea æquidistans diametro, in quam ab initio lineæ assumptæ ducatur perpendicularis secans ęquidistantem & tandem à fine lineæ assumptæ per punctum sectionis æquidistantis ducatur linea in tangentem, ad eandem linea ducta erit perpendicularis.

II.

✠ Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quàm sesquialterum eius quæ vsque ad axem, quamcumque proportionem habens ad humidum in grauitate: demissa in humidum, ita vt basis ipsius humidum non contingat, & posita inclinata non manebit inclinata, sed recta restituetur. Rectam dico consistere talem portionem, quando planum quod ipsum secuit, superficiei humidi fuerit æquidistans.

III.

✠ Recta portio conoides rectangulæ quando axem habuerit minorem quàm sesquialterum eius, quæ vsque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in grauitate, demissa in humidum, ita vt basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed ita restituetur, vt axis ipsius secundùm perpendicularem fiat.

IV.

✠ Recta portio rectangulæ conoidis, quando fuerit humido leuior, & axem habuerit maiorem quàm sesquialterum eius, quæ vsq; ad axem, si in grauitate ad humidum æqualis molis, non minorem proportionem habeat ea, quam quadratum quod fit ab excessu, quo axis maior est, quàm sesquialter eius, quod vsque ad axem, habet ad quadratum quę ab axe: demissa in humidum, ita vt basis ipsius humidum non contingat, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur.

Lemma 1. Si prima ad secundam non maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; habebit conuertendo secunda ad primam, non minorem proportionem quàm quarta ad tertiam.

Lemma 2. Si fuerit tota ad partem sui in non minori ratione quàm alia tota ad partem sui: erit quoque conuertendo tota prima ad sui reliquum in non maiori ratione quàm secunda tota ad sui reliquum.

V.

✠ Recta portio conoidis rectangulæ quando leuior humido axem habuerit maiorem quàm sesquialterum eius, quæ vsque ad axem, si ad humidum in grauitate non maiorem proportionem habeat, quàm ex-

cessus, quo quadratum quod fit ab axe maius est quadrato, quod ab excessu, quo axis maior est quàm sesquialter eius quæ vsque ad axem, ad quadratum quod ab axe: demissa in humidum, ita vt basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed restituetur ita, vt axis ipsius secundùm perpendicularem fiat.

Lemma. In triangulo, si ab altera extremitate basis, linea ducatur quomodocumque secans oppositum latus: tum in latere à quo incipit duci linea, sumantur aliquot puncta, à quibus singulis ducantur lineæ parallelæ cùm basi, tum lineæ recens ductæ: omnes lineæ rectæ inter illas parallelas ductæ æquidistanter opposito lateri, fiunt alternatim proportionales. *Vide corollar. & scholion.*

V I.

✠ Recta portio conoidis rectangulæ, quando leuior humido axem habuerit maiorem quidem quàm sesquialterum eius, quæ vsque ad axem, minorem verò quàm vt ad eam quæ vsque ad axem proportionem habeat, quam 15 ad 4; in humidum demissa adeo vt basis ipsius contingat humidum, nunquam consistet inclinata ita, vt basis in vno puncto humidum contingat.

VII.

Recta portio conoidis rectangulæ, quando leuior humido axem habuerit maiorem quidem quàm sesquialterum eius, quæ vsque ad axem, minorem verò, quàm vt ad eam quæ vsque ad axem proportionem habeat, quam 15 ad 4: in humidum demissa, adeo vt basis ipsius tota sit in humido, nunquam consistet, ita vt basis contingat humidi superficiem, sed vt tota in humido sit, & nullo modo eius superficiem contingat.

VIII.

Recta portio conoidis rectangulæ quando axem habuerit maiorem quidem quàm sesquialterum eius quæ vsque ad axem, minorem verò quàm vt ad eam quæ vsque ad axem proportionem habeat quàm 15 ad 4: si in grauitate ad humidum habeat proportionem ea minorem quàm quadratum, quod fit ab excessu quo axis maior est quam sesquialter illius, quæ vsque ad axem, habet ad quadratum quod ab axe, demissa in humidum, ita vt basis ipsius humidum non contingat: neque in rectum restituetur, neque manebit inclinata, nisi quando axis cum superficie humidi angulum fecerit æqualem ei, de quo infra dicitur.

IX.

Recta portio conoidis rectangulæ, quando axem habuerit maiorem quidem quàm sesquialterum eius, quæ vsque ad axem, minorem verò quàm vt ad eam quæ vsque ad axem proportionem hrbeat, quàm 1 ad 4:

& in grauitate ad humidum proportionem habeat maiorem quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe maius est quadrato quod ab excessu, quo axis est maior quàm sesquialter eius, quæ vsque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe: in humidum demissa, adeo vt basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, nec conuertatur ita vt axis ipsius secundùm perpendicularem sit, nec manebit inclinata, nisi quando axis cum superficie humidi angulum fecerit æqualem angulo similiter vt priùs assumpto.

Propositio X. *habens quinque conclusiones, quarum sit.*

I. Recta portio conoidis rectanguli quando leuior humido axem habuerit maiorem quàm vt ad eam, quæ vsque ad axem, rationem habeat quàm 15 ad 4, in humidum demissa, ita vt basis ipsius non contingat humidum: nonnunquam quidem recta consistet: nonnunquam inclinata, vt basis ipsius in vno puncto contingat superficiem humidi, idque in duabus dispositionibus: interdum quidem, ita vt basis in humidum magis demergatur: interdum verò, vt superficiem humidi nullo modo contingat, secundùm proportionem, quam habet ad humidum in grauitate. Eorum quæ dicta sunt, singula inferiùs demonstrabuntur.

II. *Concl.* Si portio ad humidum in grauitate minorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum SB ad quadratum BD, maiorem verò quàm quadratum XO ad quadratum BD: demissa in humidum, adeo inclinata, vt basis ipsius non contingat humidum, inclinata consistet, ita vt basis superficiem humidi nullo modo contingat, & axis cum humidi superficie angulum faciat maiorem angulo X.

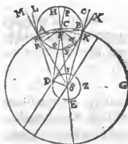
III. *Concl.* Si portio ad humidum in grauitate eam habeat proportionem, quam quadratum XO ad quadratum BD; demissa in humidum inclinata adeo, vt basis ipsius non contingat humidum: consistet, & manebit ita, vt basis in vno puncto humidi superficiem contingat: & axis cum superficie humidi angulum faciat angulo X æqualem. Quod si portio ad humidum in grauitate eam proportionem habeat, quam quadratum PF ad quadratum BD, in humidum demissa, & posita adeo inclinata, vt basis ipsius non contingat humidum, consistet inclinata, ita vt basis in vno puncto humidi superficiem contingat, & axis cum ea faciat angulum angulo æqualem.

IV. *Concl.* Si portio ad humidum in grauitate maiorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum FP ad quadratum BD, minorem verò quàm quadratum XO ad BD quadratum: in humidum de-

rò manifestò impossibile est. Cùm enim centrum sphęræ nullam habeat quantitatem, neque vllam rationem habere ipsum ad superficiem sphęræ supponendum est. Admittendum verò & istud intellexisse Aristarchum. Ex quo enim putamus terram circa mundi centrum constitutam, statuendum adstruxit demonstrationibus ex apparentiis petitis, quam terra rationem habet ad mundum à nobis dictum, eandem habere analogiam sphæram, cuius est circulus, secundùm quem terra gyrari supponitur ad sphæram stellarum fixarum. Et maximè videtur orbem in quo ponit terram moueri, supponi æqualem magnitudine ei quo mundum præscribi diximus. Dicimus itaque quod si ex arena fiat sphæra mole tanta, quantam Aristarchus esse inerrantium siderum orbem supponit, etiam aliquas demonstrari in principiis numerorum nomen claturas, multitudinem arenæ, quæ congerie dictam stellarum sphęram adęquet: suppositis scilicet aliquibus. Quorum primum est, ambitum terræ esse ter mille millium stadiorum & ampliùs, idque ratum esse, & ab experimentatis demonstrari, sicut & tu assentiris eam ipsam esse trecentorum millium stadiorum. At ego singulatim terræ magnitudinem augens, decuplo maiorem pono ipsius ambitum eo, quem primi illi obseruarunt, nempe ter millies millium stadiorum, & ampliùs. Deinde diametrum terræ maiorem esse diametro lunæ. Tum diametrum solis maiorem esse diametro terræ. Similiter ista sumo & conuenienter multis superiorum Astrologorum. Præterea diametrum solis diametri lunæ esse vt trigecuplum & non maiorem; cùm inter antiquos Astronomos Eudoxo quidem visus sit tantùm noncuplus: Phidiæ verò Acupatris filio vt duodecuplus, Sed Aristarchus nixus sit ostendere diametrum solis maiorem esse quàm duodeuigintuplum diametri lunæ, minorem verò quàm vigecuplum. Ego verò istud excedens, vt hypothesis remaneat sine dubio, & clarè demonstrata, suppono diametrum lunæ vt trigecuplum esse, nec maiorem. Præterea diametrum solis maiorem esse latere figuræ mille angulorum inscriptæ circulo maximo qui sit in mundo. Hoc verò supponimus, cum Aristarchus dicat solem apparere ac si esset vigesima & septingentesima circuli zodiaci pars. Ipse enim considerauit quomodo instrumentis posset excipere angulum, quo sol accommodatur, habentem verticem in oculo. Simile autem quid verè assumere non ita in promptu est: quoniam neque instrumenta, quibus fit obseruatio, digna satis sunt fide, ad accuratè demonstrandum. Verùm de his disputare nunc intempestiuum est, cum & alias frequentiùs ista determinata fuerint. Cæterùm satis mihi est vt propositum demonstrem, angulum sumere, qui maior sit angulo cui sol

accommodatur, habeatque verticem in visu. Et rursum alium angulum sumere, qui non minor sit angulo, cui sol accommodatur, & apicem in visu habeat. Constituta ergo ad normam longa regula super plano recto in loco iacente, vnde sol oriens conspici queat: Tum paruo cylindro tornatili super regula posito confestim ab aurora & ortu solis, postquam inceperit eiaculari radios in horizontem, potueritque ex opposito videri, conuertatur regula ad solem. Deinde visus statuatur in extremo ipsius regulæ. Cylindrus verò in medio admoueatur inter visum & solem, ita vt adumbretur soli, tum separetur paulatim cylindrus ab oculo: & vbi inceperit quid minimum solis intueri ab vtraque parte cylindri, sistatur cylindrus. Sic enim accidit vt oculus ab vno puncto intueatur sub rectis ductis ab extremo regulæ in loco vbi constitit visus, tangentibus cylindrum, & quidem angulo comprehenso sub istis ductis minori eo angulo, cui sol accommodatur, habenti verticem in oculo: propterea quod apparet aliquid solis vndequaq; cylindri. Porro quoniam visus non respicit ab vno puncto, sed ab aliqua quantitate, sumatur aliqua magnitudo teres, non minor visu, & hoc rotundo corpore collocato in extremitate regulæ vbi oculus sistitur, recta agatur tangens, & hoc teres corpus & item cylindrum: etenim qui comprehenditur angulus sub lineis ductis, minor est angulo, in quo sol accommodatur, habente apicem in visu. Magnitudo autem non minor visu hoc pacto reperietur. Capiantur duo cylindruli leues, æquè crassi inter se, alter quidem albus, alter verò non; præponantur deinde visui, longius quidem à visu albus, qui verò non albus est, propè oculos, ita vt faciem attingat. Si quidem ergo assumpti cylindruli fuerint visu multo tenuiores, intercipitur à visu propior cylindrulus, ita vt appareat albus totus esse, figura multo exiliori. Si verò non multum quædam dumtaxat albi partes conspiciuntur, vndiquaque eius qui prope oculum est. Sumptis itaque cylindrulis eiusmodi vt alter sua crassitie alterum adumbret, & non ampliori loco talis quidem magnitudo qualis est crassities cylindrulorum hoc efficientium maximè est non minor vsu. Verùm angulus non minor angulo cui sol accommodatur verticem habens in oculo, sic sumitur. Remoto secus regulam cylindro, ab oculo ita vt applaudat seu conculcet cylindrus totum solem, & recta linea à regulæ extremo in quo est visus, educta stet tangens cylindrum: comprehensus angulus à ductis lineis non minor fit angulo in quo sol accommodatur, verticem habens in oculo. Porro his angulis sic assumptis, dimensoque angulo recto, fiebat qui in signo erat, seu maior angulus, minor quàm vnius partis earum 164, in quas rectus fuerat diuisus: minor verò, maior inueni-

batur quàm vna 200. partium, in quas rectus fuerat dissectus. Manifestum itaque est quod angulus cui sol accommodatur, verticem habens in oculo, minor est quàm vna pars earum 164, in quas rectus distribueretur: maior verò quàm vna pars ex 200 in quas rectus diuideretur. His verò persuasis, per quæ etiam diameter solis existit maior latere figuræ mille angulorum, descriptæ in maximo circulo qui sit in mundo, intelligatur planum eductum per centrum terræ, & per visum, statim ac sol fuerit supra horizontem. Et quidem traductum planum secet mundum secundùm circulum A B G: terram vero secundùm D E Z; solem autem iuxta S H circulum. Centrum quidem terræ sit θ, solis verò C, oculus sit D. Et ducantur rectæ tangentes circulum SH. à puncto quidem D, hæ D L & D X contingentes in N & T. Sed à puncto θ, hæ θ M, & θ O contingentes in K & R, & secantes circulum A B G in punctis A & B. Est quippe maior θ C, quàm D C, cùm supponatur sol esse supra horizontem, ita vt angulus comprehensus sub D L, D X maior sit angulo comprehenso sub θ M, θ O.



Qui vero comprehenditur sub D L, D X maior quidem est quàm ducentesima pars recti, sed minor parte eiusdem recti centesima sexagesima quarta. Iste enim angulus est æqualis angulo, cui sol accommodatur, verticem habenti in oculo. Angulus proinde comprehensus sub θ M θ O, minor est vna parte recti diuisi in 164. Recta vero linea A B minor est subtendente portionem circumferentiæ circuli A B G, diuisæ in 656 partes; peripheria vero huius polygon ad radiũ circuli A B G, minorem rationem habet quam 44 ad 7, quia cuiuscumq; polygoni inscripti circulo diameter ad radium minorem rationem habet quàm 44. ad 7. Nosti enim à nobis fuisse demonstratum, omnem circuli circumferentiam maiorem esse quàm triplam diametri, parte minori quidem septima, maiore vero decem septuagesimis primis. Minorem ergo rationem habet linea A B ad θ C, quam 11 ad 1148. ita vt minor sit A B quàm lineæ θ C centesima pars. Lineæ autem B A æqualis est diametrus circuli S H: quoniam dimidia ipsius F A æqualis est radio C R. Æqua enim existente θ C lineæ θ A, à punctis A & C iunctæ perpendiculares ad eundem angulum, sunt æquales. Manifestum ergo est quod diameter circuli S H minor est centesima parte lineæ θ C. Est autem diameter E θ I minor diametro circuli S H, quia minor est circulus D E Z. circulo S H: minores ergo sunt ambæ θ I, & S C centesima par-

te lineæ θ C, ita vt θ C minorem rationem habeat ad I S, quam 100 ad 99. Atque cum θ R minor sit quàm θ C. Tum I S minor quàm D T, minorem proinde rationem habet θ R ad D T, quàm 100 ad 99.

Cùm verò trianguli, θ C R & D C T sint rectanguli, lateraque C R C T æqualia, alia verò θ R, D T, inæqualia. Et maior angulus T D C comprehensus sub D T, D C ad angulum comprehensum sub θ R, & θ C, maiorem habet rationem quam θ C ad D C, minorem verò quàm θ R ad D T. Si enim duorum triangulorum rectangulorum altera quidem latera quæ circa angulum rectum sunt, æqualia fuerint, altera inæqualia: maior quidem angulus eorum qui inæqualibus lateribus adhærent, ad minorem, maiorem quidem habet rationem, quàm maior linea quæ circa rectum angulum est; ad minorem, ita vt angulus comprehensus sub D L, D X ad angulum contentum sub θ O, θ M minorem rationem habeat, quàm θ R ad D T: quæ scilicet minor ratio est quàm 100 ad 99. In de fit vt angulus comprehensus sub D L, D X, angulum comprehensum sub illis θ M, θ O, minorem rationem habeat quàm 100 ad 99. Et quoniam est angulus contentus sub D L, D X, maior ducentesima recti parte, erit & angulus comprehensus sub θ M, θ O, maior quàm partes 99 earum viginti millium in quas rectus secaretur. Ita vt maior fuerit quàm vna portio recti dissecti in 203 partes. Igitur B A maior est subtēdente portionem circūferentiæ circuli A B G distributæ in 812. Est vero lineæ A B æqualis solis diameter. Manifestum ergo est solis diametrum maiorem esse latere figuræ mille angulorum. His suppositis hæc quoque demonstrantur: Diametrum nempe mundi minorem esse decies millecuplum diametri terræ. Et adhuc diametrum mundi minorem esse quàm stadiorum decies millies millenorum millium. Cùm enim ponatur diametrum solis non esse maiorem quàm trigecuplum diametri lunæ, diametrum verò terræ maiorem esse diametro lunæ: manifestum est diametrum solis minorem esse quàm trigecuplum diametri terræ. Rursus verò cum sit ostensus diameter solis maior esse latere figuræ mille angulorum inscriptæ circulo qui sit in mundo, maximo: patet ambitum dictæ figuræ mille laterum, minorem esse quàm millecuplum diametri solis. Diameter vero solis minor est quàm trigecuplus diametri terræ. Proinde ambitus dictæ figuræ mille angulorum minor est quàm terdecies mille cuplus diametri terræ. Cùm itaque ambitus figuræ mille laterum sit mi-

nor

nor quàm trigesies millecuplus diametri terræ, diametri verò mundi maior quàm triplus. Siquidem demonstratum est quòd omnis circuli diameter minor est tertia parte cuiuscumqne polygoni in eo inscripti, quod pluribus quam 6 lateribus contineatur. Quia id tantùm est Hexagoni in circulo inscripti. Sequitur inde diametrum mundi minorem esse quàm decies millecuplum diametri terræ. Cum igitur diameter mundi minor sit quàm decies millecuplus diametri terræ, nempe quàm decies millies millenorum millium stadiorum. Id ex hoc patet. Quoniam itaque supponitur ambitum terræ non maiorem esse quàm trecenties decies millium stadiorum : ambitus verò terræ maior est triplo diametri, quia cuiuslibet circuli circumferentia maior est quàm tripla diametri, patet diametrum terræ minorem esse quàm stadiorum centies decies millium. Itaque cùm mundi diameter minor sit quàm decies millecuplus diametri terræ, manifestū est quòd ipsa mundi diameter minor est quàm stadiorum 1000000000. Porro de magnitudinibus & distantiis ista suppono.

De arena verò hæc : si aliqua magnitudo conflatur ex arena non maior papauere, numerum ipsius non maiorem esse quàm 10000. Et diametrum papaueris non minorem esse, quàm quadragesimam partem digiti. Hoc autem statuo quod hoc modo sum contemplatus. Super plana regula papaueres dispositi sunt in rectam lineam sese tangentes, occuparuntque 25 papaueres locum ampliorem longitudine digiti. Verùm minorem ponens diametrum papaueris, eam suppono $\frac{1}{40}$ tantùm esse digiti partem, nec minorem, volens ita absque vlla ambiguitate demonstrare propositum. Quæ igitur supposui, sunt hæc. Nunc vtile esse puto numerorum denominationem recensere, ne errent qui non inciderũt in alios numeros qui habentur libro per Zeuxippum scripto, cùm de ipsis in hoc etiam volumine nihil dictum fuisset. Accidit autem numerorum nomina vsq; ad myriadas esse data nobis, & supra myriadas quidem sufficienter nouimus numerum myriadum exprimentes ipsum semper ad myriadas referentes : verùm numeri qui ad myriadem myradum vsque protenduntur, dicantur nobis primi. Et horum quidem primorum numerorum myrias myriadum vocetur vnitas secundorum, & secundorum numerorum vnitates, & ab vnitatibus decem & centeni, & milleni & decies milleni sint centum millenorum millium. Rursus myrias myriadum secundorum numerorum vocetur vnitas tertiorum numerorum. Et numerentur tertiorum numerorum vnitates, & ab vnitatibus denarij & centenarij & millenarij & decupli millenarij sint centum millena millia. Atque hoc modo tertiorum numerorum myrias myriadum vnitas appelletur quartorum nu-

sius A per D; multiplex igitur est L ipsius T per D, ita vt æqualis sit L ipsi Q. Manifestum igitur est quod aliquis factus ex proportionalitate à maiori multiplicantium sese inuicem, æquè dissitus est, ac minor ab vnitate dissidet. Patet item quod ab vnitate distat vno minus, quàm quantus est numerus ex vtrisque conflatus, quibus multiplicantes ab vnitate absunt. Quot enim sunt hi A. B. G. D. E. Z. I. T, tot distat T ab A vnitate. Isti verò I, C, L, vno minus sunt, quàm quibus D ab vnitate differt. Etenim cum T tot sunt. His autem suppositis, illis quoque demonstratis propositum ostendetur. Cùm enim supponatur diametrum papaueris non minorem esse quadragesima digiti parte Manifestum, quòd sphæra quæ digitalem habuerit diametrum, non maior est quàm vt contineat plures quàm 64. papauerum millia. Sphæræ quippe habentis diametrum quadragesimam partem digiti, multiplex est secundùm numerum ductum. Demonstratur enim quod sphæræ triplam rationem habent eius, quæ est diametrorum inter se. Postquam ergo suppositum est arenam coaceruatam in molem papaueris, non maiorem esse numero quàm decem millium: manifestum, quod si arenâ impleatur sphæra digitalem habens diametrum, non maior erit arenæ numerus quàm 640000000. Est vero huiusmodi numerus, vnitates, videlicet 6, & numerus secundorum numerorum: tum primorum quadraginta millena millia. Minor ergo est quàm decem vnitates secundorum numerorum. Quæ vero centum digitorum diametrum habet sphæra, multiplex est eius quæ habet digitalem diametrum semel mille millies: quia rationem habet triplicatam diametrorum inter se sphæræ. Si igitur fiat ex arena sphæra tanta magnitudine, quanta est sphæra habens diametrum digitorum centum, patet minorem fore arenæ numerum, quàm sit numerus productus ex multiplicatis decem vnitatibus secundorum numerorum per semel millena millia. Cùm itaque secundorum numerorum decem vnitates decimum constituant numerum ab vnitate, in proportionalitate decuplorum laterum: semel verò millena millia septimus sint ab vnitate in eadem progressione: manifestum est quod factus, sextus erit huius progressionis, & sextusdecimus ab vnitate. Demonstratur enim quod vno minus distat ab vnitate quàm sit numerus ex vtrisque conflatus, quibus distant ab vnitate multiplicantes sese inuicem. Horum porro 16, octo priores cum vnitate eorum sunt qui primi appellati sunt. Qui verò post ipsos, octo, secundorum, & vltimus est decies millena millia, secundorum nempe numerorum. Ergo constat multitudinem erenæ magnitudinis mole æqualis sphæræ diametrum habenti qui sit centum digi-

torum, minorem esse quàm decies millena millia secundorum numerorum. Rursus verò, & sphæra quæ 10000 digitorum habuerit diametrum, multiplex eius est quæ fuerit dimetientis centum digitorum habuerit diametrum, multiplex eius est quæ fuerit dimetientis centum digitorum millies, millies semel. Si igitur fiat ex arena sphæra tanta mole, quanta est ea, quæ habuerit dimetientem 10000 digitorum, patet eam fore minorem, quàm sit arenæ numerus factus ex multiplicatione decies millenorum millium secundorum numerorum per semel millena millia. Cùm ergo secundorum numerorum decies millena millia decimus sextus sit numerus ab vnitate: tum proportionalia semel millena millia septimus ab vnitate in eadem progressione: patet numerum factum esse 22 eorum, qui in hac proportionalitate sunt ab vnitate. Horum verò 22, octo quidem primi cum vnitate eorum sunt qui dicuntur primi: Tum sequentes octo sunt eorum qui secundi appellantur: reliqui sunt tertiorum. Atque vltimus eorum est centum millia tertiorum numerorum. Patet igitur multitudinem arenæ in molem congestæ parem sphæræ, quæ diametrum habeat 10000 digitorum, esse minorem 100000 tertiorum numerorum. Quoniam autem minor est sphæra habens diametrum vnius stadij, sphærâ quæ habuerit diametrum 10000 digitorum: patet multitudinem arenæ cumulatæ in aceruum æqualem sphæræ dimetientis vnius stadij, minorem esse quàm 100000 tertiorum numerorum. Adhuc sphæra quæ habet diametrum centum stadiorum, multiplex est sphęræ diametri vnius stadij semel millies millies. Si igitur fiat ex arena sphæra tanta magnitudine, quanta est habens diametrum centum stadiorum, manifestum quod minor erit arenæ numerus eo qui produceretur ex multiplicatis 100000 tertiorum dumerorum per 1000000. Et quia hæc 100000 tertiorum numerorum sunt 22 numerus proportionalitatis ab vnitate: Hæc verò 1000000 septimus ab vnitate eiusdem proportionalitatis, erit sanè factus 28 ab vnitate istius progressionis. Porrò horum 28, primi quidem 8 cum vnitate sunt eorum qui primi dicuntur. Qui verò post ipsos alij 8, secundorum: alij rursus sequentes 8, sunt tertiorum: reliqui demum 4. sunt eorum qui dicuntur quarti. Et extremus illorum est mille vnitates quartorum numerorum. Manifestum itaque arenæ multitudinem in sphæram deformatæ diametri centum stadiorum, minorem esse mille vnitatibus quartorum numerorum. Præterea sphæra stadiorum 10000, multiplex est sphęræ diametri stadiorum centum, semel millies millies. Sphæra ergo si ex arena fiat tanta mole, vt eam adæquet sphæram quæ habeat diametrum 10000 stadiorum: equidem minor erit arenæ multitudo eo qui nasceretur numero ex mille vnitati-

bus quartorum numerorum ductis in 1000000. Quoniam verò quartorum numerorum mille vnitates faciunt 28 progressionis numerum ab vnitate: 1000000 verò 7 eiusdem progressionis ab vnitate: patet quod factus numerus erit ipsius progressionis ab vnitate 34. Horum verò 34 primi 8 cum vnitate primorum numerorum sunt. Qui verò post ipsos sunt 8 secundorum, tum qui sequitur 8 alij, tertiorum, & qui sunt deinceps quartorum. Reliqui duo sunt eorum qui vocantur quinti, & vltimus quidem eorum est decem vnitates quintorum numerorum. Clarum itaque est multitudinem arenularum ea mole collectarum quæ sphæræ æqualis sit habenti diametrum 10000 stadiorum, minorem esse quàm decem vnitates quintorum numerorum. Adhæc sphæra habens diametrum stadiorum 1000000, sphæræ diametrum habentis longam 10000 stadiis, est millies millecuplus. Si ergo fiat ex arena sphæra tanta magnitudine, quanta est sphæra habens diametrum stadiorum 1000000, constat arenæ numerum minorem fore eo qui fieret ex ductu 10 vnitatum quintorum numerorum per 1000000.

Atque, quoniam quintorum numerorum 10 vnitates constituunt 34 proportionalitatis numerum ab vnitate: 1000000 verò 7 ab vnitate ipsiusmet progressionis: patet quod factus erit eiusdem proportionalitatis 40 ab vnitate. Atque horum 48 quidem primi cum vnitate sunt primorum numerorum, Secundi 8 sunt secundorum: tertij 8 tertiorum; quarti 8 quartorum, & denique 8 postremi sunt quintorum: & vltimus eorum est 1000000 quintorum numerorum. Apparet ergo arenæ multitudinem magnitudinem habentem æqualem sphæræ diametrum habenti 1000000 stadiorum, non attingere 10000000 quintorum numerorum. Iam verò sphæra habens diametrum stadiorum 10000000. multiplex est sphæræ, cuius diameter sit 1000000 stadiorum, ductorum in 1000000. Si verò fiat sphæra ex arena tanta magnitudine, quanta est sphæra quæ diametrum habeat stadiorum 100000000, patet quod minor erit arenæ numerus producto numero ex 1000000 quintorum numerorum multiplicatis per 100000. Quoniam autem quintorum numerorum 10000000 quadragesimus est ab vnitate proportionalis: at 1000000 septimus ab vnitate eiusdem ordinis: constat genitum esse 46 ab vnitate. Horum præterea 46, octo quidem primi cum vnitate, eorum sunt qui primi dicuntur: 8 alij proximi sunt secundorum: sequentes 8 sunt tertiorum: tum post tertios, alij 8 sunt quartorum: & qui post quartos, sunt quintorum: reliqui tandem sunt sextorum: & extremus eorum est 100000 sextorum numerorum. Clarum est itaque, quod multitudo arenæ ea quantitate conglobatæ, vt æquetur sphæræ diametrum habenti, stadiorum 10000000000000, minor est quàm 100000 sextorum

numerorum. Sphæra itidem habens diametrũ stadiorum 1000000000, sphæræ hobentis diamettrum stadiorum 10000000, est semel millies millecupla. Si igitur fiat ex arena globus tantus crassitie, quanta est sphæra habens diametrum stadiorum decies millies millenorum millium: manifestum quod arenæ multitudo minor erit numero procreato ex centum millibus sextorum numerorum ductis in semel millena millia. Cùm autem sextorum numerorum centum millia, sextus & quadragesimus sit ab vnitate proportionis: semel verò millena millia septimus ab vnitate in eadem progressione: patet quod genitus numerus fuerit 52 ab vnitate eiusmodi progressionis. Horum vero 52 duorum primi 48 cum vnitate sunt eorum qui primi dicuntur, secundi, tertij, quarti, quinti, & sexti. Reliqui verò 4 sunt eorum quos septimos dicimus. Est postremus eorum est mille vnitatum septimorum numerorum. Apparet igitur arenæ multitudinem quæ tantæ molis sit, vt exæquet sphæram quæ diametro sit stadiorum decies millies millenorum millium, minorem esse mille vnitatibus septimorum numerorum. Quoniam itaque demonstratus est mundi diameter minor esse stadiorum decies millies millenorum millium; manifestum est arenæ multitudinem conformatæ in molem mundo æqualem: minorem esse quàm sint mille vnitates septimorum numerorum. Similiter & multitudo arenæ mole pari ei, quod à multis astrologis appellatum est mundus, ostenditur minor quàm sint mille vnitates septimorum numerorum. Quod etiam multitudo arenæ sphæricæ molis tantæ, quantam Aristarchus supponit inerrantium siderum spæram, minor sit decem millenis millibus octauorum numerorum demonstrabitur. Cum enim supponatur terram eam habere rationem ad hunc dictum à nobis mundum, quam habet rationem dictus mundus ad stellarum fixarum sphæram ab Aristarcho positam: Et diametri sphærarum eam ipsam rationem habeant inter se, diameter verò mundi ostensus sit minor quàm decies millecuplus diametri terræ: sequitur diametrum sphæræ stellarum fixarum minorem esse quàm diametri mundi decies millecuplum. Cum itaque sit vt sphæræ habeant inter se triplicatam rationem diametrorum, planum est, quod inerrantium astrorum sphæra quam Aristarchus supponit, minor sit, quàm semel milies, millies, millies, millecuplus mundi. Ostenditur enim, multitudinem arenæ mundum mole referentis, minorem esse, quàm mille vnitatum septimorum numerorum Patet ergo, quod si sphæra ex arena fiat, tanta magnitudine, quantam Aristarchus supponit inerrantium esse siderum sphæram, minor erit huius arenæ numerus, quàm qui sit ex multiplicatione mille vnitatum per semel millies, mille, millenaria, millia. Et quoniam istæ

mille vnitates septimorum numerorum, sunt progressionis 52 ab vnitate: semel verò millies mille millenaria millia 13 ab vnitate eiusdem proportionalitatis, consentaneum est factum fore eiusdem progressionis 64 ab vnitate. Iste verò est octauorum octauus, & decem millia octauorum numerorum. Consequens ergo est quòd arenæ multitudo quæ excreuerit in molem æqualem sphæræ non errantium siderum, quam Aristarchus supponit, minor sit quàm decem millena millia octauorum numerorum. Hæc autem, ô Rex Gelon, multis qui non facti sunt Mathematicarum artium participes, incredibilia apparere intelligo: ijs verò qui eas degustarint, quique meditati sunt distantias & magnitudines terræ, solis, lunæ, totiusque mundi, credibilia ex demonstratione forent. Propterea existimaui quibusdam non incongruum videri, ista contemplari.

SVPPLEMENTVM ARCHIMEDIS.

TRES erunt partes istius supplementi, Theotime, quarum prima proportiones exhibebit, quibus librum Archimedis de circuli dimensione Snellius perfecisse videtur in suo cyclometrico. Secunda continebit propositiones Kepleri, quibus demonstrare voluit quæ deerant libro de sphæroidibus. Tertia denique complectetur nouam quadraturam parabolæ à Luca Valerio demonstratam.

PRIMA PARS. CYCLOMETRICI PROPOSITIONES.

✠ I. RECTANGVLVM sub inscriptæ à diametro differentia & radio comprehensum, æquatur quadrato inscriptæ dimidij complementi ad semicirculum.

II.

✠ Rectangulum sub recta à diametro, plus inscripta radio comprehensum æquatur quadrato inscriptæ quæ & datum & dimidium eius complementum ad semicirculum simul subtendit.

III.

✠ Rectangulum è figuræ ordinatæ circulo inſcriptæ latere vno & totidem radiorum ſemiſſibus, quot ipſum habet latera, æquatur areæ polygoni ordinati ſub duplo laterum numero in eodem circulo.

IV.

✠ Dodecangulum æquatur quadrato à latere trianguli æquilateri in eundem circulum inſcripti.

V.

✠ Sexangulum eſt duplum trianguli æquilateri in eodem circulo.

VI.

✠ Dodecangulum eſt ſeſquialterum quadrati eidem circulo inſcripti & ſubſeſquitertium circumſcripti.

VII.

✠ Triens lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti æquatur ſemiſſi lateris circumſcripti ſexanguli.

VIII.

✠ Differentia diametri à latere inſcripti trianguli æquilateri æquatur lateris dodecanguli circumſcripti dimidio.

IX,

✠ Inter figuras ordinatas ſimiles eidem circulo adſcriptas, inſcripta duplo laterum numero media proportionalis eſt.

X.

✠ Differentia radij circularis à latere inſcripti quadrati æquatur lateris octanguli circumſcripti dimidio.

XI.

✠ Ambitus rectilinei circulo inſcripti eius peripheriæ cedit: circumſcripti verò eandem excedit.

XII.

✠ Sectio ſemicirculo non maior cedit trianguli æquicruri ſibi inſcripti duplo.

XIII.

Spatium à duabus ex eodem puncto tangentibus & peripheria comprehenſum, minus eſt duplo trianguli æquicruri ab earumdem ſegmentis & tertia eandem peripheriam tangente comprehenſi.

XIV.

Rectilineum circulo inſcribi poteſt maius dato quocumque ſpatio, quod eodem circulo ſit minus: & aliud circumſcribi minus dato quocumque ſpatio, quod eodem circulo ſit maius.

XV.

Duæ rectæ lineæ inueniri poſſunt, quarum maior ad minorem rationem

tionem habeat minorem, quàm data magnitudo quælibet maior ad minorem.

XVI.

Datæ peripheriæ duo similium multangulorum latera ita abscribi possunt, vt latus circumscriptum ad inscriptum minorem habeat rationem, quàm maior datarum magnitudinum ad minorem.

XVII.

Circulo duæ similes figuræ ita adscribi possunt vt circumscripta ad inscriptam maiorem habeat rationem, quam data quælibet maior ad minorem.

XVIII.

Circulo dato poligonum circumscribere, vt spatia ab eius lateribus & peripheriæ conuexo comprehensa minora sint dato quocumque spatio.

XIX.

✠ Circulus æquatur triangulo, cuius altitudo radio basis peripheriæ eiusdem sit æqualis.

XX.

✠ Si diameter radio æqualiter continuetur, & recta à termino continuata circulum contingat, segmentum conuexi à contacta ad diametrum erit totius circuli sextans, reliquum triens.

XXI.

Si à termino diametri radio æqualiter continuata recta circulum contingens, rectæ in reliquo diametri termino eundem contingenti occurrat, intercipiet ab ea ad contactum rectam æqualem inscriptæ vtriusque contactum connectenti.

✠ *Consectarium.* Perpendicularis à vertice trianguli æquilateri circumscripti est tripla radij circuli inscripti.

XXII.

Si à puncto, quod diametri internallo ab eius centro distat, duæ rectæ peripheriam secantes educantur, segmentum peripheriæ conuexum ab iis interceptum minus est concaui dimidio, maius triente.

XXIII.

✠ Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ, rectæ per peripheriam educta eundem in reliquo diametri termino tangenti occurat, absumet ad contactum rectam maiorem, quàm sit ea quæ peripheriæ absumptæ est inscripta.

XXIV.

✠ Circulorum peripheriæ, quorum anguli in centro peripheriáve suis radiis sunt reciprocè proportionales, sunt æquales.

XXV.

Si recta inter peripheriæ conuexum & diametrum continuatam sit radio æqualis, segmentum concaui inter eas interceptum erit conuexi triplum, & contra.

Lemma. Diameter circuli maior est quinque lateribus circumscripti

ſedecanguli *vel*, Complementum lateris inſcripti ſedecanguli maius eſt eiuſdem lateris quintuplo. XXVI.

Si recta inter diametrum continuatam, & peripheriæ contactum radio æqualis, occurrat rectæ circulum in remotiſſimo diametri termino contingenti, abſumet rectam maiorem peripheria inter has tangentes comprehensâ. XXVII.

Si à termino diametri radio æqualiter continutæ recta per peripheriam educta, tangenti eam in reliquo diametri termino occurrat, abſumet rectam minorem quàm ſit trientis concauæ peripheriæ inter eas interceptæ tangens tripla.

XXVIII.

Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ recta per peripheriam educta, tangenti eam in reliquo diametri termino occurrat, abſumet rectam minorem quàm ſit peripheria inter eaſdem intercepta.

XXIX.

Linea quæ à limite triſectionis cuiuſque peripheriæ rectæ in reliquo diametri termino tangenti occurrit, abſumet è tangente ſegmentum maius quàm ſit peripheriæ concauum inter ipſam & diametrum interceptum. XXX.

Linea recta quæ à limite triſectionis peripheriam in reliquo diametri termino tangenti occurrit, abſumit ex ea ſegmentum duobus ſinibus & vni tangenti, qui ad eiuſdem trientem pertinent, æqualem.

XXXI.

Rationem diametri ad ſuam peripheriam ſecundùm expoſitos limites tam accuratè quàm cuique collibitum erit, definire.

XXXII.

Diametro binario, & poſtpoſitis quotlibet circulis taxatâ, ratio diametri ad peripheriam in duplo tot circulis conſtans erit, quot nouenarij coutinui à principio in inſcripta cõplementi dati lateris inuenietur.

Conſectarium. Licet itaque hinc, quouſque ratio diametri ad peripheriam benè accuratè è ſingulis eruatur, quàm proximè definire.

XXXIII.

Lineam datæ peripheriæ quamlibet proximè æqualem exhibere.

XXXIV.

Datæ rectæ æqualem peripheriam è dato circulo aſſumere, & contra.

XXXV.

Datam peripheriam data ratione ſecare.

XXXVI.

Datæ inſcriptæ debitam peripheriam tam verè propinquam in numeris exhibere, quàm erit ratio diametri ad ſuam peripheriam data.

Lemma. Triens sinus datæ peripheriæ minor est sinus trientis datæ peripheriæ. XXXVII.

Si duorum sinuum vtrimque à centro eidem diametro perpendicularium ille huius sit triens, recta per eorum vertices lineæ in hoc diametri termino tangenti occurens absumet segmentum tangentis maius peripheriâ sibi contiguâ. XXXVIII.

Datæ cuicumque peripheriæ inscriptam veræ tam propinquam in numeris exhibere, quàm erit ratio diametri ad suam peripheriam data. XXXIX.

✠ Si trienti datæ peripheriæ sinus æqualis vltra centrum constituatur, recta vtriusque verticem connectens, & continuata occurret diametro continuatæ intra limitem trisectionis & diametri continuationem radio æqualem. *His autem sequentia problemata praxi seruientia subiungit.*

I. Triangulum dato sectori æquale construere, & contra.

II. Dato sectori super data peripheria æquale trilaterum construere.

III. Dato trilatero in basi circulari æqualem sectorem construere.

IV. Datæ sectioni æqualem sectorem constituere.

V. Datis trianguli rectanguli lateribus eius angulos inuenire.

VI. Datis trianguli rectanguli angulis oppositorum laterum rationem inuenire.

SECVNDA PARS THEOREMATVM STEREOMETRIÆ nouæ Kepleri.

I. RAtionem circumferentiæ ad diametrum esse proximè eam, quæ est 22. ad 7. *ex Archimede.*

Episagma. Longitudo lineæ ellipticæ, id est describentis ellipsim, sese habet ad medium Arihmeticum inter duas eius diametros, quæ axis rectus, & transuersus dicuntur, vt 22. ad 27. ferè.

II. Circuli area ad aream quadratam diametri comparata, rationem habet eam quàm 11. ad 14. ferè.

Corollarium 1. Sectoris in circulo area æqualis est rectangulo sub semidiametro, & dimidio arcu.

Coroll. 2. Segmenti circuli minoris area minor est sectoris areâ, triangulo sub sectoris & segmenti rectis comprehenso: segmenti verò maioris area tanto maior est sectore suo.

Episag. 1. Circulo hoc est commune cum parabola, quod in vtrisque portiones quomodocumque per vnam rectam abscissæ, si æquales.

habuerint diametros, & ipsæ inter se in qualibet figura sint æquales.
✠ *Epis.* 2. Paraboles area est sesquitertia areæ trianguli habentis eandem eum parabola basim rectam,& eandem altitudinem. *Ex Archimede.*
✠ *Epis.* 3. Ellipsis area ad aream circuli est, vt minor ellipsis diameter ad maiorem: & vt circulus ad quadratum diametri, sic ellipsis ad rectangulum diametrorum, scilicet etiam vt 11 ad 14. ferè. *Ex Archim.*
✠ III. Cylindri verò ad parallelepipedum columnare rectangulum æquè altum, quod cylindri corpus stringit quadratis suis basibus & parallelis lateribus, ratio est eadem, quæ circuli ad quadratum circumscriptum, hoc est eadem quæ 11. ad 14.
✠ IV. Si columna recta parallelarum basium cum pyramide, si cylinder cum cono eandem basim habuerit, eandemque altitudinem, triplum erit illius.
V. Superficies curua coni rectanguli inscripti hemisphærio, est semidupla baseos, seu circuli maximi in sphæra, dimidia baseos coni rectanguli circa hemisphærium.
✠ VI. Conuexum sphæricum est quadruplum areæ circuli maximi, qui sphæram per centrum secat. *Ex Archimede.*
✠ VII. Conuexum cuiuslibet segmenti sphæræ est æquale plano circuli, cuius semidiameter subtendit segmenti latitudinem à polo ad basim. *Vide corollarium.*
✠ VIII. Sphæricum conuexum & eius axis secantur à plano ad axem recto in eadem proportione.
✠ IX. Cylindri recti superficies est æqualis sphæricæ quam stringit.
✠ X. Superficies globi, eius cylindri, qui globum stringit, resectæ ab eodem plano ad axem recto sunt æquales.
XI. Corpus cylindri est ad corpus sphæræ, quam stringit, in proportione sesquialtera.
XII. Cubi corpus ad corpus sphæræ quam stringit, est duplum paulo minus, nimirum vt 21. ad 11. proximè.
✠ XIII. Corpus coni, cuius altitudo est æqualis diametro sphæræ; basis sphæræ, maximus circulus, est dimidium corporis sphæræ.

Coroll. Conus, *de quo theoremate* 5. in hemisphærio est ad cylindrum qui sphæram stringit, vt octaedron in sphæra ad cubum circa sphæram, sextam scilicet partem cylindri, quartam sphæræ, & sic dimidium hemispærij sui, dimidiumque coni theor. 15. descripti, quippe cuius basim habet integram, altitudinis verò saltem dimidium.

Epis. 1. Eadem est proportio corporis ab ellipsi producti, quod sphæroides dicitur, ad conum æquè altum. *Ex Arch.m.* 29. *&* 30 *pr. sphæroid.*

Epis. 2. Sicut sphæroides est coni sui duplum: sic conoides paraboli-

cum est coni sui sesquialterum. *Ex eod. l. p. 23. & 24.* Conoides verò hyperbolicum sesquialteram proportionem magis ad æqualitatem adducit, nam ad lineas sesquialteram proportionem continentes (quæ habent duplum & triplum eius quæ inter verticem, & centrum figuræ) addit vtrinque diametrum.

XIV. Segmento sphæræ æqualis est conus super eadem basi, habens altitudinem tanto maiorem, vt sit eius excessus ad semidiametrum globi, sicut est altitudo ipsa segmenti ad residuum diametri. *Vide coroll.*

Epis. 1. Vt sectio globi facta plano axi parallelo semper est circulus: sic sectio sphæroidis non omnis, sed quæ fit plano axi parallelo, est ellipsis, sphæroidi similis, ellipses verò diuersarum, & dissimilium specierum, aut circuli fiunt, quoties vel sphæroides vtcumque, vel conoides per vtrumquue oppositorum laterum secatur. *Vide Archim. sphær. p. 12. 13. 14. & l. 5.*

Episag. 2. Segmentorum sphæroidis ratio eadem est, quæ segmentorum globi, si recta sit ratio ad axem: sin obliqua, tunc vsurpatur non dimidium axis, sed dimidium eius quæ vertices portionnum factarum) id est puncta earum super sectionem altissima, coniungit. Nam in ellipsi quæ gignit sphæroides, axis quidem est inter diametros; diametrorum verò multæ sunt, diuersæ longitudinis, quilibet binos oppositos vertices coniungens.

XV. Quemadmodum curuis superficiebus segmentorum theor. 7. fecit æquales circulos planos: & æquè valentes lineas rectas ostendit, comparabiles inter se diuersarum sectionum: sic etiam soliditati segmentorum assignare possumus non tantùm conos æquales, vt theor 14. sed etiam plana æquiualentia, seu proportionis eiusdem comparabilia inter se diuersarum sectionum. *Vide authorem qui hæc exhibet.*

Episag. Sic segmenta conoidis parabolici sunt inter se in proportione, quæ est inter quadrata axium. *Vide Arch. 16. p. sphæroid.*

Coroll. 1. Segmenta segmentorum sphæræ easdem habent leges, quoad corpora atinet, quæ supra fuerunt eiusdem generis segmentorum superficie in coroll. ad theor 7.

Coroll. Zona sphæræ & sphęroidis, seu corpus annulare, contentum parte superficiei sphęræ vel sphęroidis media, quæ zona dicitur, & superficie cylindrica intus, ita inuestigatur. A sphęra, vel sphęroide auferuntur bina segmenta æqualia, & cylinder zonæ æquè altus, basibus iisdem cum segmentis ablatis: remanetque corpus zonæ. Quod si zona non sit media globi, vel sphæroidis, sed inclinata ad polum seu verticem, auferuntur segmenta inæqualia, truncus coni, vt remaneat talis zona. Intelligitur autem zona, cui circum circa sit æquabilis

latitudo, & ſub qua ſit truncus conicus parallelarum baſium : cuius dimenſiones ſequuntur.

XVI. Conus ſecatur variè : aut enim per verticem & baſim, & id vel plano, vel ſuperficie alia coni minoris habentis eundem verticem. In vtroque caſu ſegmenta coni æquè alta ſunt vt eorum baſes inter ſe. Verum eſt autem theor 11. ſphæroid. de omni ſegmento verticali, iuxta quod coni, ſegmentique verticalis ad conum proportio componitur ex proportione baſium interſe, & altitudinum inter ſe. *Vide plura apud authorem in hoc theormate.*

XVII. Segmenta cylindri recta, parallelis axi, ſuperficiebus reſciſſa, ſunt inter ſe, vt ſegmenta baſis : ſegmenta verò, plano per axem tranſeunte, dummodo non ſecet alteram baſium, ſunt vt ſegmenta axis inter ſe. *Vide etiam authorem hic, vbi explicat prædictas figuras.*

XVIII. Omnis annulus ſectionis circularis, vel ellipticæ, eſt æqualis cylindro, cuius altitudo æquat longitudinem circumferentiæ, quam centrum figuræ circumductæ deſcripſit, baſis verò eadem eſt cum ſectione annuli. *Vide coroll.*

XIX. Annulus ſtrictus eſt æqualis cylindro, qui habet baſim, circulum ſectionis annuli, altitudinem æqualem circuli longitudini. *Vide coroll. & analogiam.*

Coroll. Globus eſt ad circulum ſtrictum eodem circulo creatum, vt 7. ad 33. nam tertia pars ſemidiametri ducta in quadruplum circuli maximi, vel duæ tertiæ diametri in aream circuli maximi, creant cylindrum æqualem cubo. At cylinder æqualis ſtricto, habet baſim quidem eandem : altitudinem verò, circum ferentiam. Ergo vt circumferentia ad beſſem diametri 33 ad 7. ita ſtrictum ad globum.

XX. Zona Mali componitur ex zona globi, & ſegmento recto cylindri, cuius ſegmenti baſis eſt ſegmentum, quod deficit in figura, quæ gignit Malum ; altitudo verò, æqualis circulo, quem centrum ſegmenti maioris deſcribit. *Vide 2. corollaria pro praxi geometrica.*

XXI. Corpus Citrij eſt differentia inter zonam globi, & dictum ſegmentum cylindri. *Vide 1. coroll.*

Coroll. 2. Sic corpus Oliuæ, vel Pruni elliptici eſt differentia inter zonam ſphæroidis illic longi, hic lati & inter ſegmentum cylindri elliptici.

XXII. Zona Citrij truncati vtrinque æqualibus circulis, componitur ex corpore minoris Citrij quod creatur ab eodem circuli ſegmento, quo zona propoſita creata eſt, & ex ſegmento cylindri cuius baſis idem minus ſegmentum circuli : altitudo æqualis circumferentiæ circuli truncantis. *Vide coroll. 2 & epiſag.*

XXIII. Coni duo, creati à rectangulo ſcaleno: alter minori, ſaltem maiori latere eorum, quæ circa rectum, pro axe conſtitutis, ſunt in proportione laterum, quæ baſes ipſis conis deſcribunt.

XXIV. Sphęroides longum in inſcriptum ſphęroidi lato ſic vt eaſdem habeant diametros, ſed axes in iis permutatos, eſt ad ſphæroides latum vt diameter breuior ad longiorem.

XXV. Segmentum globi ad Citrium eodem ſegmento circuli deſcriptum, videtur eam habere ptoportionem, quam habet diameter baſis ſegmenti ad axem ſeu altitudinem ſegmenti.

XXVI. Si recta quædam ſectionem conicam, & genitum ab illa ſegmentum ſphæroidis, aut conoidis contigerit in circumferentia baſeos, concurrens cum axe & circumductæ lineæ circa diametrum baſeos immobilem, creauerint ſolida, contingens quidem conum, ſectiones verò conicæ, prunum, Oliuam vel fuſum, quælibet ſuum congenere: eadem verò contingens: circum ducta circa axem immobilem, creauerit conum alium: proportio dimidij Pruni vel Oliuæ ad ſegmentum ſphæroidis, fuſi verò ad ſuum conoides, proximè erit æqualis proportioni prioris coni, ad conum poſteriorem.

XXVII. Si cuiuſlibet trianguli latus alterum circa rectum angulum ſecetur, & in duo æqualia, & in proportione laterum reliquorum: in angulo verò oppoſito concurrant ſectiones conicæ variæ: communiter ſeipſas, & latus recto angulo oppoſitum, tangentes, vertices primarios in latere ſecto habentes: quæ ſunt à ſummo ad medietatem, omnes erunt hyperbolæ: quæ in ipſam biſectionem incidit, parabole; quæ hinc vſque ad ſectionem proportionalem, omnis generis ellipſes rectæ: quæ in ipſam proportionalem incidit, circulus: quæ denique hinc vſque ad rectum angulum, omnis generis ellipſes tranſuerſæ erunt, in quibus vertex impropriè dicitur, pro extremo axis breuioris. *Videantur 2. corollaria.*

XXVIII. Si quatuor ſpecies conicarum ſectionum circulus, ellipſes, parabola, hyperbolæ ſe ſe in communi vertice contingunt: pretereaque in duobus aliis punctis, æqualiter à vertice remotis, concurrunt, omnes in duobus punctis ſecantur ab omnibus, & circuli circumferentia intra ſectiones eſt exteriùs, continet que ellipticas: hæ parabolicam: intimæ ſunt hyperbolicæ, & ex iis interiores, quæ obtuſiores, eædemque ſuis aſymptotis propriores.

XXIX. Si Citrium, Pruna, fuſum parabolicum, fuſa hyperbolica, & conus duplicatus, omnia truncata, habuerint eoſdem circulos, tam truncantes, quàm medium corporum: Citrium erit maximum, reliqua eodem ordine magnitudinis corporum, quo hic ſunt recenſita.

XXX. Proportionem indagare segmentorum Citrij, Oliuæ, Pruni, aut fusi, factorum plano axi parallelo. *Placet autem his adere theoremata quæ in gratiam doliorum statuit, postquam hocce 30. proposuit Snellio, vel alteri soluendum, cùm illius solutionem se nescire fateatur.*

THEOREMATA.

CYlindrorum rectorum sectiones per axem, quæ diagonios habent æquales, nisi proportio diametri basis ad altitudinem fuerit, eadem, aut permutata, inæquales habent areas: estque inter has illius area maxima, quæ secat cylindrum æquealtum diametro suæ basis.

II. In truncis conicis reliqua omnia manent, nisi quod inter truncos proximos ab illo, qui latus diametro basis habuerit æquale, plus variatur arearum suarum proportio, quàm si cylindri pro truncis conicis essent, inter truncos remotiores minus.

III. Cylindrorum rectorum quorum sectiones habent eandem diagonium, corpora non habent inter se proportiones analogas proportionibus arearum, quibus secantur per axem: nec cuius est maxima sectrix area, eiusdem & corpus maximum est. *Vide praxim.*

IV. Omnium parallelepipedorum seu columnarum inscriptarum sphæræ eidem, quæ binis ex opposito quadratis basibus constant, cubus est maximo corpore.

V. Omnium cylindrorum, diagonium eandem habentium, maximus & capacissimus est is, cuius diameter basis, est ad altitudinem in proportione semidupla, seu vt latus tetragoni aut diagonios quadrati cubici ad latus cubi in eadem sphæra. *Videantur 2. corollaria, & admonitio.*

Definitio. Cylinder, & trunci coniugati dicantur, quando sectionibus vtrorumque per axem fuerit eadem, vel æquales diagonij, & vt diameter basis cylindri ad eius altitudinem: sic diametri minoris basis truncorum ad eorum latera accliuia.

VI. Dato cylindri & trunci coniugati latere, vel basis minoris diametro, inuenire trunci coniugati lineas reliquas. Oportet autem proportionem lateris vel basis in cylindro ad datum latus vel basim trunci esse minorem proportione diametri, & altitudinis cylindri iunctarum, ad diagonium.

VII. Si fuerit cylinder, & truncus conicus coniugati, & differentia diametrorum in basibus trunci secetur in proportione, quam habent inter se quadrata, diametri basis, & altitudinis cylindri: erit hoc diame-

tri.

tri quadratum, æquale rectangulo, sub minore diametro trunci, & sub composita ex hac & segmento, quod diametro cylindri respondet. *Videantur 4. Corollaria practica.*

VIII. In cyliudro & trunco conico coniugatis altitudinum proportio componitur ex proportione diametrorum in basibus, minori conici trunci & vtrâque cylindri, & ex proportione perpendiculi, ad latus accliuertunci.

IX. Si differentia diametrorum trunci secetur in proportione laterum cylindri coniugati & addatur pars respondens diametro basis cylindri ad minorem, fiantque rectangula. 1 sub minore & maiore. 2 sub minore, & modo composita: proportio rectanguli primi, aucti tertia parte quadrati à differentia diametrorum, ad rectangulum secundum, & proportio altitudinis cylindri ad altitudinem trunci, in vnum compositæ, constituunt proportionem corporis trunci ad corpus cylindri coniugati. *Videantur 3. Corollaria, & pulchra analogia.*

X. In omni coniugatione, trunci per augmentum proportionis diametrorum tandem fiunt minores quacumque data quantitate solida.

XI. Cylinder æqualis trunco æquialto, basim habet compositam ex duarum basium trunci & earum medij proportionalis trietibus singulis.

XII. Cylindri habentis altitudinem eandem cum trunco recto, & diagonion eandem, diameter basis est medium arithmeticum inter diametros basium trunci.

XIII. Excessus trunci, habentis eandem cum cylindro altitudinem, eandémque diagonion, proportionem ad illum habet, quam pars duodecima quadrati differentiæ ad quadratum de diametro cylindri. *Videatur Corollarium & analogia.*

XIV. Cylinder æqualis trunco & æquealtus, maiorem illo diagonion habet.

XV. Omnes proportiones diametrorum trunci locum habentes in coniugatione proportionis certæ, locum etiam habent in coniugatione proportionis maioris.

XVI. Omnis cylinder, altior maximo, super eadem diagonio, habet ex cylindris maximo humilioribus, socium sibi æqualem, quem subcontrarium dicemus.

XVII. In vna qualibet coniugatione, quæ quadratum diametri habet minus, quàm duplum quadrati altitudinis, omnes trunci ab ipso cylindro coniugato maiores, nonobstante quod minuitur eorum altitudo, postea decrescunt iterum, semper adhuc maiores cylindro coniugato, quoad altitudinem habuerint maiorem, quàm cylinder coniugati subcontrarius.

XVIII. In coniugatione proportionis dupla minoris, truncus æqualis cylindro coniugato, habet altitudinem minorem altitudine cylindri, qui coniugati socius, eidemque æqualis est, coniugationis tamen diuersæ. *Vide corollarium.*

XIX. In omnibus coniugationibus truncorum, & cylindri, quibus diameter basis minoris est minor semidupla lateris accliuis, datur bis aliqua proportio diametrorum trunci, per quam truncus fiat æqualis cylindro ex omnibus coniugationibus maximo.

XX. Trunci variarum coniugationum eandem habentes inter se diametrorum proportionem, quo propius assecuti fuerint altitudine cylindrum super eadem diagonio maximum, hoc erunt maiores; quo altiores illo, hoc minores.

XXI. Ex omnibus truncis coniugationis eiusdem, maximus est ille, qui habet altitudinem cylindri maximi subsemitriplam scilicet diagonij: Ab hoc verò fastigio cæteri omnes, tam qui altiores, quam qui humiliores, iterum decrescunt.

XXII. In coniugationibus, quæ quadratum diametri habent duplum quadrati altitudinis aut maius, trunci omnes sunt minores cylindro maximo, coniugato scilicet suo: & hoc tanto plus, quanto recesserimus à proportione dupla. *Vide corollar.*

XXIII. Data proportione diametrorum trunci, coniugationem inuenire, in qua talis truncus æquet cylindrum coniugationis maximæ.

XXIV. Data coniugatione, qua quadratum diametri in basi cylindri, minus est duplo quadrati altitudinis, inuenire proportiones duas diametrorum, quæ truncos coniugationis eiusdem efficiat æquales cylindro maximo. *Hæc duo, 23. & 24. Problemata Geometris proponit.*

XXV. Si diuersarum coniugationum trunci habuerint eandem inter se proportionem diametrorum, constituti super eadem diagonio, proportio corporum erit composita ex tribus elementis, ex proportione cylindrorum coniugationis, & ex proportionibus cylindri cuiusque ad suum truncum coniugatum, prioris quidem cylindri euersa, posterioris verò directa. *Videantur 3. corollaria practica.*

XXVI. In dolijs, quæ sunt inter se figuræ similis proportio capacitatum est tripla ad proportionem illarum longitudinum, quæ sunt ab orificio summo ad imum calcem alterutrius orbis lignei. *Vide 2. corollaria pro structura virga ad dolia mensuranda proposita.*

XXVII. Etiam binæ medietates dolij Austrici non planè fuerint similes, sed orbium ligneorum alter paulo minor & angustior reliquo, dummodo longitudo in mensoria sit eadem, insensibilis erit capacitatum in vtraque medietate differentia.

XXVIII. At si longitudo virgæ per vtrumque dolij truncum non sit æqualis, quod vsu venit: medium proportionale inter vtramque virgæ longitudinem, id est medius inter duos ab vno & altera medietate notatos, sine errore pro indice capacitatis vsurpatur.

XXIX. Curuatura tabularum, seu buceositas inter orificium medium & orbem vtrumque ligneum, in dolio Austriaco nihil derogat indicio virgæ, in oblongis doliis auget capacitatem virgâ indicatam (per se quidem, cæteris paribus) in Curtis minuit. *Videatur vsus totius libri circa dolia, quorum mensuram Keplerus varijs modis inuestigat.*

TERTIA PARS. DE QVADRANDA PER FALSVM SIMPLEX PARABOLA.

Propositio prima.

I. SI quælibet figura plana grauitatem acciperet, tanta esset, quanta si nullam grauitatem accepisset.

II. Si quælibet duæ magnitudines eiusdem generis graues fierent; eandem inter se haberent proportionem, quam ante grauitatem habuissent.

III. Si duo quælibet grauia eiusdem generis extra suum locum posita. deinde sibi relicta in eandem aliquam superficiem planam, quam finientem appello, caderent ad perpendiculum: duo verò quælibet grauia eiusdem generis suspensa non secundum sua centra grauitatis in terminis cuiusdam rectæ lineæ, quæ libra dicitur, in vno puncto, quod in ea sit, detentæ, ita vi proprij ponderis grauarent libram, vt ea æqualiter distaret à finiente: ea grauia inter se eandem, quam brachia libræ haberent proportionem: si qui ad contrarias partes attinent proportionis termini, antecedentes, & consequentes inter se comparentur. Brachia autem libræ dicimus duas illas partes, quæ inter punctum, in quo libra suspensa est, & terminos interijciuntur.

Lemma. Sit graue A B suspensum in puncto A, quod non sit eius centrum grauitatis: sit autem grauis A B centrum grauitatis C, quod quidem & punctum suspensionis A sit in eodem perpendiculo A H: & punctum perpendiculi, cui congruit C, sit D. Voco autem perpendiculum hîc generaliter rectam lineam, quam describit grauis naturaliter moti centrum grauitatis. Dico graue A B manere vt nunc.

IV. Grauium eiusdem generis pondera inter se sunt vt magnitudines.

Quibus positis sequentes propositiones Lucas demonstrat.

Propositio prima.

I. SI à cuiuslibet triãguli vertice recta linea ad medium basis cadat, omnem aliam rectam lineam lateribus interceptam nec basi parallelam sic secabit, vt pars propinquior basi sit maior reliquâ.

II. Omnem parabolem diameter bifariam diuidit, vtraque autem talium partium vocetur semiparabola.

III. Si duæ parabolæ æquales diametros habuerint in directum inter se constitutas, & communem ordinatim applicatam: figuræ ex duabus semiparabolis compositæ diameter erit prædicta communis ordinatim applicata.

IV. Omnem prædictam figuram diameter bifariam diuidit.

V. Si sint duæ rectæ lineæ terminatæ: quotcumque autem magnitudinum centra grauitatis fuerint in vna earum, totidem sint in altera: sint autem & magnitudines, & partes prædictarum linearum, quæ à centris fiunt, binæ deinceps in eadem proportione, sumpto ordine ab iisdem terminis: centra grauitatis duarum magnitudinum cuiusque ex iis, quæ ad eandem lineam pertinent compositarum centra grauitatis, prędictas lineas diuidunt in easdem rationes.

VI. Omnium parabolarum diametri à centris grauitatis ipsarum figurarum in easdem rationes diuiduntur.

VII. Omnis figuræ ex duabus semiparabolis compositæ, cuius diameter sit ad vtriusque parabolæ diametros æquales, & in directum inter se constitutas communis ordinatim applicata, centrum grauitatis est punctum illud, in quo dicta diameter sic diuiditur, vt pars quæ ad verticem, sit ad reliquam vt 5 ad 3.

VIII. Omnis semiparabolæ centrum grauitatis est in ea recta linea, quæ diametro æquidistans basim ita diuidit, vt pars, quæ est ad curuam, sit ad reliquam, vt 5 ad 3.

IX. Omnis parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

X. Quęlibet parabolæ inter se proportionem habent, eosdem ipsis vertices, & easdem bases habentium triangulorum.

XI. Omnis parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Axioma. Si quodlibet graue secetur in duas partes vtcũque, contiguas autem eas aliqua causa teneat alterius ad alteram situ non mutato, earum partium simul centrum grauitatis esse in eodem puncto, in quo fuerat centrum grruitatis priusquam diuideretur. FINIS.



THEODOSII,

MENELAI,

ET MAVROLYCI,

SPHÆRICA.



IX quidpiam Aſtronomi, & Coſmographi demonſtrare poſſunt abſque ſphęricorum librorum ſcientia; quapropter omnes libentiſſimè libros iſtos excipient, qui ſolidè de ſphæricis agunt, quos libello concludi oportuit, vt paſſim à quopiam citari poſſint. Quibus ea pręmitto quæ Pitiſcus de triangulorum ſphęricorum dimenſione ſuggerit in ſua Trigonometria, quibus ſinguli problemata omnia ſoluant, quæ ad triangula tam plana quàm ſphęrica pertinent. Sequuntur ergo definitiones, & propoſitiones, quæ partim ex Euclidis elementis, partim ex aliis locis deſumptæ ſunt, vt ex Ptolomęo, Regiomontano, Copernico, &c.

Definitiones & propoſitiones Trigonometriæ.

I. TRigometria eſt doctrina de dimenſione triangulorum.

II. Triangulum eſt figura tribus lateribus tres angulos comprehendens.

III. Latera duo quęlibet ſunt crura anguli à ſe compreheſi; tertium, baſis.

IV. Latus vnumquodque dicitur ſubtendere angulum ſibi oppoſitum.

V. Latera maiora maiores angulos ſubtendunt: & minora minores, & æqualia æquales.

VI. Anguli menſura eſt circuli ex angulari puncto deſcripti arcus, inter crura ſatis prolongata interceptus.

XXXIV. Illud est, quod habet vel vnum obtusum.

XXXV. Hoc autem quod omnes angulos habet acutos.

XXXVI. Triangulum denique est planum vel sphæricum, illud in plano, hoc in globo.

XXXVII. Trianguli plani sub Trigonometriam cadentis latera sunt tantùm lineæ rectæ, *de quibus propterea deinceps agendum est sequentibus septem propositionibus.*

XXXVIII. Linea recta in rectas parallelas incidens angulos similes, similiterque aut alternatim sitos facit: eapropter si plures rectæ in eandem rectam sint perpendiculares, sunt inuicem parallelæ.

XXXIX. Si plures rectæ pluribus rectis parallelis intersecentur, intersegmenta sunt proportionalia.

XL. Si duæ rectæ in se mutuò ducantur, efficitur inde quadrangulum rectangulum.

XLI. Rectangulum è tota vna & segmentis alterius simul sumptæ, sunt æqualia rectangulo ex vtraque tota.

XLII. Si quatuor rectæ sint proportionales, *id est si se habeant vt prima ad secundum, ita tertia ad quartam,* rectangulum mediarum æquatur rectangulo extremarum. *Hinc fit vt datis tribus, detur quarta, cum quatuor rectæ sunt proportionales, rectangulum enim mediarum diuisum per extremarum alteram, relinquit alteram.*

Deinde rectangula æqualia latera habent reciprocè proportionalia hoc est, in rectangulis æqualibus habent sese vt latus minus rectanguli primi ad latus minus secundi, ita latus maius rectanguli secundi ad latus maius primi, & contra.

XLIII. Si tres rectæ sint proportionales, *id est, si secunda ad tertiam se habet vt prima ad secundam,* quadratum mediæ æquatur oblongo extremarum.

XLIV. Si recta bisecta continuetur, oblongum continuatæ & continuationis est ęquale quadrato rectę ex bisegmento & continuatione compositæ, minus quadrato bisegmenti, ex *6*. prop. 2. Eucl. *sed ad triangula reuertamur.*

XLV. In triangulo plano parallela basi, crura secat proportionaliter.

XLVI. Si plura triangula comparentur, æquiangula habent latera circa æquales angulos proportionalia, & contra. *Hoc autem theorema ex 4. 6. Eucl. sumptum est totius trigonometriæ fundamentum.*

XLVII. Si plura triangula plana componantur, & rectis parallelis intersecentur, intersegmenta sunt proportionalia.

XLVIII. Si trianguli plani quodcumque latus continuetur, angulus exterior per continuationem illam factus, est æqualis angulis duobus interioribus oppositis.

poſſunt: complementis ad ſemicirculum pro latere & angulo maximo hinc inde ſumptis.

LXII. Triangulum ſphæricum rectangulum aut vnum habet rectum, aut plures vno.

LXIII. Vnum rectum, vel cum duobus acutis, vel cum duobus obtuſis, vel cum obtuſo, & acuto.

LXIV. Triangulum ſphæricum rectangulum cum duobus acutis habet ex angulo recto oppoſitum ſibi triangulum rectangulum cum duobus obtuſis, & contra.

LXV. Trianguli ſphærici rectanguli cum duobus acutis latera ſingula ſunt quadrantibus minora.

LXVI. Trianguli ſphærici rectanguli cum duobus obtuſis latera duo ſunt quadrantibus maiora: tertium quadrante minus.

LXVII. Triangulo ſphærico rectangulo cum acuto, & obtuſo opponitur ex acuto triangulum rectangulum cum duobus acutis.

LXVIII. Trianguli ſphærici plures rectos habentis latera rectos ſubtendentia ſunt quadrantes.

LXIX. Triangulum ſphæricum plures rectos habens, habet tres, vel duos rectos: adeoque de lateribus, tres, vel duos quadrantes.

LXX. Si Trianguli ſphęrici duos rectos habentis tertius angulus ſit acutus, tertium latus eſt quadrante minus, ſin obtuſus, maius.

LXXI. Triangulum ſphæricum obliquangulum aut conſtat ex puris acutis, vel obtuſis: aut ex his vtriſque mixtis.

LXXII. Triangulo ſphærico purè acutangulo opponitur triangulum ſphæricum cum duobus obtuſis & vno acuto, & contra.

LXXIII. Triangulo ſphærico purè obtuſangulo opponitur triangulum ſphæricum cum duobus obtuſis & vno acuto, & contra.

LXXIV. Trianguli ſphærici cuiuſcumque, tres anguli ſunt duobus rectis maiores.

Hæc ſunt, quæ primo libro docet: Omiſſis autem quæ habet l. 2. de tabulis ſinuum, tangentium, & ſecantium addo 6. axiomata proportionum l. 3. quibus docet triangulorum planorum ſolutionem. 4. poſtmodum allaturus l. 4. quibus ſphærica triangula ſoluantur: ſic igitur habet pro triangulis rectangulis.

Axioma primum.

Vt hypotenuſa ad perpendiculum, ita radius ad ſinum anguli perpendiculo oppoſiti, & contra.

II. Vt baſis ad perpendiculum, ita radius ad tangentem anguli perpendiculo oppoſiti, & contra.

III. Vt basis ad hypotenusam, ita radius ab secantem anguli perpendiculo oppositi. *Iam pro triangulis planis vniuersis.*

IV. Latera sinibus angulorum oppositorum directè sunt proportionalia.

V. Vt summa duorum laterum ad differentiam eorumdem: ita tangens dimidij summæ duorum angulorum oppositorum, ad tangentem differentiæ infra vel supra dimidium.

VI. Vt latus maximum ad summam reliquorum laterum: ita differentia reliquorum laterum ad segmentum lateris maximi; quo dempto, in relicti dimidium perpendiculum cadit. Sequuntur axiomata 4 proportionum ad triangulorum sphæricorum solutionem sufficientia.

Axioma primum.

In triangulis sphæricis rectangulis pluribus, acutum ad basim eundem habentibus, sinus hypotenusarum & perpendiculorum omnes sunt inter se proportionales.

In iisdem, sinus basium & tangentes perpendiculorum omnes sunt inter sese proportionales.

II. In triangulis sphæricis vniuersis, sinus laterum sinibus oppositorum angulorum sunt directè propotionales.

IV. In iisdem, Si duo latera sigillatim quadrantibus minora, primum ipsa inter sese, deinde latus minus cum complemento maioris componas: Et sinui arcus compositi posterioris sinum complementi arcus compositi prioris subtrahas, vel sinum excessus addas, vt est radius ad medietatem rectæ per illam siue substractionem, siue additionem factæ: ita sinus versus anguli à dictis duobus lateribus comprehensi ad rectam, qua subtracta de sinu arcus compositi posterioris, relinquitur sinus complementi terij lateris, vel, de qua subtractus sinus arcus compositi posterioris relinquit sinum excessus tertij lateris. Quorum omnium plures casus, & exempla plurima apud Autorem videri possunt.

De vsu, & constructione canonis triangulorum.

His omnibus addo nonnulla ex eiusdem libro 2. & 5 quæ ad dimensionem triangulorum, & ad tabulas sinuum, tangentium, & secantium attinent, vt latera, vel anguli siue puri, siue mixti reperiantur, & adcalculum redigantur, eapropter præcipua notanda subijcio.

I. Omnis dimensio triangulorum fit per regulam auream, quæ datis tribus numeris inter sese proportionalibus reperit quartum.

II. Partes triangulorum, eorumque proportiones numero certo explicari debent, quod fieri nequit in vllorum angulorum mensura, nec

in sphæricorum lateribus, nisi quidquid est curuilineum ad rectas lineas reducatur, cum proportio recti, & curuilinei necdum inuenta sit.

III. Hæc reductio fit definiendo quantitatem rectarum ad circulum applicatarum respectu radij: quæ sunt sinus recti & versi, & tangentes atque secantes. qua definione tabulæ construuntur.

IV. Sinus rectus est semissis subtensæ dupli arcus, qui est eidem in arcu quadrante minori, & maiori vsque ad semicirculum: cum autem sinum rectum complementi audis, intellige complementi arcus quadrante minoris.

V. Sinus rectus est quæcumque perpendicularis ducta in diametrum ex altero arcus termino.

VI. Sinus rectus complementi est æqualis segmento diametri inter sinum rectum arcus, & centrum intercepti.

VII. Sinus versus est segmentum diametri inter sinum rectum & circumferentiam interceptum, qui est maior, cùm est sinus arcus quadrante maioris, minor vero, minoris.

VIII. Tangens est recta perpendicularis ducta à secante in extremitatem diametri ad alterum arcus terminum.

IX. Secans est recta per alterum arcus terminum vsque ad summitatem tangentis ducta.

X. Cùm autem nullæ tangentes, aut secantes possint esse arcuum quadrante maiorum; tabulæ sinuum rectorum, quæ solæ necessariæ sunt, non vltra quadrantem extenduntur, cum arcum quadrante maiorum sinus sint ijdem qui minorum: at verò tabulæ sinuum versorum vsque semicirculum extendi possunt.

XI. Tabulæ vulgò construuntur ad singula prima minuta, Rhetico tamen ad decimas minutorum secundorum.

XII. Porrò radius certarum partium assumi debet, ad quem omnes sinus secantes, & tangentes ferè irrationales sunt; quapropter nullæ tabulæ exactæ dari possunt: quæ tamen tales esse debent, vt nullus numerus absit à vero per integram earum partium, quarum radius est assumptus.

XIII. Vt nullus error committatur in tabularum constructione, & fractiones nullum negotium facessant, tantus radius assumatur, vt error in tot à sinistra numeris, quot in tabulis collocare volumus, nullus inesse possit, & numeri à dextra versus sinistram erronei post supputationem finitam abscindantur: vt cùm Regiomontanus supputauit tabulas ad partes radij 6000000. sumpsit radium partium 60000000000. vt post supputationem quatuor notas abscinderet. Rheticus verò assumpsit radium partium 1000000000000000. vt haberet radium

partium 10000000000. & post supputationem abscidit 5. notas de singulis sinibus à sinistra dextrorsum: autor verò radium partium 100000, tantum assumit.

XIV. Primò sinus recti arcuum quadrante minorum in iisdem partibus radij quærendi: ex quibus inuentis deducantur sinus versi, secantes & tangentes: illi autem sinus recti, è quibus alij deducuntur, dicuntur primarii, qui 3. statuuntur, nempe semisses laterum quadranguli, sexanguli, & decanguli circulo inscriptorum: id est, sinus graduum 45.30. & 18. latus enim quadranguli æquè potest duobus radiis; latus sexanguli æquale est radio; & latus decanguli est maius segmentum radij proportionaliter secti: secatur autem recta quæcumque proportionaliter, cum segmentum maius ita se habet ad minus, vt tota ad segmentum maius.

XV. Reliqui verò sinus, qui secundarij vocantur, ex primariis reperiuntur per inuestigationem sinuum complementorum, arcuum dimidiorum, & duplorum, & sinuum summæ, vel differentiæ duorum arcum inæqualium coniunctim quadrante minorum. Quibus positis addit in quinto libro compendia quædam canonis condendi, & vsurpandi, quæ sequuntur.

XVI. Differentia sinuum arcuum duorum à 60. gradibus hinc inde pariter distantium, est æqualis sinui distantiæ: vnde sinibus datis 60. quorumque graduum, sinus reliquorum 30. per solam additionem, vel substractionem reperiuntur.

XVII. Differentia tangentium duorum arcuum quadrantem simul adimplentium est dupla ad tangentem differentiæ arcuum: quapropter datis tangentibus duorum arcuum quadrantem simul adimplentium, datur tangens differentiæ duorum illorum arcuum, & contra,

XVIII. Secans arcus est æqualis tangenti eiusdem arcus & dimidij complementi: eapropter datis tangentibus arcus & dimidij complementi, datur eiusdem arcus secans; & contra. Dato secante arcus, vna cum eiusdem arcus tangente, datur tangens dimidij complementi, ibi per additionem, hic per substractionem.

XIX. Secans arcus, cum tangente eiusdem, est æqualis tangenti arcus ex arcu dato & dimidio complemento compositi. Hinc data secante cuiuscumque, vnà cum tangente eiusdem, datur tangens ex arcu dato & dimidio complemento compositi. Et contra: data tangente arcus vna cum tangente arcus ex arcu dato, & dimidio complemento compositis, datur arcus primi secans. Ibi per additionē; hic per substractionem

XX. Vt sinus ad radium, ita radius ad secantem complementi.

XXI. Vt tangens ad radium, ita radius ad tangentem complementi.

Qui plura voluerit, legat πρόχειρον, Vietæ, c. 19. l. 8. Responsorum: hoc enim ante libros sphæricorum attulisse sufficit, vt ea possint intelligi quæ ad triangula,& ad eorum sinus pertinent.

Est & alius modus quo triangula per logarithmos soluantur, de quibus Neperus, & Keplerus fuse: sed via communis per tabulas sinuum plerisque magis naturalis, & commodior esse videtur; id tamen habet commodi via logarithmica, vt sola multiplicatione, & additione diuisionem in alia methodo necessariam suppleat. Quidquid sit, vtrôque modo ex lateribus angulos,& ex angulis latera vel purè,vel mixtim assequimur; nam ex sex in triangulo spectandis,nempe tribus lateribus, & tribus angulis, tribus quibuslibet datis, tria reliqua facile innotescunt. Hinc datorum in triangulo quocumque sex species oriuntur:duæ puræ, scilicet vbi tria latera solùm, aut tres anguli solùm dantur: reliquæ 4. mixtæ sunt, cum nempe duo latera, & angulus vnus datus est, qui vel datis lateribus comprehenditur, aut alterutro datorum laterum opponitur: aut cum duo anguli cum vno laterum dati sunt,siue latus illud alterutri datorum angulorum opponatur, siue ei adiaceat: quæ sphæricis præposuisse,*Theotime*,satis superque fuerit,

Nunc autem Theodosij, Menelai, atque Maurolyci sphærica aggredior, quibus omnia complecti possis animo quæ ad singulos sphæræ tam cœlestis quam terrenæ circulos attinent,nihil vt esse possit in vtrôque mundo, ex quo ad mundi conditorem non exurgas.

THEODOSII SPHÆRICORVM ELEMENTORVM ex traditione Maurolyci.

LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

I. Sphæra est figura corporea vna quidem superficie cõtenta, intra quam vnum punctorum existit:à quo omnes lineæ protractæ, quæ illi superficiei occurrunt, sunt ad inuicem æquales.

II. Et punctum illud est sphæræ centrum.

III. Diameter sphæræ est quælibet linea per centrum eius transiens ad superficiem sphæræ extremitates applicans.

IV. Axis autem sphæræ est diameter fixa, super quam sphæra circumuoluitur.

V. Extrema verò axis poli dicuntur.

VI. Polus circuli punctum est in superficie sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circumferentiam circuli protractæ sunt ad inuicem æquales.

VII. Circulorum in sphæra à centro elongatio æqualis dicitur, cùm perpendiculares, quæ à centro sphæræ ad circulorum superficies protrahuntur, ad inuicem sunt æquales.

VIII. Circulus magis remotus à centro est, super quem longior cadit perpendicularis.

IX. Superficies super superficiem inclinata dicitur, cùm super communem sectionem superficierum quodlibit punctum signatur: à quo in vtraque duarum superficierum linea recta perpendiculariter erigitur.

X. Et tales duæ lineæ angulum continent acutum.

XI. Inclinatio autem est angulus, qui ab illis duabus rectis lineis continetur.

XII. Angulus inclinationis est differentia recti anguli ad angulum acutum.

XIII. Inclinationes autem superficierum æquales sunt, quæ angulos æquales dicto modo suscipiunt:

XIV. Maior verò inclinatio, quæ minorem suscipit angulum acutum, vel cuius inclinationis angulus maior est.

PETITIO.

Super quodlibet punctum in superficie sphæræ ad datum spatium circulum describere. Vnde punctum illud erit polus circuli.

Propositio Prima.

Cum sphæræ superficiem secat aliqua planâ superficies, sectio facta in superficie sphæræ circulus est.

Corollarium.

Ex hoc itaque manifestum est, quod centrum omnis circuli, signati in sphæra, aut est centrum sphæræ: aut punctum, cui occurrit perpendicularis ducta à centro sphæræ ad superficium circuli.

Propos. II.

Sphæræ propositæ centrum inuenire.

Cor. *Manifestum igitur ex hac est, quod si à centro cuiuslibet circuli in sphæra signati linea perpendicularis ad eius superficiem educatur vtrinque ad sphæricam vsque superficiem, necesse est eam per centrum ipsius sphæræ transire.*

Propos. III.

Si sphæram plana superficies contingat: in vno tantùm puncto contingere necesse est.

Vnde manifestum est, quod signatis duobus punctis in superficie sphæræ: linea recta coniungens signata puncta cadit intra superficiem sphæræ.

Prop. IV.

Sphæram plana superficie contingente, si à puncto contactus ad centrum sphæræ recta linea ducatur, necesse est eam supra superficiem contingentem stare perpendiculariter.

Prop. V.

Si spheram plana superficies contingat: à puncto autem contactus recta linea ad contingentem superficiem perpendiculariter inter sphæram ducatur, in eadem centrum sphæræ esse necesse est.

Prop. VI.

Si in sphæra plures circuli fuerint signati: Qui per centrum sphæræ transierit, omnibus erit maior. Reliquorum autem, hi quidem, quorum longitudo à centro æqualis fuerit erunt æquales: At cuius longitudo maior fuerit, erit minor,

Prop. VII.

Omnis circulus maior in sphæra signatus transit percentrum sphæræ: Et circulorum minorum æqualium æquales sunt à centro sphæræ longitudines Minoris autem eorum maior erit longitudo.

Prop. VIII.

Si in sphæra circulus, qui per eius centrum non transeat, signetur: & à centro sphæræ ad centrum circuli recta linea ducatur, necesse est eam super circuli signati superficiem esse perpendicularem.

Prop. IX.

✠ Omnis perpendicularis ducta à centro sphæræ ad superficiem cuiuslibet circuli in sphæra signati, cum in ambas partes producitur, transit per polos ipsius circuli.

Propos. X.

✠ Omnis perpendicularis à centro cuiuslibet circuli in sphæra signati in vtramque partem égressa per pulos ipsius circuli transire ex necessitate conuincitur.

Prop. XI.

✠ Omnis linea recta continuans alterum duorum polorum cuiuslibet circuli signati in sphæra cum centro ipsius, ad eius superficiem perpendicularis esse probatur.

Prop. XII.

✠ Omnem perpendicularem ab alterutro duorum polorum alicuius circuli in sphæra signati ad ipsius superficiem ductam in centrum eius cadere necesse est, eamque, si in continuum & directum protrahatur, reliquo polo eiusdem circuli obuiare necesse est.

Prop. XIII.

✠ Omnis recta linea continuans duos polos alicuius circuli in sphæra

signati super ipsum perpendicularis esse, ac per eius centrum & centrum sphæræ transire probatur;

Prop. XIV.

✠ Omnis recta linea, quæ alterum duorum polorum alicuius circuli in sphæra signati cum centro sphæræ continuat, si quousque ex altera parte superficiei sphæræ obuiet, protrahatur, super reliquum polum ipsius circuli cadere ex necessitate conuincitur.

Manifestum ergo est quod omnis circulus maior transiens per alterum polorum alicuius circuli in sphæra signati transit per reliquum.

Prop. XV.

✠ Omnis recta linea à centro sphæræ ad centrum cuiuslibet minoris circuli in sphæra signati protacta, cúm in ambas partes quod superficiei sphęræ obuiet producitur, supra polis ipsius circuli cadere necessariò comprobatur.

Prop. XVI.

Omnes circuli maiores in sphæra diuidunt se inuicem per æqualia.

Prop. XVII.

Omnes circuli in sphæra se inuicem per æqualia diuidentes, sunt maiores.

Prop. XVIII.

Omnis circulus maior secans alium circulum in sphęra orthogonaliter secat, eum per æqualia, & transit per polos eius.

Prop. XIX.

Omnis circulus maior secans aliquem ex circulis minoribus sphæræ per æqualia, secat eum orthogonaliter, & transit per polos eius.

Prop. XX.

Omnis circulus maior transiens per polos alicuius circuli signati in sphęra, secat eum per æqualia, & orthogonaliter.

Prop. XXI.

Omnis circulus maior, per cuius polos transit alius circulus maior in sphæra, transibit vicissim & per polos illius.

Prop. XXII.

Omnis circulus transiens per polos alicuius alterius circuli signati in sphęra est circulus maior, & secat eum per æqualia & orthogonaliter.

Prop. XXIII.

Omnis circulus secans aliquem ex circulis, qui in sphæra sunt, per æqualia, & orthogonaliter, est circulus maior, & transit per polos eius.

Prop XXIV.

Omnis circulus in sphæra signatus à cuius vtrolibet polo perpendi-

cularitet

cularis ad ipsum ducta æqualis est semidiametro eius, est circulus maior.

Lemma.

Si à puncto in diametro circuli signato ducatur ad peripheriam recta linea æqualis vtrilibet portionum diametri punctum signatum erit centrum circuli.

Prop. XXV.

✠ Omnis recta linea, quæ à polo alicuius maioris circuli in sphæra signati ad ipsius peripheriam protrahitur, est æqualis lateri quadrati in eodem circulo designati.

Prop. XXVI.

Omnis circulus in sphæra signatus à cuius polo ad ipsius peripheriam linea protracta æqualis est lateri quadrati, quod in eo describitur, est circulus maior.

Prop. XXVII.

Omnis circulus, à cuius polo recta linea ad ipsius peripheriam ducta est æqualis lateri quadrati maiori circulo in sphæra signato inscripti est circulis maior.

Prop. XXVIII.

Proposita sphæra, circuloque in ea dato, rectam lineam æqualem diametro ipsius circuli exponere.

Prop. XXIX.

Data sphæra rectam lineam diametro ipsius æqualem exponere.

Prop. XXX.

Si à polo alicuius circuli in sphæra signati recta linea ad sphæræ superficiem ducatur, quæ sit æqualis lineæ ab eodem polo super circuli ipsius peripheriam descendenti, necesse est eam in eiusdem circuli peripheriam terminari.

Prop. XXXI.

Quibuscumque duobus punctis in sphæræ superficie datis, circulum maiorem, qui per ea transeat, designare.

Prop. XXXII.

Circuli in sphæra signati polum inuenire.

Ex hoc autem manifestum, est quod omnium circulorum maiorum in sphæra descriptorum, quicumque transit per polos alterius: & reliquus quoque versa vice transibit per polos ipsius. Amplius autem omnes maiores circuli orthogonaliter se inuicem secantes vterque per alterius polos transeunt.

Prop. XXXIII.

In sphæræ superficie, puncto signato, si ab eo in alicuius circuli in eadem sphæra descripti peripheriam plures, quàm duæ rectæ lineæ ductæ fuerint æquales: punctum illud polum eiusdem circuli esse necesse est.

Propoſ. XXXIV.

Æquales ſibi inuicem ſunt cuncti circuli in ſphæra ſignati, à quorum polis rectæ lineæ ad ipſorum peripherias fuerint æquales. Contra & in circulis æqualibus in ſphæra ſignatis rectæ lineæ à polis ad peripheriam terminatæ ſunt ad inuicem æquales.

LIBER SECVNDVS

THEODOSII DEFINITIO.

Circuli in ſphæra ſe inuicem contingentes dicuntur, quorum communis ſectio eſt vtrumque contingens.

Propoſitio prima.

✠ Quicumque circuli in ſphæra ſunt æquidiſtantes, eoſdem polos habere probantur. *Probl.* II.

✠ Quicumque circuli in ſphæra habent eoſdem polos, ſunt æquidiſtantes.

Propoſ. III.

✠ Circuli æquales & æquidiſtantes in ſphęra non erũt, niſi duo tãtùm.

Propoſ. IV.

✠ Omnes duo circuli in ſphæra ſecantes ſuper vnum idemque punctum aliquem circulum maiorem per amborum polos tranſeuntem, in eodem puncto inuicem ſeſe contingent.

Propoſ. V.

✠ Omnis maior circulus in ſphæra tranſiens per polos duorum circulorum ſeſe contingentium tranſibit per locum contactus.

Propoſ. VI.

✠ Duobus circulis ſe inuicem in ſphæra contingentibus, circulus maior, qui tranſit per polos vnius eorum, & per punctum contactus, tranſit etiam per polos alterius.

Propoſ. VII.

✠ Omnis circulus maior contingens aliquem circulum in ſphæra, contingit alium ei æqualem & æquidiſtantem.

Propoſ. VIII

Si fuerint in ſphæra duo circuli æquales & æquidiſtantes: Quicumque circulus maior vnum eorum contingit, alterum quoque contingere neceſſariò probatur. *Propoſ.* IX.

Omnes duo circuli æquidiſtanter in ſphæra, quos aliquis maior

circulus contingit, sibi inuicem sunt æquales.

Propos. X.

Omnis maior circulus super alium circulum maiorem in sphæra inclinatus contingit duos circulos æquales ad inuicem: eique super quem inclinatur æquidistantes.

Propos. XI.

Omnis circulus maior contingens aliquem circulum signatum in sphæra inclinatus est super maiorem circulum, cui æquidistat circulus quem contigit.

Propos. XII.

✠ Omnis circulus maior transiens per polos duorum circulorum se inuicem in sphæra secantium, diuidit vtrasque portiones eorum per æqualia.

Propos. XIII.

Duobus quibuscumque circulis se inuicem in sphæra quomodolibet secantibus, quicumque circulus diuidit vtrasque portiones eorum per æqualia, est circulus maior, & transit per polos eorum.

Propos. XIV.

Si circulus maior secet per æqualia singulas duas portiones circulorum duorum se inuicem in sphæra secantium, portiones, inquam, siue eiusdem, siue diuersorum circulorum, arcum tamen habens inter tales portiones minimè semicirculo æqualem: idem reliquas duas eorumdem portiones per æqualia singulas secabit per ipsorum polos incidens.

Propos. XV.

Si in sphæra fuerint circuli æquidistantes, per quorum polos circuli maiores ducantur. Arcus circulorum æquidistantium, qui sunt inter circulos maiores, erunt similes: Et arcus circulorum maiorum, qui sunt inter circulos æquidistantes, erunt æquales.

Propos. XVI.

Si supra diametros circulorum æqualium æquales circulorum portiones super ipsos circulos orthogonaliter erigantur: super quas duo puncta eas per inæqualia sed æqualiter diuidentia signentur, quæcumque rectæ lineæ æquales ad inuicem ab his punctis in circulorum peripherias descendunt, separant ex eis à diametrorum extremitatibus æquos arcus: Et lineæ, quæ à diametrorum extremis ex eis separant æquos arcus, sibi inuicem sunt æquales.

Propos. XVII.

Circulo minore proposito, punctoque in eius peripheria signato, circulum maiorem, qui ipsum super punctum signatum contingat describere.

Propoſ. XVIII.

Si in ſphęra fuerint plures circuli æquidiſtantes, vnum quorum duo circuli maiores contingant. & reliquos ſecent, Erunt portiones circulorum æquidiſtantium, quæ ſunt inter medietates circulorum duorum, quæ non concurrunt, ſimiles: Et portiones circulorum maiorum, quæ ſunt inter circulos æquidiſtantes, erunt æquales.

Propoſ. XIX.

Dato circulo minore in ſphęra, punctoque ſphęræ in ſuperficie inter ipſum & alium ſibi æqualem, & æquidiſtantem aſſignato, maiorem circulum, qui per ſignatum punctum tranſeat, circulumque datum contingat deſcribere.

Vnde manifeſtum eſt, quod per punctum in ſuperficie ſphæræ ſignatum inter duos circulos æquales & æquidiſtantes poſſunt ſemper deſcribi duo circuli maiores, qui contingant dictos æquidiſtantes.

Propoſ. XX.

Omnes circuli maiores ex circulis æquidiſtantibus in ſphęra inter ſe arcus ſimiles ſeparantes, aut tranſeunt per polos ipſorum, aut contingunt vnum & eundem ex illis æquidiſtantibus.

Propoſ. XXI.

Omnes circuli æquidiſtantes in ſphęra, quos ſecat aliquis circulus maior, ſeparantes à duabus partibus circuli maioris, qui eſt vnus ex æquidiſtantibus, æquos arcus ex circulo ſecante ſibi inuicem ſunt æquales. Qui autem ex eis maiorem arcum ſeparat, minor eſſe conuincitur.

Propoſ. XXII.

Quicumque circuli in ſphęra ſunt æquales & æquidiſtantes, ſeparant ex omni circulo maiori, qui ſecat eos, à duabus partibus maioris circuli, qui eſt vnus ex æquidiſtantibus, æquos arcus. Qui autem eſt maior, minorem.

Propoſ. XXIII.

Omnis circulus maior ſecans circulos quotlibet æquidiſtantes in ſphæra, & inclinatus ſuper ipſos diuidit eos omnes in duas partes inæquales, præter circulum maiorem, qui eis æquidiſtat: vnaquæque autem portionum apparentium, quæ ſunt inter circulum maiorem ex æquidiſtantibus & polum manifeſtum, eſt ſemicirculo maior. At verò quælibet earum, quæ ſunt inter eundem circulum maiorem & polum occultum, eſt ſemicirculo minor. Coalternæ autem portiones circulorum æquidiſtantium & æqualium ſunt ad inuicem æquales.

Propoſ. XXIV.

Si circulus maior in ſphæra ſecet quemlibet æquidiſtantium circulorum per quorum polos ipſe non tranſit, erunt portiones eorum ap-

parentes inter circulum maiorem ex æquidistantibus & polum manifestum interceptæ, quæ polo propinquiores existunt, maiores portionibus similibus, portionibus quæ ab eodem polo remotiores existunt.

Prop. XXV.

Si in sphæra maiores circuli super alios maiores circulos fuerint inclinati, quorum poli altiores fuerint à superficiebus circulorum super quos inclinantur, eorum erit inclinatio maior. Quorum autem poli æquè alti fuerint, eorum inclinationes necesse erit esse æquales.

Et manifestum est simul quod si circulorum maiorum in sphæra super alios circulos inclinatorum poli æquè remoti sunt à polis eorum, super quos inclinantur: eorum inclinationes æquales erunt: cuius verò polus vicinior fuerit polo eius, super quem inclinatur, eius inclinatio maior erit.

E contrario verò, quorum inclinatio maior fuerit: Eorum poli altiores erunt à superficiebus circulorum, super quos inclinantur: Quorum autem inclinationes æquales fuerint, eorum polares altitudines æquales esse necesse est.

Æquas circulorum inclinationes æquales polorum distantiæ: Et maiorem inclinationem maior polorum vicinitas sequitur.

Propos. XXVI.

✠ Circuli maiores in sphæra super circulum maiorem, cuius æquidistantem circulum tangunt, æqualiter inclinantur. Et si circuli maiores super circulum maiorem æquè inclinati sunt, contingent circulum ei, super quem inclinati sunt, æquidistantem. Qui autem maiorem æquidistantem contingit, magis inclinatur. Et qui magis inclinatur, continget maiorem æquidistantem.

Propos. XXVII.

✠ Circulorum maiorum in sphæra super aliquem circulum maiorem æqualiter inclinatorum poli sunt in peripheria circuli æquidistantis ei, super quem inclinantur. Contra, si circulorum maiorum poli sint in peripheria circul. æquidistantis ei, super quem inclinantur, æquales erunt eorum inclinationes.

Propos. XXVIII.

Si supra diametrum circuli portio quælibet circuli orthogonaliter erigatur, cuius peripheria in duo inæqualia secetur: & à puncto sectionis ad peripheriam circuli supra quem ipsa erecta est, plurimæ rectæ lineæ protrahantur: Tunc ex eis, quæ minori arcui ipsius portionis subtēdetur, omnium erit minima: Quæ autem maiori, omnium erit maxima. Cęteræ autem tanto maiores erunt, quanto à minima remotiores: tanto breuiores, quanto eidem propinquiores. Duæ verò vtrinque ab eadem æqualiter distantes erunt ad inuicem æquales.

Propos. XXIX.

Si circulum recta linea præter centrum secet, super quam portio circuli non maior semicirculo ad ipsum circulum orthogonaliter erigatur: & huius portionis peripheria in duo inæqualia diuidatur: & à puncto diuisionis ad maiorem arcum circuli, super quem portio ipsa erigitur, plurimæ rectæ lineæ demittantur: tunc ex eis, quæ minori arcui portionis subtenditur, omnium erit breuissima: Quæ autem terminat diametrum trāseuntem per punctum, in quo perpendicularis à puncto diuisionis portionis descendens ad planum circuli plano ipsi occurrit, omnium erit longissima; earum verò, quæ inter extremitatem minoris arcus, & huius diametri cadent, semper propinquior extremitati minoris arcus breuior erit. At verò earum, quæ inter extremitatem eiusdem diametri & extremitatem maioris arcus ceciderint, illa quæ maiori arcui subtenditur, erit omnium breuissima, eique semper vicinior, breuior erit.

Prop. XXX.

Si ex circulo linea recta portionem semicirculo non minorem abscindat, super quam describatur portio circuli semicirculo non maior, quæ inclinata sit super portionem semicirculo non maiorem: At arcus huius portionis inclinatæ in duo inæqualia diuidatur, ac etiam à puncto diuisionis ad arcum portionis semicirculo non minoris plurimæ rectæ lineæ demittantur, tunc ex eis quæ minori arcui portionis inclinatæ subtenditur, omnium erit breuissima. Quæ autem diametrum terminat transeuntem per punctum in quo perpendicularis à puncto diuisionis descendens in superficiem circuli, ipsi superficiei occurit, omnium erit longissima. Earum verò, quæ inter extremitatem huius diametri, & minoris arcus cadent, semper vicinior extremo minoris arcus breuior erit. At verò earum, quæ inter extremitatem eiusdem diametri, & maioris arcus ceciderint, illa quæ maiori arcui subtenditur, erit omnium breuissima, eique semper propior breuior erit.

Prop. XXXI.

Si in sphæræ superficie intra circuli cuiuscumq; peripheriam pūctum præter polum signetur, & ab eo ad ipsam perpheriam plurimi arcus circulorum maiorum ducantur, tunc ex eis qui per circuli polum transierit, omnium erit maximus: qui verò ei adiacet, omnium erit minimus. Cæterorum autem, quanto quilibet maximo transeunti per polum propinquior, tanto maior: duo verò ab eodem, siue à breuissimo vtrinque æqualiter distantes, inuicem æquales erunt.

Prop. XXXII.

Si in sphæra extra cuiuslibet circuli peripheriam punctum præter

polum signetur: & ab eo ad peripheriam circuli plurimi arcus circulorum maiorum ipsum secantes ducantur: Tunc ex eis, qui per circuli polum transierit, omnium erit maximus. Qui verò ei adiacet propinquior, semper maior erit. Partialium autem arcuum extrinsecorum peripheriæ applicatorum, qui transeuntis per polum pars est, erit omnium breuissimus: Qui verò ei magis appropinquat, breuior est. Duoque demum à breuissimo, aut longissimo æqualiter vtrinque remoti æquales erunt.

Propos. XXXIII.

Si quem circulum in sphæra quilibet maior circulus contingat, ac sui æquidistantem inter ipsum & sphæræ centrum cadentem idem circulus maior secet: fueritque vnus duorum polorum huius circuli maioris inter duos prædictos æquidistantes interceptus: Tunc quicumque maiores circuli illum duorum æquidistantium, qui positus est secari, contingunt, sunt super primum maiorem circulum inclinati: eritque illius, qui contingit ipsum punctum super punctum medium minoris portionis, maxima inclinatio, & minima altitudo: eius autem, qui contingit ipsum super punctum medium maioris portionis, erit inclinatio minima, & maxima altitudo. Cæterorum autem, quanto punctum contactus vicinius erit puncto medio portionis minoris, tanto erit inclinatio maior, & minor altitudo. Duorum verò, quorum contactus à medio puncto ipsius minoris portionis æqualiter distant, erunt & inclinationes & altitudines æquales. Poli autem omnium horum circulorum contingentium super peripheriam vnius circuli duobus primis æquidistantibus æquidistantis, ac vtraque eorum minoris necessariò erunt.

Propos. XXXIV.

Si quem circulum in sphæra quilibet circulus maior contingat, & illius æquidistantem inter ipsum & sphæræ centrum cadentem idem circulus maior secet, fueritque vnus duorum polorum huius maioris circuli inter duos prædictos æquidistantes interceptus; tunc quicumque duo maiores circuli illum duorum æquidistantium, qui positus est secari, contingunt super duo puncta à locis, in quibus maiorem circulum secant primum, æqualiter distantia, sunt super ipsum maiorem circulum æqualiter inclinati.

THEODOSII SPHÆRICORVM,

LIBER TERTIVS.

Propositio prima.

CVm in sphæra duo circuli maiores se inuicem secant: si ab alterutra duarum sectionum ex vtroque eorum duo arcus æquales ad inuicem, quos punctum commune sectionis eorum continuet, separentur, tunc rectas lineas, quæ eorum extremitates continuant, oportet esse inter se æquales.

Propos. II.

Si duo circuli magni in sphæra se inuicem secent: ex vno quorum separentur duo arcus æquales, qui continuentur ad vnam duarum sectionum: & protrahantur duæ superficies æquidistantes per extremitates duorum arcuum separatorum, abscindentesque ex reliquo circulo à puncto dictæ sectionis duos arcus minores duobus prioribus: fueritque altera istarum duarum superficierum æquidistantium, concurrens cum communi sectione duorum circulorum extra sphæram à parte illius puncti, ad quem continuantur arcus separati: Tunc erunt arcus, quos hæ duæ superficies separant de circulo secundo à duabus partibus puncti sectionis inæquales: maiorque eorum erit arcus, qui est inter communem sectionem & superficiem, quæ cum communi prædicta planorum circularium sectione non concurrit.

Propos. III.

Si circulus maior in sphæra fuerit super alium circulum maiorem inclinatus: fuerintque duo arcus circuli inclinati æquales continui separati per tres circulos æquidistantes ab eadem parte maioris circuli, qui eis æquidistat: tunc erunt duo arcus circuli maioris transeuntis per polos circulorum æquidistantium, & circuli inclinati, quos iidem æquidistantes separant, inæquales, maiorque eorum erit, qui propinquior fuerit circulo maiori ex circulis æquidistantibus.

Propos. IV.

✠ Si circulus maior in sphæra fuerit super alium circulum maiorem inclinatus: fuerintque ex vna qualibet quarta circuli inclinati, cuius principium sit alterutra duarum sectionum duo arcus æquales continui separati: tunc arcus circulorum magnorum à polo alterius per extremitates duorum arcuum separatorum in ipsius peripheriam descen-

descendentes ex ipsa periphęria arcus inęquales abscindent: quorum ille erit maior, qui erit ab eorum communi sectione remotior.

Prop. V.

✠ Si super maiorē circulum in sphęra contingentem duos circulorum ęquidistantium fuerit alius maior circulus inclinatus, contingēs duos eorumdem circulorum ęquidistantium prædictis duobus maiores, fuerintque loca contactuum super primum circulum maiorem, ex circulo autem inclinato separati fuerint duo arcus æquales continui ab eadem parte circuli maioris ex æquidistantibus: tunc tres circuli æquidistātes transeuntes per extremitates duorum arcuum separatorum separabunt ex primo circulo maiore arcus inæquales, quorum qui propinquior erit maiorum circulorum æquidistantium, erit maior.

Prop. VI.

✠ Si super circulū maiorem in sphæra contingentem duos circulorum æquidistantium fuerit alius maior circulus inclinatus contingens duos eorumdem æquidistantium prædictis duobus maiores, fuerintque loca contactuum super primum circulum maiorē: ex circulo autem inclinato separati fuerint duo arcus æquales continui ab eadem parte circuli maioris ex ęquidistantibus: tunc tres circuli maiores cōtingentes duos primos æquidistantes, quos contingit circulus maior primus, transeuntes per extremitates duorum arcuum separatorum separabunt ex circulo maiore circulorum æquidistantium duos arcus inæquales, quorum qui propinquior erit circulo maiori primo, maior erit.

Prop. VII.

Si circulus maior in sphæra fuerit super alium maiorem circulū inclinatus: fuerintque duo arcus circuli inclinati æquales non continui separati per quatuor circulos æquidistantes ab eadem parte maioris circuli qui ei æquidistat: Tunc erunt duo arcus circuli maioris transeuntis per polos circulorum æquidistantium, & circuli inclinati quos æquidistantes separant, inæquales: maiorque eorum erit, qui propinquior fuerit circulo maiori ex æquidistantibus.

Prop. VIII.

Si circulus maior in sphæra super aliū maiorem circulum fuerit inclinatus: fuerintque ex vna qualibet quarta circuli inclinati, cuius principium sit alterutra duarum sectionum duo arcus æquales non continui separati: tunc arcus circulorum magnorum à polo alterius per extremitates horum duorum arcuum in ipsius peripheriam descendentes ex ipsa peripheria arcus inæquales abscindent: quorum ille

erit maior, qui est ab eorum communi sectione remotior.

Prop. IX.

Si super circulum maiorem in sphæra contingentem duos circulorum æquidistantium fuerit alius maior circulus inclinatus contingens duos eorumdem circulorum ęquidistantium, prædictis duobus maiores: fuerintque loca contactuum super primum circulum maiorem, ex circulo autem inclinato separati fuerint duo arcus æquales non continui ab eadem parte circuli maioris ex æquidistantibus: tūc quatuor circuli æquidistantes transeuntes per extremitates duorum arcuum separatorum, separabunt ex primo circulo maiore duos arcus inæquales: quorum, qui propinquior maiori circulo æquidistantium, erit maior.

Prop. X.

Si super circulum maiorem in sphæra contingentem duos circulorum ęquidistantium fuerit alius maior circulus inclinatus contingens duos eorumdem æquidistantium prædictis duobus maiores: fuerintque loca contactuum super primum circulum maiorem: ex circulo autem inclinato separati fuerint duo arcus æquales non continui ab eadem parte circuli maioris ex æquidistantibus, tunc quatuor circuli maiores contingentes duos primos æquidistantes, quos contingit circulus maior primus, transeuntes per extrema duorum arcuum separatorum, separabunt ex circulo maiore circulorum æquidistantium duos arcus inæquales, quorum, qui propinquior erit circulo maiori primo, maior erit.

Prop. XI.

Si polus circulorum æquidistantium supra lineam continentem circulum maiorem fuerit, & secuerint hunc circulum duo circuli maiores orthogonaliter: quorum vnus sit ex circulis æquidistantibus, & alter sit inclinatus super circulos æquidistantes: & signata fuerint supra circulum inclinatum duo puncta qualitercumque contingat in vna & eadem parte à circulo maiore, qui est ex circulis æquidistantibus, & producti fuerint circuli maiores à polo per puncta signata, tunc erit proportio arcus circuli maioris ex æquidistantibus cadentis inter circulum primum maiorem, & sibi propinquum per eosdem polos, & vnum punctorum signatorum productum ad arcum circuli inclinati inter eosdem circulos interceptum maior, quàm proportio arcus circuli maioris ex æquidistantibus cadentis inter circulos productos per puncta signata ad arcum circuli inclinati inter signata puncta recepti.

Prop. XII.

Si polus circulorum æquidistantium fuerit supra lineam continen-

tem circulum maiorem: & ſecuerint hunc circulum duo circuli maiores orthogonaliter: quorum vnus ſit ex circulis æquidiſtantibus, & alter ſuper eos inclinatus: Et fuerit alius circulus maior ſecans circulum inclinatum inter circulum maiorem ex æquidiſtantibus, & inter circulum, quem circulus inclinatus cōtingit ex ipſis æquidiſtantibus, & fuerit tranſiens per polos æquidiſtantium, tunc proportio diametri ſphæræ ad diametrum circuli, quem contingit circulus inclinatus, erit maior proportione arcus circuli maioris æquidiſtantium cadentis inter circulos, qui per polos æquidiſtantium ab arcum circuli inclinati inter eoſdem circulos interceptum.

Prop. XIII.

Iiſdem ſuppoſitis, proportio diametri ſphæræ ad diametrum circuli ex æquidiſtantibus, tranſeuntis per ſectionem vltimi circuli maioris, & circuli inclinati, erit minor proportione arcus circuli maioris æquidiſtantium cadentis inter circulos, qui polos per æquidiſtantium ad arcum circuli inclinati inter eoſdem circulos clauſum.

Prop. XIV.

Cum in ſphæra fuerint duo circuli maiores contingentes vnum & eundem circulum ex circulis æquidiſtantibus, & ſeparauerint inter ſe ex circulis æquidiſtantibus arcus ſimiles. Et fuerit alius arcus circulus maior inclinatus ſuper circulos æquidiſtantes contingens duos circulos maiores duobus circulis, quos duo primi circuli contingebant, & ſecuerit ipſos duos circulos primos inter circulum maiorem ex æquidiſtantibus, & circulum, quem contingunt duo primi circuli: tunc proportio diametri ſphæræ ad diametrum circuli, quem contingit circulus inclinatus, eſt maior, quàm proportio arcus circuli maioris ex circulis æquidiſtantibus cadentis inter circulos primos, qui contingunt eundem circulum, ad arcum circuli inclinati inter eoſdem circulos interceptum.

Prop. XV.

Cum circuli æquidiſtantes in ſphæra fuerint, ſeparantes ex aliquo circulo maiore arcus æquales ab ea parte, qua ſequitur circulus maior, qui eſt ex æquidiſtantibus: & deſcripti fuerint circuli maiores per arcuum ſeparatorum terminos qui aut tranſeant per polos circulorum æquidiſtantium, aut contingant vnum & eundem circulum ex æquidiſtantibus, tunc ipſi ſeparabunt ex circulo maiore æquidiſtantium angulos æquales: Et ipſorum arcus à maiore æquidiſtantium hinc inde ad minores recepti ſunt æquales.

Prop. XVI.

Cum in ſphæra tetigerit circulus maior aliquem ex circulis æquidi-

ſtantibus, qui ſunt in ſphæra: & fuerit circulus alius inclinatus ſuper circulos æquidiſtantes contingens duos circulos æquidiſtantes maiores circulis, quos primus circulus contingit: Tunc hi duo circuli ſeparabunt inter ſe ex circulis æquidiſtantibus arcus diſſimiles: Et quicunque horum arcuum fuerit magis propinquus vni duorum polorum, quicunque fuerit, erit maior arcu ſui circuli ſimili ei, qui eſt magis remotus ab eo.

PRÆFATIO IN SPHÆRICA MENELAI.

MENELAVS, qui & Mileus, Geometra præſtantiſſimus, per annos fermè centum ante Ptolomæum ſtellas Romæ ac Rhodi obſeruaſſe narratur in ipſis magnæ conſtructionis libris, vbi Ptolomæus ſuas cum illius obſeruationibus confert. Scripſit hic poſt Theodoſium, qui ſphærica elementa primus tradidit, ſphæricorum libellos tres acutiſſimis demonſtrationibus refertos. Ex quorum tertio Ptolomæus ſumpſiſſe videtur quidquid de ſphæralibus triangulis tradidit in primo & ſecundo ſui magni voluminis. Hos Menelai libellos cùm ego in antiquis ex membrana codicibus reperiſſem, conatus ſum eos, quoniam corruptiſſimum erat exemplar, emendare, ac reſtituere, necnon quamplurimis tum neceſſariis, tum argutis ad augere propoſitionibus. Audierimus Tebitij ſupplementum in dictas Ptolomæi demonſtrationes: quippe quod non minus huc pertinet. Nam quod hic Menelaus in principio tertij, & Ptolomæus in fine primi hinc ſumptum oſtendit, Tebitius correxit ſupplens quod in demonſtrando fuerat omiſſum: ac deinde faciliùs demonſtrauit: Tum etiam, quod ad rem pertinet, cum vna ratio componitur ex duabus, duo de viginti modos compoſitionis eſſe tantùm, certis concludit argumentis, ſed ante Menelai lectionem hæc prælibanda duximus, Angulum ſphæralem eſſe eum, qui in ſphæræ ſuperficie ſub arcubus magnorum circulorum continetur. Talem autem angulum rectum eſſe circulis ſe inuicem orthogonaliter ſecantibus: acutum angulum eſſe recto minorem: obtuſum verò maiorem.

✠ Æquales ſphærales angulos eſſe illos, qui ſub arcubus circulorum æquos ad angulos inclinatorum continentur. Triangulum ſphærale eſſe, quod ſub tribus arcubus circulorum magnorum in ſuperficie ſphæræ comprehenditur. Nadir arcus cuiuſpiam eſſe rectam, ſiue chordam, quæ duplo ipſius arcus ſubtenditur. Sinum rectum alicuius

arcus esse dimidium ipsius nadir, seu chordæ dupli eiusdem arcus. Vnde manifestum est, quod quidquid Menelaus de ipsis nadir arcuum demonstrauit, idem de finibus, & è contrario, concludi potest.

✠ Ptolomæus quoque Menelaum sequutus chordam dupli propositi arcus in demonstrationibus accipit. Nos autem Ioannem de Monte-regio, & Georgium Peurbachium imitati, pro chorda dupli, sinum ipsius arcus breuitati consulentes consideramus: quandoquidem vtrobique demonstratio est eadem. Et vbicumque opus fuerit inter demonstrandum, Euclidis elementa, ac Theodosij sphærica, quæ necessariò præmittenda sunt, citabuntur.

MENELAI SPHÆRICORVM,

LIBER PRIMVS.

PROPOSITIONES.

Propositio prima.

PRopositis in sphæræ superficie duobus circulis æqualibus, dato in vno eorum arcui æqualem arcum in reliquo ab assignato puncto abscindere.

Prop. II.

Super assignatum punctum arcus circuli magni in superficie sphæræ angulum sphæralem dato angulo sub duobus arcubus circulorum magnorum in eadem superficie contento æqualem constituere.

Corollaria.

I. Hinc ergo manifestum est, quod anguli sub arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ contenti, qui æquos arcus assumunt de circulis æqualibus, ad quorum polos sunt constituti, sunt inuicem æquales. Contra, si anguli fuerint æquales, & assumpti quoque arcus inuicem erunt æquales.

II. Et quando duo circuli maiores in superficie sphæræ se inuicem secant, anguli sub illis contenti contra positi & oppositi sunt æquales.

III. Item si circuli se se orthogonaliter secant: rectos faciunt angulos: Et è contrario, si recti sunt anguli; circuli se se orthogonaliter secant.

IV. Item si angulus sphæralis quadrantem assumat de circulo, ad cuius polum constitutus est, rectus est contra, & rectus sphæralis angulus quadrantem assumit de circulo, ad cuius polum constituitur.

V. Demum angulus sphæralis minus, quàm circuli quartam assumens

de circulo, ad cuius polum constituitur, acutus est: Et è contrario, plus verò quàm circuli quartam assumens, obtusus est, & è contrario.

VI. *Ad summam, anguli sphærales semper sunt proportionales assumptis arcubus circulorum æqualium, ad quorum polos sunt constituti: sicut & ipsi inclinationum anguli, per vltimam sexti elementorum Euclidis.*

Prop. III.

Omnis trianguli duorum æqualium crurum ex circulis magnis in superficie sphæræ, duo anguli super latus tertium positi sunt ad inuicem æquales.

Prop. IV.

Cum æquantur duo anguli trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ; crura æqualis angulis opposita sunt inter se æqualia.

Prop. V.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, quorum vnus angulus vnius æqualis est vni angulo alterius, & arcus, qui continent angulum vnius, æquales arcubus, qui continent angulum alterius, singuli singulis: Et duo reliqui arcus æquales erunt. Quod si duo reliqui arcus æquales fuerint, tunc & duo anguli, quos continent arcus æquales in duobus triangulis, æquales erunt.

Prop. VI.

Cuiuslibet trianguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ quilibet duo arcus simul aggregati sunt maius arcu reliquo.

Prop. VII.

Cuiuslibet trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ tres arcus simul aggregati sunt minus integro circulo.

Coroll.

Et manifestum simul est, quod omnis sphæralis trianguli arcus minor est semicirculo.

Prop. VIII.

Ex tribus datis arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, triangulum in eadem superficie construere. Oportet autem vt datorum arcuum quilibet sit minor semicirculo, vtque eorum duo quilibet aggregati sint maius reliquo.

Prop. IX.

Cum producuntur à duobus extremitatibus arcus ex arcubus circulorum magnorum continentium triangulum in superficie sphæræ duo arcus concurrentes super punctum vnum infra triangulum:

tunc ipsi producti sunt minores duobus arcubus trianguli.

Prop. X.

Cuiuslibet trianguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ angulus vnus fuerit maior altero, arcus, qui subtenditur angulo maiori, maior est arcu, qui subtenditur angulo minori.

Prop. XI.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, quorum vnius duo arcus æquantur duobus arcubus alterius, singuli videlicet singulis: angulus autem sub duobus illis arcubus vnius, maior est angulo contento sub dictis duobus alterius arcubus: tunc & arcus, qui subtenditur angulo maiori, maior est arcu, qui subtenditur angulo minori. Item è contrario, angulus, quem subtendit arcus maior, erit & maior angulo, quem subtendit arcus minor.

Prop. XII.

Cuiuslibet trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ arcus vnus fuerit maior altero: angulus, quem subtendit maior arcus, maior erit angulo quem subtendit minor arcus.

Prop. XIII.

Triangulo cuiuscumque ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphęræ, arcus duo coniuncti ęquales fuerint semicirculo, tunc producto arcu reliquo angulus extrinsecus æqualis est angulo extrinsecus opposito super arcum productum. Si autem duo arcus coniuncti minus sint semicirculo, tunc angulus extra factus maior est angulo dicto interiori. Quod si duo arcus coniuncti semicirculum excedant, angulus exterior minor erit angulo ipso intus opposito..

Prop. XIV.

Contra, si ponatur angulus extrinsecus æqualis angulo sibi intus opposito in productione vnius arcus: tunc reliqui arcus coniuncti semicirculum conficiunt. Si autem extrinsecus angulus intrinseco maior fuerit, tunc reliqui arcus coniuncti minus sunt semicirculo. Si verò exterior angulus minor fuerit interiore, tunc reliqui arcus coniuncti semicirculum excedunt.

Corollaria.

Quæ propositio etiam ostendi potest ex præcedenti, vt destructis contrarijs propositum astruatur.

Manifestum est igitur quod quãdo trianguli sphæralis duo arcus coniuncti conficiunt semicirculum, tunc anguli arcubus illis oppositi coniuncti faciunt duos rectos.

Quando autem duo arcus coniuncti minus fuerint semicirculo, tunc & anguli illis oppositi congregati minus etiam erunt quàm duo recti: At cum duo arcus coniuncti semicirculum excesserint: & anguli quoque eis oppositi simul sumpti duos rectos angulos excedent.

Contra, si trianguli sphæralis duo anguli compositi conficiunt duos rectos; & arcus illis angulis subtensi simul sumpti semicirculum perficient. Quod si duo anguli aggregati minus fuerint, quàm duo recti: tunc & arcus eis subtensi simul positi semicirculum nequaquam attingent. Si demum duo anguli colligati duos rectos excesserint. Et arcus item eis subtensi pariter accepti semicirculum superabunt.

Prop. X V.

Cuiuscumque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ habentis duo crura æqualia, si fuerint arcus æquales circuli quadrantes, erunt illis oppositi anguli recti. Si autem arcus æquales fuerint quadrantibus minores: Et anguli eis oppositi acuti erunt. Si verò arcus æquiquartas circulorum excesserint: tunc item illis obiecti anguli erunt obtusi. Contra, si in triangulo sphærali isosscele anguli arcubus æquis subtensi recti fuerint, & arcus illi quadrantes erunt: Si autem anguli acuti, & arcus minores quadrantibus. Si obtusi, minores quadrantibus erunt.

Corollarium.

✠ *Vnde manifestum est quod triangulum sphærale æquilaterum ex tribus quadrantibus constructum habet tres angulos rectos: Ex arcubus verò quadrante singulis minoribus, tres acutos: Ex arcubus tandem singulis circuli quarta maioribus, tres obtusos.*

Contra, triangulum sphærale æquiangulum habens tres rectos angulos, habet & tres arcus quadrantes. Habens autem tres acutos, habet tres arcus quadrantibus minores. Habens demum tres obtusos, habet tres arcus circulorum quartis longiores.

Prop. X V I.

Cuiuslibet trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ fuerit vnus arcuum quadrans, & vnus angulorum rectus: Erit & reliquorum arcuum saltem vnus quadrans: & reliquorum angulorum saltem vnus rectus.

Corollarium.

Constat ergo impossibile esse inueniri triangulum sphærale rectangulum, cuius vnus dumtaxat arcus sit circuli quadrans.

Prop. X V I I.

✠ Cuiusque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ fuerint arcus singuli quadrantibus maiores, erunt eius anguli

anguli obtusi; Et similes, si duo arcus excedant quartas modo tertius sit quadrans.

Prop. XVIII.

Cuiusque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ anguli singuli fuerint acuti: erunt eius arcus singuli quadrantibus minores. Et similiter, si duo tantùm anguli sint acuti, ac tertius rectus.

Corollarium.

Notandum quod tam præsens quam præcedens propositio non conuertitur. Non enim necesse est, si trianguli sphæralis anguli sint obtusi, & arcus subtensos omnes esse quadrantibus maiores. Neque rursum arcus quadrantibus minores cogunt omnes angulos esse acutos. Potest enim esse triangulum sphærale habens tres angulos obtusos, & duos tantùm arcus quadrantibus maiores: reliquo autem quadrante aut minore existente. Et productis dictis arcubus quadrante maioribus ad concursum, fiet sphærale triangulum trium arcuum quadrantibus minorum habens duos tantùm acutos & reliquum obtusum angulum.

Prop. XIX.

Cuiuscunque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ vnus arcuum fuerit quadrante maior, duóque cæteri singuli quadrantibus minores; eiusdem nullus rectus erit angulus.

Corollarium.

Ex prædictis manifestum est, quod omne triangulum sphærale rectangulum aut habet tres quadrantes, trésque rectos angulos: aut duos quadrantes, totidémque rectos angulos: aut nullum quadrantem vnúmque tantummodo rectum angulum. Quando autem nullum habet quadrantem, tunc aut omnes arcus habet quadrante minores, aut duos quadrante maiores, & reliquum minorem. Præterea si habet omnes arcus quadrante minores, tunc habet duos angulos reliquos acutos. Si autem duos arcus quadrante maiores; tunc habet angulorum reliquorum vnum acutum, & reliquum obtusum, quando rectus angulus vni dictorum arcuum opponitur. Nam quando rectus angulus arcuum quadrante minorem respicit, habet duos reliquos angulos obtusos.

Prop. XX.

✠ Omnis trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ anguli tres coniuncti sunt maius quàm duo recti, minus verò quàm sex recti.

Prop. XXI.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magno-

rum in superficie sphæræ habentium duos angulos rectos: duósque angulos ex reliquis æquales non autem rectos: Item duos arcus rectis oppositos æquales: erunt & duo anguli reliqui æquales, & duo reliqui vnius arcus duobus reliquis alterius arcubus singuli singulis æquales.

Prop. XXII.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ habentium inuicem duos angulos æquales, quorum arcus, qui continent duos alios angulos, duo duobus, vnusquisque suo relatiuo, fuerint æquales: reliqui autem anguli, aut ambo acuti, aut ambo obtusi: Erit & arcus reliquus vnius arcui reliquo alterius æqualis: & duo anguli reliqui duobus angulis reliquis alterius singuli singulis æquales.

Prop. XXIII.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphæræ, si æquantur duo anguli vnius duobus angulis alterius, vnusquisque suo relatiuo, & duo arcus super quos sunt anguli, sunt inuicem æquales duo; tunc duo arcus reliqui vnius, sunt æquales duobus arcubus reliquis alterius, quisque suo relatiuo, & reliquus angulus reliquo angulo æqualis.

Prop. XXIIII.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, quorum vnius duo anguli duobus alterius angulis singuli singulis sunt æquales, Et duo arcus qui continent tertium angulum in vno, æquales duobus arcubus, qui continent tertium angulum in altero, quisque suo relatiuo; Et tertius angulus in neutro est polus reliqui lateris, seu arcus: Erunt & reliqui arcus inter se æquales: & tertij anguli æquales.

Prop. XXV.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, si æquales fuerint duo anguli vnius duobus angulis alterius, singuli singulis: & vnus arcuum subtensorum in vno æqualis arcui relatiuo in altero: reliqui autem subtensi in vtroque coniuncti minimè conficiant semicirculum; erunt & hi arcus subtensi æquales: & reliqui arcus æquales: & reliqui anguli æquales.

Prop. XXVI.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, si fuerint anguli vnius æquales angulis alterius, quisque scilicet angulus suo relatiuo: erunt & æquis angulis subtensi arcus æquales; relatiuos relatiuis videlicet conferendo.

Corollarium.

Manifestum est igitur ex quinta huius, & ex præsenti, quod omnia duo sphæralia triangula, si fuerint ad inuicem æquilatera, erunt & inter se æquiangula: Contra, & si æquiangula supponantur ad inuicem, erunt & inter se æquilatera. Vnde patet quod multæ proprietates insunt sphæricis triangulis, quæ non dantur planis.

Prop. XXVII.

Cum duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ duo anguli vnius æquātur duobus angulis alterius, singuli scilicet singulis: & angulus reliquus vnius maior angulo reliquo alterius: tunc arcus qui subtenditur angulo maiori, maior est eo, qui subtenditur angulo minori. Et si fuerit vnus duorum reliquorum arcuum vnius trianguli cum suo relatiuo trianguli alterius sumptus æqualis semicirculo: tunc arcus reliquus vnius æqualis erit arcui reliquo alterius. Et si maior fuerit semicirculo, tunc arcus reliquus trianguli, cuius angulus est minor, est maior arcu reliquo alterius. Et si minor fuerit semicirculo, tunc iterum ipse minor erit.

Prop. XXVIII.

Cum duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ arcus vnus vnius æquatur arcui alterius, anguli autem contermini tali arcui vnius collati ad angulos dicto alterius arcui conterminos fuerint, vnus maior & alter minor suo relatiuo, anguli verò reliqui arcubus æqualibus oppositi singuli nequaquam minores angulo recto: tunc arcus angulis maioribus subtensi maiores erunt arcubus, qui minores angulos respiciunt.

Prop. XXIX

In omni triangulo ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, cuius vnus angulorum æquatur duobus angulis reliquis, pariter acceptis, cùm protrahitur ab angulo magno arcus circuli magni secans per æqualia oppositum arcum: tunc arcus protractus est æqualis dimidio arcus secti.

Prop. XXX.

Cuiusque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ vnus angulorum fuerit non minor angulo recto, & vnusquisque duorum arcuum ipsum continentium minor quadrante: erit & vterque reliquorum angulorum acutus.

Prop. XXXI.

Cuiusque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ vnus angulorum fuerit non minor angulo recto. Et quilibet duorum arcuum alium angulum continentium minor quadrante: Erit

& arcus reliquus minor quadrante, & quilibet reliquorum angulorum acutus.

Prop. XXXII.

Omnis trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ, si diuidantur duo ex arcubus singuli per æqualia: tunc arcus circuli magni interiectus diuisionum notis est maior dimidio reliqui arcus.

Prop. XXXIII.

Cuiusque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ fuerit vnus angulorum non minor recto, si diuidatur arcus ei angulo subtensus per æqualia, & à puncto diuisionis protrahantur duo arcus circulorum magnorum ad puncta media duorum reliquorum arcuum: quilibet factorum angulorum à protractis & ipsis reliquis extrinsecorum ad angulum, qui non minor est recto, minor erit, quàm ipse angulus non minor recto.

Prop. XXXIV.

Cuiusque trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ fuerit vnus angulorum non minor recto, reliqui autem aut ambo obtusi, aut ambo recti, aut ambo acuti: Arcus circuli magni interiectus punctis per æqualia diuidentibus arcus subtensos dictis reliquis angulis faciet cum diuisis arcubus extrinsecos angulos prædictis, quemque suo opposito minorem.

Prop. XXXV.

Si trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ duo arcus simul sumpti fuerint æquales semicirculo, & angulum sub ipsis contentum per æqualia secuerit arcus circuli magni, secabit & per æqualia reliquum trianguli arcum. Contra si arcus circuli magni secuerit per æqualia reliquum, secabit & per æqualia oppositum angulum; Et secans arcus est circuli quadrans.

Prop. XXXVI.

Quod si duo arcus trianguli inæquales simul semicirculum faciant, angulumque sub illis contentum & arcum reliquum secans arcus circuli magni quadrans fuerit; tunc tam angulus, quàm arcus per æqualia secatur.

Prop. XXXVII.

Si trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ duo arcus simul fuerint æquales semicirculo, & ab angulo sub eis contento descenderint ad tertium latus complexi cum illis æquos angulos duo alij arcus, separabunt ex tertio latere duos arcus æquales. Contra, si arcus descendentes separauerint ex arcu tertio duos arcus

æquales,complectentur cum primis duos angulos æquales, & simul sumpti semicirculo æquales erunt.

Prop. XXXVIII.

Quod si trianguli duo arcus diuersi & simul æquales semicirculo fuerint,duoque alij ab eorum angulo descendentes simul semicirculum perfecerint,tunc descendentes cum arcubus lateralibus continebunt angulos æquales; & separabunt ex arcu reliquo trianguli arcus æquos.

Prop. XXXIX.

Si trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ duo arcus simul sumpti fuerint minus semicirculo, & angulum sub ipsis comprehensum per æqua diuiserit arcus, siue per medium secuerit arcum angulo subtensum, tunc diuidens siue secans arcus minor est quadrante.

Prop. XL.

Si trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ duo arcus fuerint diuersi,& simul sumpti semicirculo minus: tunc secto per medium angulo sub illis comprehenso: arcus secans diuidet reliquum trianguli arcum per inæqualia:nam maior portio erit, quæ contermina arcui maiori ex arcubus primis. Contra verò si secans arcus per æqualia diuiserit arcum trianguli dictum: tunc secabit angulum prædictum inæqualiter: eritque maior portio anguli adhærens arcui minori ex arcubus primis,trianguli.

Prop. XLI.

Item si, stantibus cæteris, arcus dictus trianguli sphæralis per medium secetur, tunc arcus reliqui trianguli simul sumpti sunt maius duplo arcus secantis.

Prop XLII.

Item si iisdem subiectis,angulus prædictus per æqualia secetur, adhuc & arcus angulum complexi coniuncti sunt maius quàm duplum arcus secantis.

Prop. XLIII.

Quod, si iisdem suppositis, duo arcus angulum dictum complexi sint simul iuncti æquales duplo arcus secantis:tunc tam angulus dictus,quàm ei subtensus arcus per inæqualia secabitur:& maior portio tam anguli,quàm arcus erit contermina minori ex arcubus angulum diuisum complectentibus:minor verò maiori.

Prop. XLIV.

Iisdem suppositis:arcuque secante per medium dictam basim trian-

guli, & à quolibet puncto arcus secantis ductis duobus arcubus ad terminos basis, Arcus ducti cum lateribus trianguli reliquis facient angulos inæquales: eritque angulus maior cum latere, minori: minor verò cum maiore.

Prop. XLV.

Si trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ duo arcus fuerint inęquales: & eorum aggregatum minus semicirculo: tunc, cùm separabuntur à duabus extremitatibus arcus reliqui duæ portiones æquales: duo arcus ducti à punctis diuisionum ad angulum oppositum, abscindent ex eo angulos duos inæquales: Eritque arcus maior apud arcum trianguli minorem: minor autem apud minorem: Et duo arcus ducti coniuncti minus quàm aggregatum arcuum trianguli prædictum.

Prop. XLVI.

Quod si arcus ducti abscindant angulos æquales: tunc ipsi separabunt ex arcu subtenso arcus inæquales, quorum maior contiguus erit arcui maiori trianguli: & minor minori: Et arcus ducti compositi minus item erunt aggregato arcuum trianguli conterminorum.

Prop. XLVII.

Iisdem subiectis: si duorum arcuum ductorum congeries æqualis ponatur aggregato duorum arcuum trianguli conterminorum: tunc arcus ducti facient cum arcubus trianguli angulos inæquales: & separabunt ex arcu reliquo trianguli arcus inæquales: eritque portio maior tam anguli quàm arcus apud arcum trianguli minorem: minor verò apud maiorem.

MENELAI SPHÆRICORVM EX TRADITIONE MAVROLYCI.

LIBER SECVNDVS.

Propositio prima.

IN omni triangulo ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphærę constituto; cuius duo arcus coniuncti sunt minus semicirculo: reliquus arcus habet polos extra trianguli ambitum.

Prop. II.

Arcus autem circuli magni ab angulo, quem continent duo arcus minores ſemicirculo, ad reliquum latus deſcendens omnino minor eſt aut vtróque aut alterutro collateralium arcuum.

Prop. III.

Quod ſi duorum arcuum trianguli, quorum ſumma ſemicirculum non attingit, maior non excedat quadrantem, cum ſunt inæquales: Tunc ſi à quolibet puncto reliqui arcus ducatur arcus circuli magni faciens cum ipſo arcu angulum æqualem angulo trianguli vtrilibet ſuper eundem arcum intrinſecus oppoſito: ductus arcus ſecabit arcum trianguli, qui prædicto angulo ſubtenditur.

Prop. IV.

Omnis trianguli ex arcubus circulorum magnorum in ſuperficie ſphæræ, cuius duo arcus coniuncti ſunt minus ſemicirculo: arcus reliquus maior eſt quàm arcus ſui circuli ſimilis ei arcui circuli minoris ſibi æquidiſtantis, qui inter primos trianguli arcus vbicunque intercipitur.

Prop. V.

Iiſdem ſuppoſitis: poſſibile erit à quolibet puncto vnius arcuum, quorum ſumma minor eſt ſemicirculo: ducere arcum circuli magni ad arcum tertium trianguli, ita vt arcus ductus faciat cum arcu tertio angulum æqualem angulo ſibi intrinſeco, quem ſubtendit latus trianguli, in quo ſignatum fuit punctum.

Prop. VI.

Quod ſi arcuum, quorum ſumma minor eſt ſemicirculo, cum inæquales ſunt, longior non excedat quadrantem, poſſibile erit à quolibet puncto intra triangulum ſignato ducere arcum circuli magni: qui cum arcu tertio faciat angulum æqualem angulo ſibi intrinſeco trianguli, ſecétque productus arcum tali angulo ſubtenſum.

Prop. VII.

Omnis trianguli ex arcubus circulorum magnorum in ſuperficie ſphæræ ſi fuerit vnus angulorum non maior angulo recto: & duo arcus ipſum continentes minus ſemicirculo. Et maior eorum (inæquales ſunt) non maior quadrante: Tunc, cum ſignabitur punctum intra triangulum: & protrahentur ab eo ad arcum ſubtenſum angulo, qui non eſt maior recto: duo arcus circulorum magnorum continentes cum eo duos angulos æquales duobus anguli trianguli reliquis extrinſecos intrinſecis: & producentur in diuerſas partes, vt concurrãt cancellatim arcubus reliquis, trianguli, facti quadrilateri vtrumque latus circa angulum non maiorem recto, minus eſt latere ſibi oppoſito circa punctum ſignatum.

Prop. VIII.

Iisdem subiectis, si punctum signatum ponatur in tertio arcu trianguli, ductis arcubus ab ipso puncto vt prius, eadem sequentur.

Prop. IX.

Si trianguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ fuerint duo crura æqualia quadrantibus minora: & angulus sub eis contentus non maior recto: tunc cum separabuntur ex vno duorum crurium duo arcus æquales non continui; à quorum terminis ducantur ad basim arcus circulorum magnorum facientes cum basi angulos æquales angulo trianguli ad basim eis intrinseco, arcus ducti separabunt ex basi arcus diuersos: quorum maior erit ille, qui vicinior erit cruri trianguli non diuiso, cuius cruris cum minimo ex ductis congeries æqualis erit aggregato duorum mediorum.

Prop. X.

Quod si ponantur arcus de basi per arcus ductos separati æquales inuicem, tunc arcuum de crure separatorum minor erit, qui continuatur cruri non diuiso. Et summa extremorum minor, quàm summa mediorum arcuum ductorum.

Verùm huius propositionis prima pars posset ostendi ex præcedenti, ex destructione contrariorum astruendo propositum.

Prop. XI.

Item si arcus de crure separati ponantur æquales & continui: tunc arcuum de basi ab eisdem arcubus ductis separatorum maior erit, qui adhæret cruri non diuiso. Cuius cruris cum minore arcuum ductorum congeries æqualis erit duplo arcus ducti medij.

Prop. XII.

Rursum si ponantur arcus de basi per arcus ductos separati continui & æquales: tunc arcuum de crure separatorum minor erit, qui contiguus est cruri non diuiso: & congeries extremorum minor erit duplo arcus ducti medij.

Prop, XIII.

Adhuc, si arcus de crure separati sint dimidia totius cruris, arcu ducto medio vt dictum est, ad basim: tunc basis portio, quæ cruri non diuiso adhæret, maior est, quàm reliqua. Et arcus ductus est dimidium cruris vtriuslibet.

Prop. XIV.

Demum si basis per medium secetur, arcus per punctum diuisionis, vt dictum est, ductus crus trianguli per inæqualia secabit. Et minor portio indiuiso cruri contigua erit. Et arcus ductus maior erit dimidio cruris triangularis.

Prop. XV.

Prop. XV.

Item, si arcus de crure separati sint æquales, disiuncti, & ad terminos cruris finiti: arcus, vt dictũ est, ducti per medios terminos arcuum separatorum, separabunt ex basi portiones inæquales, quarum maior erit, quæ adhæret cruri non diuiso. Et crus ipsum æquale erit aggregato duorum arcuum ductorum.

Prop. XVI.

Contra, si ponantur arcus de basi separati æquales, discreti, ac cæterum cum basi contermini: arcus ducti abscindent ex crure portiones diuersas; quarum minor erit apud crus indiuisum. Et crus ipsum tunc minus aggregato arcuum ductorum.

Prop. XVII.

Si trianguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ vnus angulorum fuerit non maior recto: & duo crura ipsum continentia diuersa, & maius non excedat quadrantem: tunc, cùm separabuntur ex basi duo arcus æquales non continui: à quorum terminis ducantur arcus circulorum magnorum facientes cum basi angulos æquales angulo trianguli apud basim eis intrinseco sub basi & vno crurum contento, arcus ducti separabunt ex reliquo crure trianguli arcus diuersos: quorum minor erit, qui contiguus est cruri non diuiso. Cuius cruris cum remotissimo ex arcubus ductis aggregatio minor erit congerie mediorum.

Prop. XVIII.

Quod si ponantur arcus de basi separati æquales & continui, tunc portionum de crure trianguli per arcus ductos, vt dictum est, separatarum minor erit, quæ apud crus indiuisum. Cuius cruris cum minore arcuum ductorum congeries minor erit duplo arcus medij.

Prop. XIX.

Item, secta per medium basi, arcus per punctum diuisionis ductus, vt dictum est, inæqualiter secabit crus trianguli: minorque portio apud crus indiuisum. Et ductus arcus maior dimidio eiusdem cruris.

Prop. XX.

Denique si arcus de basi separati sint æquales, disiuncti, & cùm terminis basis finiti, arcus ducti separabunt ex crure arcus inæquales, quorum minor apud crus indiuisum. Et crus ipsum minus composito duorum arcuum ductorum.

Prop. XXI.

Si trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ vnus angulorum fuerit non maior recto: & duo crura ipsum cõtinentia diuersa: & maius non excedat quadrantem: tunc cùm separa-

buntur ex vno crurum duo arcus æquales non continui, à quorum terminis ducantur arcus circulorum magnorum facientes cum basi angulos æquales angulo eis extrinseco, quem continet basis cum reliquo crure, arcus ducti separabunt ex basi portiones diuersas, quarum maior erit apud crus indiuisum.

Prop. XXII.

Iisdem suppositis: arcubus, vt dictum est, dispositis ac ductis: arcubus tamen æqualibus de crure maiori separatis, ostendendum est, quod cruris reliqui, minimique ductorum arcuum congeries minor est aggregato duorum arcuum mediorum.

Prop. XXIII.

Quod si in prædicto triangulo arcus æquales ex vtrolibet crure separati continui fuerint: arcus, vt dictum est, per illorum terminos ducti separabunt ex basi portiones diuersas, quarum maior apud crus indiuisum.

Prop. XXIV.

Et si arcus æquales continui de crure maiori separentur; tunc reliqui cruris cum maiore ductorum aggregatum minus est quàm duplum arcus medij.

Prop. XXV.

In eodem triangulo, si arcus separati fuerint vtriuslibet cruris dimidia: tunc arcus per diuisionis notam, vt diximus, ductus basim per inæqualia secabit: & maior portio apud crus reliquum.

Prop. XXVI.

Et si crus maius sic dimidiatum ponatur; tunc arcus ductus maior est dimidio cruris indiuisi.

Prop. XXVII.

Demum in tali triangulo, si arcus separati æquales ex vtrolibet crure discreti quidem, sed eosdem limites vtrinque cum crure habuerint, tunc arcus, vt dictum est, per terminos medios ducti separabunt de basi diuersas portiones, quarum maior cruri non diuiso contermina est.

Prop. XXVIII.

Et si arcus sic separati sint in crure maiori trianguli: tunc crus indiuisum minus est aggregato duorum arcuum ductorum.

Prop. XXIX.

Si trianguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ vnus angulorum fuerit non maior recto: Et duo crura ipsum angulum complexa inæqualia & maius non excedat quartam circuli: tunc, cùm ab vno crurum ducentur ad basim tres arcus, qui faciant cum basi an-

gulos æquales angulo sibi intrinseco, quem continet basis cum reliquo crure: fueritque huius cruris cum extremo ductorum arcuum congeries æqualis aggregato duorum mediorum: arcus ducti separabunt ex basi arcus diuersos, quorum maior erit, qui adhæret cruri non diuiso.

Prop. XXX.

Quod si iisdem suppositis, arcus prædicto modo ab vno crurum ducti duo fuerint, ita vt cruris reliqui cum minore ductorum congeries æqualis sit duplo arcus medij: arcus ducti similiter diuersas de basi portiones separabunt: eritque maior earum apud crus indiuisum.

Prop. XXXI.

Item, si stantibus iisdem, arcus vnus ab vno crurum prædicto modo ducatur, qui cruris reliqui sit dimidius: Et ductus arcus totam basim in duas diuersas diuidet portiones: quarum maior apud crus indiuisum.

Prop. XXXII.

Demum in eodem triangulo, si arcus prædicto modo ab vno crure ducti duo fuerint, quorum aggregato çquale sit crus reliquum; arcus item ducti diuersas ex basi portiones separabunt; quarum maior apud crus indiuisum.

Prop. XXXIII.

Si trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ vnus angulus fuerit non maior recto: Et duo crura ipsum continentia diuersa, & longius non maius quadrante. Et ab ipso crure maiori ducantur ad basim tres arcus ita vt faciant cum basi angulos æquales angulo, quem crus reliquum & basis continent, sibi intrinseco. Et huius cruris cum extremo arcuum ductorum summa fuerit æqualis summæ duorum mediorum: tunc portiones de crure maiori per arcus ductos separatæ inæquales erunt: & earum maior, quç apud crus breuius.

Prop. XXXIV.

Quod si iisdem omnibus suppositis, arcus à crure maiori ad basim, vt dictum est, ducti duo fuerint, ita vt reliqui cruris cum minore ductorum aggregatum æquale sit duplo maioris ducti: tunc & portionum de crure longiori per arcus ductos separatarum maior erit apud crus breuius.

Prop. XXXV.

Adhuc iisdem subiectis, si arcus dumtaxat dicto modo ductus à crure magno ad basim dimidiũ fuerit cruris reliqui, tunc portionũ in crure longiori ab arcu ducto factarũ maior erit contigua breuiori.

Prop. XXXVI.

Denique suppositis iisdem, si arcus à crure longiori ad basim eodem modo ducti duo fuerint, ita vt reliquum crus æquale sit aggregato arcuum ductorum: tunc & portionum in crure magno ab arcubus ductis segregatarum ad extrema cruris, maior est cum crure minori.

Prop. XXXVII.

Si trianguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ vnus ex angulis fuerit non maior recto: & duo crura ipsum complexa inæqualia: quorum maius non excedat quadrantem, tunc cùm separabuntur ex crure breuiori duo arcus æquales non continui, à quorum terminis ducantur arcus circulorum magnorum, qui faciant cum basi angulos æquales angulo eis intrinseco, quem continent basis cũ reliquo crure: Huius cruris & minimi arcuum ductorum aggregatum maius erit aggregato duorum arcuum mediorum. Quod si huiusmodi aggregata supponantur æqualia: tunc portiones de crure breui separatæ inæquales erunt: & earum minor, quæ contigua longiori cruri.

Prop. XXXVIII.

Iisdem suppositis, si arcus æquales de crure breui separati continui fuerint, ductis modo prædicto per eorum terminos duobus arcubus, tunc aggregatum cruris longi, & arcus ducti minoris maius erit duplo arcus medij. Quod si aggregatum ductum tali duplo æquale fuerit, tunc portionum de crure breui per arcus ductos separatarum minor erit apud crus longius.

Prop. XXXIX.

Et si in eodem triangulo, per cruris breuis per medium secti notam arcus, sicut dictum est, ducatur: Tunc arcus ductus minor erit dimidio cruris longi. Quod si arcus ductus prædicto dimidio æqualis ponatur, per inæqualia diuidet crus breue, & minor portio apud crus longum.

Prop. XL.

In memorato demum triangulo, si arcus de crure paruo separati æquales disiuncti terminentur ad extrema cruris, ductis iam per terminos eorum medios duobus, qualiter dictum est, arcubus: Tunc crus magnum maius erit aggregato duorum arcuum ductorũ. Quod si crus magnum tali aggregato æquale extiterit: Tunc portiones de crure paruo per arcus ductos separatæ inæquales erunt: Et earum minor erit cruri magno contigua.

Prop. XLI.

Post hæc, demonstrandum est quod si in eo, quale in præmissis sup-

positum est, triangulo arcus separati, quos diuersos esse constitit, supponantur æquales: tunc talis æqualitas diuersificabit aliquem angulorum ad basim, qui omnes æquales antea supponebantur.

Prop. XLII.

Cum se inuicem secant duo circuli magni in superficie sphæræ & separantur ex vno eorum duo arcus æquales vtrinque à puncto sectionis: & à polo vtriuslibet eorum descendunt per extremitates arcuum separatorum circuli magni: tunc hi separant ex reliquo circulorum se secantium arcus æquales, & eorum portiones secantibus se inclusæ sunt æquales.

Prop. XLIII.

Quod si circuli descendentes non à polo quidem descendant, sed contingant parallelum quempiam circuli, de quo separantur, arcus æquales: tunc ijdem separabunt etiam de reliquo secantium hinc & inde peripherias æquas. Et ipsorum descendentium portiones circulis secantibus interceptę adhuc æquales erunt.

Prop. XLIIII.

Item si circuli descendentes tangant parallelum non eius, de quo separantur arcus æquales, sed alterius secantis: hac tamen conditione, vt portionum secantibus inclusarum aut neutra, aut vtraque sit maior quadrante: Tunc non minus ipsi descendentes de dicto secante peripherias æquas separabunt: Et ipsæ descendentium portiones secantibus inclusę adhuc æquales arguentur.

Prop. XLV.

Si autem arcus ex vtrolibet secantium separati æquales & ęqualiter hinc & inde à sectione fuerint remoti: Tunc quatuor arcus maiores siue à polo vtriuslibet se secantium, siue à contactibus paralleli vnius eorum cum prædictis conditionibus descendentes per arcuum separatorum terminos: separabunt & ex reliquo secantium peripherias æquales.

Prop. XLVI.

Si in superficie sphæræ circulus magnus fuerit inclinatus super circulum magnum ex numero ęquidistantium seu parallelorum tangens vnum ex parallelis: per puncta verò sectionum inclinati circuli & parallelorum descendant circuli magni siue à polo parallelorum, siue à contactibus vnius eorum minoris prædicto, ad vnam inclinationem: Tunc si arcus circuli inclinati siue continui, siue disiuncti inter parallelos fuerint æquales, portionum cuiuslibet circulorum descendentium inter eosdem parallelos interceptarum maior erit, quæ propinquior circulo magno ex parallelis, portionum verò circuli magni

ex parallelis inter circulos descendentes per terminos dictorum arcuum æqualium inclusarum maior erit, quæ remotior à sectione circuli inclinati circulique magni ex parallelis.

Et notandum quod id, quod demonstratum est de portionibus vnius descendentium circulorum, idem sequitur de portionibus cuiuslibet alterius ex descendentibus: Nam talium descendentium duæ portiones iisdem parallelis interiecta, per 14. vel 17. 2. sphæricorum Theodosii, sunt inæquales. Item quod ostensum est de portionibus circuli magni ex parallelis: idem sequitur de portionibus cuiuslibet ex iisdem parallelis: Nam per easdem Theod. proposit. portiones parallelorum iisdem descendentibus, quales dicti sunt, circulis interclusa sunt similes.

Prop. XLVII.

Quod si vnius circulorum descendentium arcus parallelis interpositi ponantur æquales: Tunc portionum de circulo inclinato iisdem parallelis intercidentium maior erit, quæ à dicta sectione remotior: portionum quoque circuli maioris ex parallelis inter circulos descendentes cadentium, maior indidem distantior.

Prop. XLVIII.

Item, si arcus circuli maioris ex parallelis circulis descendentibus interiecti ponantur æquales: Tunc portionum de circulo inclinato inter eosdem circulos descendentes cadentium maior erit, quæ dictæ sectioni vicinior: portionum autem cuiuslibet descendentes inter parallelos, qui per terminos portionum inclinati ducuntur, acceptarum maior erit, quæ propinquior circulo magno ex parallelis.

Quod si per puncta sectionum extremi circuli descendentis & parallelorum descendant circuli magni tangentes eum parallelum, quem tangit circulus inclinatus, & loco priorum descendentium sumantur, nihilominus eadem omnia demonstrabuntur.

MENELAI SPHÆRICORVM LIBER TERTIVS.

Propositio prima.

CVm fuerint in superficie sphæræ quatuor arcus circulorum singuli semicirculo minores: duo quidem ab angulo vno descentes duoque à descendentium terminis se vicissim secantes, & alternatim ad descendentes reflexi: tunc ratio sinus partis inferæ arcus vnius des-

cendentium ad ſinum partis eiuſdem ſupernæ componetur ex duabus: quarum vna eſt ratio ſinus partis ſuperæ eiuſdem : altera eſt ratio ſinus partis inferæ alterius deſcendentis ad ſinum totius eiuſdem deſcendentis.

Lemma I.

Si à terminis duarum linearum rectarum ab angulo vno deſcendentium duæ rectæ ſe vicißim ſecantes ad deſcendentes reflectantur : tunc ratio inferioris partis vnius deſcendentium ad partem eius ſuperiorem componetur ex duabus: quarum vna eſt ratio partis inferioris reflexæ à termino eiuſdem deſcendentis ad partem eius ſuperiorem : altera eſt ratio partis inferioris reliquæ deſcendentis ad totam ipſam deſcendentem.

Lemma *II.*

Item iiſdem lineis ſuppoſitis ratio vnius deſcendentis ad partem eius ſuperiorem componetur ex duabus : quarum vna eſt ratio reflexæ à termino dictæ deſcendentis ad partem eius ſuperiorem: altera eſt ratio partis inferioris reliquæ reflexæ ad totam ipſam reflexam.

Lemma III.

Si à centro circuli recta linea exiens arcum quempiam eiuſque chordam vtcumque ſecet : chordæ ſegmenta erunt ſinibus portionum arcus proportionalia.

Lemma IV.

✠ *Si à puncto quopiam extra circulum duæ rectæ lineæ ducantur circulum ſecantes, vna quidem per centrum ; altera præter centrum : Ratio eius, quæ præter centrum ad partem ſui extrinſecam eſt ſicut ratio ſinus arcus compoſiti ex arcu abſciſſo, ab ea quæ per centrum & ex arcu intercepto lineis ad ſinum arcus intercepti.*

Propoſitio ſecunda ex Ptolomæi magna conſtructione liber I.

Iiſdem ſuppoſitis, ratio ſinus arcuum deſcendentium ad ſinum partis ſupernæ eiuſdem arcus componetur ex duabus, quarum vna eſt ratio ſinus arcus reflexi à termino dicti deſcendentis ad ſinum partis ſupernæ talis reflexi : altera eſt ratio ſinus partis inferę alterius reflexi ad ſinum totius eiuſdem reflexi.

Lemma I.

✠. *Duorum arcuum ſemicirculum perficientium eundem eſſe ſinum.*

Lemma II.

✠ *Si chorda cuiuſpiam arcus æquidiſtet diametro, ſinus inter diametrũ & chordã intercepti æqualis erit ſinus arcus ex prædictis arcubus compoſiti.*

Lemma III.

✠ *Si fuerint tres rectæ, quarum binæ quælibet sint in vno plano, quamuis non omnes in vno: Et ex ijsdem duæ tantum æquidistent: tunc & reliqua ijsdem æquidistans erit.*

Lemma IV. habens 18. modos.

I. *Si fuerint sex quantitates, quarum ratio primæ ad secundam componitur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad sextam.*

II. *Tunc & ratio primæ ad secundam componetur ex rationibus tertiæ ad sextam, & quintæ ad quartam.*

III. *Item ratio primæ ad tertiam componetur ex rationibus secundæ ad quartam, & quintæ ad sextam.*

IV. *Item ratio primæ ad tertiam componetur ex rationibus secundæ ad sextam, & quintæ ad quartam.*

V. *Item ratio primæ ad quintam componetur ex rationibus secundæ ad sextam, & tertiæ ad quartam.*

VI. *Item ratio primæ ad quintam componetur ex rationibus secundæ ad quartam, & tertiæ ad sextam.*

VII. *Item ratio secundæ ad quartam componetur ex rationibus primæ ad tertiam, & sextæ ad quintam.*

VIII. *Item ratio secundæ ad quartam componetur ex rationibus primæ ad quintam, & sextæ ad tertiam.*

IX. *Item ratio secundæ ad sextam componetur ex rationibus primæ ad tertiam, & quartæ ad quintam.*

X. *Item ratio secundæ ad sextam ex rationibus primæ ad quintam, & quartæ ad tertiam.*

XI. *Item ratio tertiæ ad quintam componetur ex rationibus primæ ad secundam, & sextæ ad quintam.*

XII. *Item ratio tertiæ ad quartam componetur ex rationibus primæ ad quintam, & sextæ ad secundam.*

XIII. *Item ratio tertiæ ad sextam componetur ex rationibus primæ ad secundam, & quartæ ad quintam.*

XIV. *Item ratio tertiæ ad sextam componetur ex rationibus primæ ad quintam, & quartæ ad secundam.*

XV. *Item ratio quartæ ad quintam componetur ex rationibus secundæ ad primam, & tertiæ ad sextam.*

XVI. *Item ratio quartæ ad quintam componetur ex rationibus secundæ ad sextam, & tertiæ ad primam.*

XVII. *Item ratio quintæ ad sextam componetur ex rationibus primæ ad secundam,*

secundam, & quartæ ad tertiam.

XVIII. *Item ratio quintæ ad sextam componetur ex rationibus primæ ad tertiam, & quartæ ad secundam.*

Lemma Tebitij.

Si ab alterutro duorum circulorum maiorum se inuicem in superficie sphæræ secantium separentur duo arcus ab vtralibet sectionum incepti: à quorum terminis ducantur rectæ perpendiculares ad diametrum sphæræ, quæ communis diameter & sectio circulorum est: Itemque rectæ perpendiculares ad planum reliqui circuli: tunc illæ perpendiculares ad diametrum his perpendicularibus ad planum circuli proportionales erunt.

Si fuerint sex lineæ, in quibus ratio primæ ad secundam componatur ex ratione tertiæ ad quartam, & ex ratione quintæ ad sextam, tunc solidum sub prima, quarta & sexta contentum æquale erit solido sub secunda, & tertia & quinta lineis comprehenso.

Contra, si solidum sub prima, quarta & sexta lineis contentum æquale fuerit solido, quod à secunda, & tertia & quinta lineis producitur, tunc ratio primæ ad secundam composita erit ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad sextam.

Prop. III.

Si duo triangula ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ habeant duos angulos æquales, vel iunctim duobus rectis æquales. duosque angulos ex reliquis vel inter se æquales, vel simul aggregatos duobus rectis æquales: tunc sinus arcuum his angulis oppositorum erunt sinibus arcuum illis angulos subtendentium proportionales.

Prop. IV.

Quod si triangulorum ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ duo anguli fuerint æquales, vel iunctim duobus rectis æquales: atque arcuum circa duos angulos sinus sint proportionales: tunc tertij eorum anguli aut inuicem æquales erunt, aut simul sumpti duobus rectis æquales.

Prop. V.

Si duo triangula ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ habeant duos angulos rectos, duosque ex reliquis acutos æquales: tunc ratio sinus arcus in primo triangulo respicientis acutum angulum ad sinum arcus, qui cum eo rectum continet angulum, componetur ex duabus, quarum vna est ratio sinus arcus alterius trianguli acutum angulum subtendentis ad sinum arcus, qui cum eo

ad rectum concurrit angulum: altera est ratio sinus complementi arcus primi trianguli respicientis acutum ad sinum complementi arcus in altero triangulo acutum angulum subtendentis.

Prop. VI.

Si duo triangula ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ habuerint inter se duos angulos æquales, duosque alios inæquales, nullum tamen ex his rectum: ab angulis autem reliquis ceciderint arcus perpendiculares ad bases: tunc sinus portionum basis vnius trianguli erunt proportionales sinibus portionum basis alterius trianguli iuxta ordinem angulorum æqualium.

Prop. VII.

In omni triangulo ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ constituto, cuius vnus angulorum fuerit rectus ac cæteri acuti, sinus arcus compositi ex arcubus continentibus angulum vtrumlibet ex acutis ad sinum arcus differentiæ eorumdem arcuum eam habent rationem, quam seruat aggregatum ex sinu toto, sinuque complementi prædicti anguli acuti ad differentiam eorumdem sinuum.

Prop. VIII.

Si duo triangula ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ habuerint inter se duos angulos rectos, duosque acutos æquales, & duos cæteros acutos: tunc sinus arcus aggregati ex arcubus vnum acutorum æqualium continentibus ad sinum arcus differentiæ eorumdem arcuum est sicut sinus aggregati ex arcubus reliquum acutorum æqualium circumstantibus, ad sinum arcus excessus eorumdem.

Prop. X.

Contra, si in talibus triangulis sinus arcuum aggregatorum ex dictis arcubus proportionales fuerint sinibus differentiarum: tunc anguli acuti sub dictis arcubus contenti æquales erunt.

Lemma.

Si duæ quantitates duabus quantitatibus proportionales fuerint, erunt & aggregata differentijs proportionalia. Quod si aggregatis differentijs proportionalia fuerint, & duæ quantitates duabus quantitatibus proportionales erunt.

Prop. X.

Si ab vno angulorum trianguli sphæralis arcus descendat angulum illum per æqualia secans vsque ad basim, sinus arcuum, qui angulum continent, erunt sinibus portionum basis proportionales.

Prop. XI.

Quod si sinus arcuum angulum quempiam sphæralis trianguli con-

tinentium sint proportionales sinibus portionum basis separatarum per arcuum ab angulo dicto descendentem, tunc arcus descendens arcum ipsum per æqualia diuidit.

Prop. XII.

Si fuerint duo triangula ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ: quorum vnius duo anguli ad basim æquales sint duobus alterius angulis ad basim, singuli singulis: siue bini coniuncti duobus rectis æquales: atque vnus ex reliquis arcubus vnius trianguli vni arcui ex reliquis alterius trianguli æqualis, sintque arcus ipsi non relatiuis angulis oppositi: Tunc quadratum quod ex sinu vnius dictorum arcuum æqualium, æquum est ei, quod ex sinibus reliquorum laterum describitur, rectangulo.

Prop. XIII.

Quod si triangulorum sphæralium vnius anguli ad basim angulis ad basim alterius singuli singulis fuerint æquales. Et quadratum, quod ex sinu vnius reliquorum arcuum vtriuslibet triangulorum æquale sit rectãgulo, quod fit ex sinu reliqui arcus dicti trianguli in sinum arcus in altero triangulo non æqualem angulum subtendentis: Tunc & reliquus arcus huius trianguli æqualis erit arcui illius trianguli, cuius de sinu quadratum capiebatur.

Prop XIV.

Si trianguli sphæralis angulum quempiam arcus per æqualia secet: duóque arcus descendentes ex dicto angulo æquales hinc inde separent angulos, Tunc rectangula sub sinibus laterum trianguli angulum dictum complexorum, sinibusque collateralium arcuum descendentium contenta, sunt proportionalia rectangulis, quæ sub sinibus portionum basis ab arcu secante ad dicta latera & arcus receptarum continentur eodem ordine susceptis.

Prop. XV.

Quod si angulum trianguli sphæralis arcus quidam per æqualia secet: duóque arcus ab eodem angulo ita descendant, vt rectangula rectangulis quo dictum est ordine sint proportionalia, tunc & anguli ab arcubus descendentibus separati æquales erunt.

Prop. XVI.

Si ab angulo trianguli sphæralis ad basim descendant duo arcus complexi cum lateribus conterminis angulos æquales, hac tamen conditione, vt quos angulos faciunt arcus descendentes cum vno laterum trianguli eosdem, hoc est æquales, sed permutatim collatos suscipere possint deorsum producti cum arcubus ab extremo reliqui lateris venientibus. Tunc quadrata, quæ ex sinibus laterum, propor-

tionalia ſunt rectangulis, quæ ſub ſinibus portionum baſis ab ipſius lateralibus ad arcus deſcendentes receptarum continentur, eodem ordine ſumptis.

Prop. XVII.

Quod ſi quadrata prædicta memoratis rectangulis proportionalia ponantur, cum præfata conditione, vt arcus deſcendentes inferius producti ſuſcipiant cum per extremum vnius laterum trianguli ductis angulos æquales ſinguli ſingulis ijs, quos continent supernè cum reliquo latere trianguli, Tunc arcus deſcendentes cum lateribus æquales complectuntur angulos.

Prop. XVIII.

Si ab angulo recto trianguli ſphæralis rectanguli deſcendant duo arcus ad baſim, vnus intra triangulum, alter extra, facientes cum latere trianguli interpoſito angulos æquales: Tunc ratio ſinus arcus compoſiti ex baſi & ex arcu ſibi in continuum adiecto vſque ad deſcendentem ad ſinum ipſius arcus adiecti eſt ſicut ratio ſinus portionis baſis interceptæ à reliquo latere trianguli & arcu intrinſecus deſcendente ad ſinum reliquæ portionis baſis.

Prop. XIX.

Quod ſi ratio ſinus arcus compoſiti ex baſi & arcu adiecto vſque ad deſcendentem exteriorem ad ſinum ipſius arcus adiecti fuerit, ſicut ratio ſinus portionis baſis interceptæ à reliquo latere trianguli, & deſcendente inferiori ad ſinum reliquæ portionis baſis: tunc arcus deſcendentes cum latere trianguli interpoſito æquos faciunt angulos.

Prop. XX.

Quod ſi anguli prædicti, quos faciunt arcus deſcendentes cum latere trianguli interpoſito ponantur æquales: fueritque ratio ſinus arcus compoſiti ex baſi & arcu adiecto vſque ad deſcendentem exteriorem ad ſinum ipſius adiecti, ſicut ratio ſinus portionis baſi interceptæ à reliquo latere trianguli, & arcu intus deſcendente ad ſinum reliquæ portionis baſis: tunc angulus trianguli, à quo deſcendunt arcus, rectus eſt.

Prop. XXI.

Si duos angulos trianguli ſphæralis duo arcus ſinguli ſingulos per medium ſecent: tunc, qui per reliquum angulum & ſecantium concurſum producitur, arcus ipſum quoque reliquum angulum per æqualia ſecabit.

Prop. XXII.

Si à duobus angulis trianguli ſphæralis duo arcus ad ſubtenſa latera perpendiculares progrediantur: tunc, qui à reliquo angulo per ipſorum perpendicularium coincidentiam ducetur, arcus reliquo etiam lateri perpendicularis erit.

Lemma I.

Quadrilaterum rectilineum, cuius duo anguli oppositi simul sumpti sunt duobus rectis aquales, est à circulo circumscriptibile.

Lemma II.

Si fuerint duo quadrilatera rectilinea circuli inscripta: quorum vnus angulus vnius fuerit aqualis vni angulo alterius: Et latera circum illos angulos proportionalia: itemque ipsi aquales anguli per quadrilaterorum diametros diuisi in portiones singulas singulis aquales: tunc similia ad inuicem erunt quadrilatera.

Lemma III.

Cum exeunt à duobus angulis trianguli rectilinei dua recta perpendiculares ad subtensa latera tunc qua reliquo angulo per sectionem perpendicularium recta producitur, reliquo etiam lateri perpendicularis est.

Lemma IV.

Si per duas hypotenusas triangula pyramidis duo plana ad oppositas singula bases perpendicularia deducantur, tunc productum per reliquam pyramidis hypotenusam, & communem sectionem perpendicularium planorum, est etiam ad oppositam basim pyramidis perpendiculare.

Prop. XXIII.

Si à trianguli sphæralis duobus angulis duo arcus exeuntes opposita singuli latera per medium diuidant: tunc arcus, qui ab angulo reliquo per diuidentium arcuum coincidentiam producitur, oppositum quoque latus per medium secabit.

Lemma I.

Si de duobus lateribus trianguli rectilinei sumantur dua portiones ad angulum sub dictis lateribus contentum continuata, quarum vtraque sui lateris sit pars tertia: & per earum terminos agantur dua recta lateribus ipsis vicissim aquidistantes sese intra triangulum secantes: tunc recta, qua à quolibet trium angulorum trianguli per sectionem dictarum aquidistantium ad oppositum latus progreditur, latus ipsum per aqualia diuidit.

Lemma II.

Si à trianguli rectilinei duobus angulis dua recta linea progressa opposita latera singula per medium diuidant, tunc recta, qua ab angulo reliqua per diuidentium coincidentiam producitur, oppositum quoque latus per aqualia dispescit.

Prop. XXIV.

Cum fuerint in superficie sphæræ duo circuli magni alter alteri inclinatus: in quorum vno signentur duo puncta, à quibus ad reliquum circulum duo arcus perpendiculares ducantur: tunc ratio sinus arcus cadentis inter casus perpendicularium ad sinum arcus, quem termi-

nant puncta signata, est sicut ratio rectanguli contenti sub diametro sphæræ, & diametro circuli tangentis alterum inclinatorum, & æquidistantis reliquo ad rectangulum contentum sub diametris circulorum transeuntium per puncta signata in circulo inclinato, & ęquidistantium reliquo ex circulis inclinatis.

MAVROLYCI SICVLI

SPHÆRICORVM.

LIBER PRIMVS.

PRÆFATIO.

POst Theodosium, qui sphærica elementa tribus libellis complexus est, Menelaus sphæricorum totidem libris prosequutus multa de sinuum proportione in tertio acutissime demonstrauit. Inde sumpsisse videtur Ptolomæus ea, quæ in principio magnæ constructionis, post chordarum doctrinam, de sphæricis tradidit. Quæ cùm postea Tebitius legisset perspicacissimus, animaduertit eadem & meliori ordine, & facilius ostendi potuisse. Quemadmodum in libello apparet, in quo ipse Ptolomęum carpit. Adiecit his nonnulla Geber, qui nouem libros in magnam Ptolomæi constructionem conscripsit. Vnde multa sumpserunt Georgius Peurbachius, & Ioannes Regiomontanus, dum prædictum Ptolomaicum opus in epitomen ordinatissimè redigunt. Tradidit & complura super his Ioannes prædictus in libellis triangulorum non spernenda. Quæ omnia cum ego proximis his annis vidissem ac contulissem, non passus sum præcepta tanti momenti, & Astronomiæ, post planorum triangulorum scientiam apprimè necessaria sparsim legi. Ea itaque in hos duos libellos congessi adiiciens de ingenij mei riuulo demonstrationes nonnullas Sic tamen vt post elementa Theodosij ac Menelai demonstrata, detur his locus, vt hæc sint quasi illorum paralipomena. Vnde possint absolui quęstiones, quæ circa sphæralia triangula fieri solent, quæque ad primi mobilis circulos in Astronomia pertinent. Igitur expositis definitionibus, quasi negotij fundamentis, veniemus ad demonstrationes, & à facilioribus exorsi ordinem quàm commodissimum seruabimus.

DEFINITIONES.

✠. I. Sinus rectus arcus cuiuſpiam eſt dimidium chordæ dupli talis arcus.

✠ II. Vnde, duorum arcuum qui coniuncti conflant ſemicirculum idem eſt ſinus, ſicut duorum arcuum circulorum integrantium eadem eſt chorda.

III. Et quadrantis ſinus eſt circuli ſemidiameter: qui ſinus totus, ſiue ſinus maximus vocatur. Sicut ſemicirculi chorda eſt tota diameter.

✠ IV. Sinus ſecundus arcus cuiuſpiam eſt ſinus complementi eius ad quadrantem, ſiue ſinus exceſſus ipſius ſupra quadrantem.

✠ V. Sinus verſus arcus cuiuſpiam eſt portio diametri inter arcum ipſum ſinumque rectum recepta: quæ & exceſſus eſt ſemidiametri ſuper ſinum ſecundum: ſiue congeries ſemidiametri & ſinus ſecundi.

✠ VI. Sinus autem anguli cuiuſpiam eſt ille, qui ſinus eſt arcus, angulum ipſum ſubtendentis iuxta prædictas definitiones.

Propoſitio prima.

✠ Linea perpendicularis à puncto quopiam in periferia ſemicirculi ad diametrũ eſt ſinus rectus vtriuſque arcuum ab ipſo puncto ad diametrum receptorum. Portiones verò diametri à perpẽdiculari ad periferiam vtrinque ſuſceptæ ſunt ſinus verſi arcuum ſibi ſinguli conterminorum. Quæ porrò cadit inter perpendicularem & centrum, eſt ſinus ſecundus vtriuſque dictorum arcuum.

Prop. II.

✠ Si in ſuperficie ſphæræ duo circuli maiores ſe viciſſim ad rectos angulos ſecent: linea perpendicularis à puncto quolibet peripheriæ vnius eorum ad planum reliqui, eſt ſinus rectus vtriuſque arcuum ab ipſo puncto ad circulorum ſectiones receptorum.

Prop. III.

Trianguli ex arcubus circulorum magnorum in ſuperficie ſphæræ conſtituti; quorum duo ſunt quadrantes: anguli quadrantibus oppoſiti ſunt recti. Contra, ſi recti ſint anguli, arcus illis oppoſiti ſunt quadrãtes. Polus autem tertij arcus eſt in ipſorum quadrantum cõcurſu.

Prop. IV.

Trianglum ex arcubus circulorum maiorum in ſuperficie ſphæræ habens vnum quadrantem, & vnum ex angulis rectum, habebit & alterum quadrantem & alterum angulum rectum.

Prop. V.

Trianguli ex arcubus circulorum maiorum, quorum vnuſquiſque

minor est quadrante, in superficie sphæræ constituti, cuius ex angulis vnus rectus, duo reliqui anguli acuti sunt. Contra, si rectus sit ex angulis vnus, duoque reliqui acuti; vnusquisque arcuum minor erit quadrante.

Prop. VI.

In triangulo ex arcubus circulorum maiorum quadrante minoribus in superficie sphæræ rectangulo, est sicut sinus arcus rectum angulum subtendentis ad sinum arcus alterum ex acutis angulis respicientis, sic est sinus totus ad sinum dicti acuti anguli.

Prop. VII.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ duos angulos acutos æquales inuicem habentibus, sinus arcuum rectos angulos subtendentium sunt sinibus arcuum acutis oppositorum proportionales.

Prop. VIII.

Si in duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, sinus arcuum rectos respicientium proportionales fuerint sinibus arcuum acutos angulos subtendentium: ipsi acuti anguli æquales erunt.

Prop. IX.

Si in triangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sicut est sinus totus ad sinum anguli acuti, sic sit sinus arcus alium angulum subtendentis ad sinum arcus, qui acuto opponitur: angulus ille rectus erit.

Prop. X.

In triangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ angulum rectum habente, sinus reliquorum angulorum sunt sinibus laterum, quibus opponuntur, proportionales.

Prop. XI.

Si duo anguli trianguli cuiuspiam ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ fuerint duobus angulis trianguli alterius ex arcubus circulorum maiorum in eadem superficie, singuli singulis æquales: tunc sinus arcuum æqualibus angulis oppositorum proportionales erunt.

Prop. XII.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, quorum arcus rectis oppositi sunt æquales, duorum ex reliquis arcuum vtcumque sumptorum sinus sunt sinibus oppositorum angulorum proportionales.

Prop. XIII.

Prop. XIII.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, ratio sinuum duorum arcuum acutis oppositorum componitur ex duabus, quarum vna est ratio sinuum arcubus rectos respicientibus debitorum, altera ratio sinuum dictorum acutorum angulorum.

Prop. XIV.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, ratio sinus arcus vni acutorum oppositi in vno triangulo, ad sinum arcus vni acutorum oppositi in altero triangulo est sicut ratio rectanguli contenti sub sinibus arcus rectum subtendentis, & anguli acuti in illo triangulo ad rectangulum contentum sub sinibus arcus recto oppositi & anguli acuti in hoc triangulo.

Prop. XV.

Si in duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sinus arcuum rectis angulis oppositorum fuerint sinibus acutorum angulorum ordine permutato proportionales: æquales erunt arcus, qui acutos subtendunt. Quod si æquales sint arcus, acutis angulis subtensi, & sinus arcuum rectis oppositorum erunt sinibus acutorum ipsorum ordine permutato proportionales.

Prop. XVI.

In omni triangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sinus duorum vtcumque sumptorum arcuum sunt sinibus oppositorum angulorum proportionales.

Prop. XVII.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sinus secundus alterius arcuum rectum angulum continentium ad sinum secundum arcus rectum subtendentis est, sicut sinus totus ad sinum secundum reliqui ex arcubus rectum comprehendentium.

Prop. XVIII.

Arcus bini & bini in circulo eodem, siue in circulis æqualibus sumpti, quorum excessus æquales, & chordæ siue sinus proportionales, sunt singuli singulis, hoc est, maior maiori & minor minori æquales.

Prop. XIX.

Si in triangulo ex arcubus circulorum maiorum quadrante minoribus in superficie sphæræ, sinus secundus primi arcus ad sinum secundum secundi arcus sit, sicut sinus totus ad sinum secundum tertij arcus tunc angulus secundo lateri oppositus rectus erit.

Prop. XX.

✠ Si in quolibet triangulo ex arcubus circulorũ maiorum in superficie sphæræ ducatur ab angulo quouis ad basim perpendicularis arcuum à reliquis angulis ad perpendicularem receptorum, sunt sinibus secundis conterminorum laterum proportionales.

Prop. XXI.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, sinus vnius acutorum angulorum ad sinum totum est, sicut sinus secundus reliqui acuti ad sinum secundum arcus eum subtendentis.

Prop. XXII.

Si in triangulo quolibet ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ ducatur à quouis angulo perpendicularis arcus circuli maioris ad basim: sinus angulorum apud verticem sub perpendiculari & lateribus comprehensorum sunt sinibus secundis angulorum ad basim proportionales.

Prop. XXIII.

Duo triangula rectilinea inuicem æqualia, & æquiangula sunt & inter se æquilatera.

Prop. XXIV.

Duo triangula rectilinea inuicem æqualia eandem, siue æquas bases habentia, & basibus oppositos angulos æquales: habebunt & reliqua latera singula singulis æqualia.

Prop. XXV.

✠ Si trianguli rectanguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ & quadrantibus minorum sinus secundi vnius arcuum acutis oppositorum fuerit medius proportionalis inter sinum totum sinúmque secundum acuti anguli oppositi: tunc reliqui arcus erunt alter complemento alterius æquales. Et sinus secundus prædicti arcus acutum subtendentis æqualis erit sinui reliqui acuti anguli.

Prop. XXVI.

✠ Iisdem suppositis, ipsi reliqui coniuncti quadrantem conficient.

Prop. XXVII.

Iisdem suppositis, si alternæ quadrantum portiones sint æquales: vel si arcus ipsius trianguli prædicti coniuncti quadrantem conficiāt, tunc sinus secundus arcus reliqui erit medius proportionalis inter sinum totum, sinúmque secundum anguli oppositi, & etiam æqualis sinui reliqui anguli acuti.

Prop. XXIII.

Iisdem suppositis, si sinus secundus arcus acuto angulo oppositi pe-

natur æqualis sinui reliqui acuti tunc idem sinus erit medius proportionalis inter sinum totum sinúmque secundum anguli ipsi arcui opposito: & reliqui arcus æquales singulis coalternis quadrantum complementis.

Prop. XXIX.

Iisdem suppositis, si sinus secundus arcus acuto oppositi sit medius proportionalis inter sinum totum sinumque secundum eiusdem acuti: tunc arcuum comprehendentium ipsum acutum differentia erit maxima differentiarum, quibus differunt quilibet duo arcus eundem angulum complectentes ab angulo ad quemlibet alium quadrantem recepti.

Prop. XXX.

Iisdem suppositis, si arcuum acutum angulum complectentium differentia sit maxima earum, quibus differunt arcus eundem angulum continentes ab ipso angulo ad quoslibet quadrantes conterminos recepti: tunc secundus sinus arcus eidem acuto oppositi erit medius proportionalis inter sinum totum, sinumque secundum ipsius acuti. Et arcus maximè differentes quadrantem conflabunt.

Prop. XXXI.

Iisdem suppositis, si arcuum acutum angulum continentium congeries sit quadrans, iidem arcus maximè different.

Prop. XXXII.

Iisdem suppositis, si arcus acutum angulum continentes maximè differant, sinus secundus reliqui arcus æqualis erit sinui acuti anguli.

Prop. XXXIII.

Si duo circuli maiores in superficie sphæræ angulum acutum contineant, & in vno eorum signentur duo puncta, à quibus arcus circulorum maiorum perpendiculares ad reliquum ducantur: Ratio sinus arcus inter casus perpendicularium ad sinum arcus inter puncta signata cadentis componetur ex duabus: quarum vna est ratio sinus totius ad sinum secundum vnius arcus perpendicularium: altera est ratio sinus secundi acuto angulo prædicto debiti ad sinum secundum reliqui arcus perpendicularis.

Prop. XXXIV.

Iisdem suppositis, sinus arcus inter casus perpendicularium ad sinum arcus inter puncta signata cadentis erit sicut quod ex sinu toto, sinuque secundo anguli acuti prædicti fit, rectangulum, ad id, quod ex sinibus secundis arcuum perpendicularium producitur rectangulum.

Prop. XXXV.

Iisdem suppositis, si sinus totus ad sinum secundum alterius perpendicularium arcuum fuerit sicut sinus secundus reliqui perpendicularis ad sinum secundum anguli acuti prædicti: tunc arcus inter casus perpendicularium æqualis erit arcui inter puncta signata cadenti: Reliquæ autem coalternæ quadrantum portiones æquales erunt: Et angulorum à perpendicularibus arcubus apud signata puncta factorum sinus erunt æquales alter alterius perpendicularis sinui secundo.

Prop. XXXVI.

Iisdem suppositis, si arcus inter casus perpendicularium æqualis fuerit arcui inter puncta signata cadenti: cætera omnia sequentur.

Prop. XXXVII.

Iisdem suppositis, si duo coalterni arcus æquales ponantur, adhuc cætera omnia sequentur.

Prop. XXXVIII.

Iisdem suppositis, si sinus anguli ab vno perpendicularium arcuum apud signatum punctum facti ponatur æqualis sinui secundo alterius perpendicularis: similiter cætera omnia sequentur.

Prop. XXXIX.

Quod si in eodem lineamento, sinus totus ad sinum secundum alterius perpendiculariũ arcuum maior sit, quàm sinus secundus alterius perpendicularis ad sinum secundum anguli acuti perpendicularibus oppositi: tunc arcus inter casus perpendicularium maior erit arcu inter signata puncta cadente: & arcus ad angulum maiores erunt singuli singulis coalternis. Et angulorum à perpendicularibus ad puncta signata factorum sinus maiores erunt, alter alterius perpendicularis sinu secundo.

Prop. XL.

Si verò sinus totus ad sinum secundum alterius arcus perpendicularis minor fuerit, quàm sinus secundus reliqui perpendicularis ad sinum secundum anguli acuti perpendicularibus oppositi: tunc arcus inter casus perpendicularium minor erit arcu inter signata puncta cadente. Et arcus ad angulum minores erunt singuli singulis coalternis. Et angulorum à perpendicularibus ad puncta signata factorum sinus minores erunt, alter alterius perpendicularis sinu secundo.

Prop. XLI.

Item si arcus inter casus perpendicularium ponatur maior arcu inter puncta signata cadente: tunc maior erit sinus totus ad sinum secundum vnius arcuum perpendicularium, quàm sinus secundus alte-

nius perpendicularis ad ſinum ſecundum anguli perpendicularibus oppoſiti. Et cętera ſequentur quæ in triceſima nona præcedenti.

Prop. XLII.

Item, ſi duorum coalternorum arcuum, qui ad angulum, ponatur maior: & cætera, quæ dicta ſunt ſequentur.

Prop. XLIII.

Item, ſi ſinus vnius angulorum à perpendicularibus apud ſignata puncta factorum ponatur maior ſinu ſecundo reliqui perpendicularis: & eadem reliqua ſequentur.

Prop. XLIV.

Si verò arcus inter caſus perpendicularium ponatur minor arcu inter puncta ſignata cadente, ſequentur cætera deinceps quæ in quadrageſima.

Prop. XLV.

Item, ſi duorum coalternorum arcuum, qui ad angulum, ponatur minor: & cætera ſimiliter ſequentur.

Prop. XLVI.

Item, ſi anguli ab vno perpendicularium arcuum apud ſignatum punctum facti ſinus ponatur minor ſinu ſecundo reliqui perpendicularis: non aliter, quàm priùs, cætera ſequentur.

Prop. XLVII.

Si ſinus ſecundi arcuum perpendicularium proportionem ſeruantes in trigeſima quinta prædictam fuerint proportionales permutato ordine ſinibus ſecundis aliorum duorum arcuum perpendicularium: arcus coalterni inter perpendiculares æquales erunt.

Prop. XLVIII.

Quod ſi ſinibus ſecundis arcuum perpendicularium proportionem in trigeſima quinta prædictam ſeruantibus interſit medius proportionalis ſecundus arcus medij proportionalis: Et coalterni arcus item perpendiculari medio ad collaterales hinc inde recepti æquales erunt.

Prop. XLIX.

Quod vigeſima-nona huius propoſuit, aliter oſtendere.

MAVROLYCI SICVLI,

SPHÆRICORVM.

LIBER SECVNDVS.

Præfatio.

DE proportione, quàm seruat sinus aggregati ex arcubus acutum angulum comprehendentibus in rectangulo trigono sphærali ad sinum differentiæ eorumdem arcuum, seruato acuto, deinceps nobis differendum est. Qui locus quamuis à Menelao minimè sit prætermissus, Nos tamen theorema illud nobilissimum, quod ipsi quintum est in ordine propositionum tertij libelli, aliter atque aliter demonstrantes multum rem speculationibus, & quasi corollarijs illustrauimus. Non enim parcimus opportunis præambulis ad demonstrationem spectantibus, quo distinctis commodiùs propositionibus, omnia sint apertiora; scituque iucundiora.

Propositio prima.

Cum fuerint in superficie sphæræ quatuor arcus circulorum maiorum, semicirculis minores: duo quidem ab vno angulo descendentes: duoque à descendentium terminis se vicissim secantes & alternatim ad descendentes reflexi: tunc ratio sinus vnius descendentium ad sinum partis eius superioris componetur ex duabus: Quarum vna est ratio sinus arcus reflexi à termino dicti descendentis ad sinum partis superioris eiusdem reflexi: altera est ratio sinus partis inferioris alterius reflexi ad sinum totius eiusdem reflexi.

Prop. II.

Item ratio sinus vnius arcus ex reflexis ad sinum partis inferioris componetur ex duabus: quarum vna est ratio sinus partis superioris arcus contermini descendentis ad sinum ipsius descendentis totius: altera est ratio sinus alterius totius reflexi ad sinum partis eius superioris.

Prop. III.

Aliter idipsum demonstrare.

Prop. IV.

Suppositis ijsdem, ratio sinus vnius arcuum descendentium ad sinum partis eius inferioris componetur ex duabus: quarum vna est ra-

tio ſinus partis ſuperioris alterius deſcendentis ad ſinum partis eiuſdem inferioris: altera eſt ratio ſinus partis inferæ arcus reflexi à termino huius deſcendentis ad ſinum partis ſupernæ eiuſdem reflexi.

Prop. V.

Idem & aliter demonſtrare.

Prop. VI.

Si quadrilaterum rectilineum circulo inſcriptum fuerit: Quod ſub duabus eius diametris continetur rectangulum, æquale eſt duobus ijs, quæ ſub oppoſitis lateribus comprehenduntur, coniunctim ſumptis rectangulis.

Prop. VII.

Aggregatum eorum, quæ fiunt ex vtraque chordarum duorum arcuum inæqualium in chordam reſidui de ſemicirculo alterius rectangulorum ad differentiam eorumdem eſt ſicut chorda aggregati ex eiſdem arcubus ad chordam arcus differentiæ eorumdem.

Prop. VIII.

Aggregatum eorum, quæ fiunt ex vtroque ſinu duorum arcuum inæqualium in ſinum ſecundum alterius, rectangulorum, ad differentiam eorumdem eſt ſicut ſinus aggregati ex ijſdem arcubus ad ſinum arcus differentiæ eorumdem.

Prop. IX.

Si duæ magnitudines duabus magnitudinibus ſint proportionales; erunt & earum aggregata differentijs proportionalia, Contra, ſi aggregata fuerint differentijs proportionalia, & duæ magnitudines duabus magnitudinibus proportionales erunt.

Prop. X.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in ſuperficie ſphæræ ſinus aggregati duorum arcuum angulum acutum comprehendentium ad ſinum differentiæ eorundem eſt ſicut aggregatum ex ſinu toto, ſinúque ſecundo dicti anguli acuti, ad differentiam eorumdem ſinuum.

Prop. XI.

Si fuerit triangulum rectangulum ex arcubus circulorum maiorum in ſuperficie ſphæræ, atque anguli ad centrum ſphæræ conſtituti, quos ſubtendunt duo arcus trianguli acutum angulum continētes, & fuerint æquales angulis, quos continent latera duo trianguli rectilinei cum perpendiculari ad tertium latus; ſinguli ſingulis: Tunc ſinus totus ad ſinum ſecundum anguli acuti prædicti erit, ſicut portio maior tertij lateris trianguli rectilinei ad minorem.

tionalia sunt rectangulis, quæ sub sinibus portionum basis ab ipsius lateralibus ad arcus descendentes receptarum continentur, eodem ordine sumptis.

Prop. XVII.

Quod si quadrata prædicta memoratis rectangulis proportionalia ponantur, cum præfata conditione, vt arcus descendentes inferius producti suscipiant cum per extremum vnius laterum trianguli ductis angulos æquales singuli singulis ijs, quos continent supernè cum reliquo latere trianguli, Tunc arcus descendentes cum lateribus æquales complectuntur angulos.

Prop. XVIII.

Si ab angulo recto trianguli sphæralis rectanguli descendant duo arcus ad basim, vnus intra triangulum, alter extra, facientes cum latere trianguli interposito angulos æquales: Tunc ratio sinus arcus compositi ex basi & ex arcu sibi in continuum adiecto vsque ad descendentem ad sinum ipsius arcus adiecti est sicut ratio sinus portionis basis interceptæ à reliquo latere trianguli & arcu intrinsecus descendente ad sinum reliquæ portionis basis.

Prop. XIX.

Quod si ratio sinus arcus compositi ex basi & arcu adiecto vsque ad descendentem exteriorem ad sinum ipsius arcus adiecti fuerit, sicut ratio sinus portionis basis interceptæ à reliquo latere trianguli, & descendente inferiori ad sinum reliquæ portionis basis: tunc arcus descendentes cum latere trianguli interposito æquos faciunt angulos.

Prop. XX.

Quod si anguli prædicti, quos faciunt arcus descendentes cum latere trianguli interposito ponantur æquales: fueritque ratio sinus arcus compositi ex basi & arcu adiecto vsque ad descendentem exteriorem ad sinum ipsius adiecti, sicut ratio sinus portionis basi interceptæ à reliquo latere trianguli, & arcu intus descendente ad sinum reliquæ portionis basis: tunc angulus trianguli, à quo descendunt arcus, rectus est.

Prop. XXI.

Si duos angulos trianguli sphæralis duo arcus singuli singulos per medium secent: tunc, qui per reliquum angulum & secantium concursum producitur, arcus ipsum quoque reliquum angulum per æqualia secabit.

Prop. XXII.

Si à duobus angulis trianguli sphæralis duo arcus ad subtensa latera perpendiculares progrediantur: tunc, qui à reliquo angulo per ipsorum perpendicularium coincidentiam ducetur, arcus reliquo etiam lateri perpendicularis erit.

Lemma I.

Quadrilaterum rectilineum, cuius duo anguli oppositi simul sumpti sunt duobus rectis aequales, est à circulo circumscriptibile.

Lemma II.

Si fuerint duo quadrilatera rectilinea circuli inscripta: quorum vnus angulus vnius fuerit aequalis vni angulo alterius: Et latera circum illos angulos proportionalia: itemque ipsi aequales anguli per quadrilaterorum diametros diuisi in portiones singulas singulis aequales: tunc similia ad inuicem erunt quadrilatera.

Lemma III.

Cum exeunt à duobus angulis trianguli rectilinei duae rectae perpendiculares ad subtensa, latera tunc quae reliquo angulo per sectionem perpendicularium recta producitur, reliquo etiam lateri perpendicularis est.

Lemma IV.

Si per duas hypotenusas trianguli pyramidis duo plana ad oppositas singula bases perpendicularia deducantur, tunc productum per reliquam pyramidis hypotenusam, & communem sectionem perpendicularium planorum, est etiam ad oppositam basim pyramidis perpendiculare.

Prop. XXIII.

Si à trianguli sphaeralis duobus angulis duo arcus exeuntes opposita singuli latera per medium diuidant: tunc arcus, qui ab angulo reliquo per diuidentium arcuum coincidentiam producitur, oppositum quoque latus per medium secabit.

Lemma I.

Si de duobus lateribus trianguli rectilinei sumantur duae portiones ad angulum sub dictis lateribus contentum continuatae, quarum vtraque sui lateris sit pars tertia: & per earum terminos agantur duae rectae lateribus ipsis vicissim aequidistantes sese intra triangulum secantes: tunc recta, quae à quolibet trium angulorum trianguli per sectionem dictarum aequidistantium ad oppositum latus progreditur, latus ipsum per aequalia diuidit.

Lemma II.

Si à trianguli rectilinei duobus angulis duae rectae lineae progressae opposita latera singula per medium diuidant, tunc recta, quae ab angulo reliqua per diuidentium coincidentiam producitur, oppositum quoque latus per aequalia dispescit.

Prop. XXIV.

Cum fuerint in superficie sphaerae duo circuli magni alter alteri inclinatus: in quorum vno signentur duo puncta, à quibus ad reliquum circulum duo arcus perpendiculares ducantur: tunc ratio sinus arcus cadentis inter casus perpendicularium ad sinum arcus, quem termi-

nant puncta signata, est sicut ratio rectanguli contenti sub diametro sphæræ, & diametro circuli tangentis alterum inclinatorum, & æquidistantis reliquo ad rectangulum contentum sub diametris circulorum transeuntium per puncta signata in circulo inclinato, & ęquidistantium reliquo ex circulis inclinatis.

MAVROLYCI SICVLI SPHÆRICORVM.

LIBER PRIMVS.

PRÆFATIO.

POst Theodosium, qui sphærica elementa tribus libellis complexus est, Menelaus sphæricorum totidem libris prosequutus multa de sinuum proportione in tertio acutissime demonstrauit. Inde sumpsisse videtur Ptolomæus ea, quæ in principio magnæ constructionis, post chordarum doctrinam, de sphæricis tradidit. Quæ cùm postea Tebitius legisset perspicacissimus, animaduertit eadem & meliori ordine, & facilius ostendi potuisse. Quemadmodum in libello apparet, in quo ipse Ptolomęum carpit. Adiecit his nonnulla Geber, qui nouem libros in magnam Ptolomæi constructionem conscripsit. Vnde multa sumpserunt Georgius Peurbachius, & Ioannes Regiomontanus, dum prædictum Ptolomaicum opus in epitomen ordinatissimè redigunt. Tradidit & complura super his Ioannes prædictus in libellis triangulorum non spernenda. Quæ omnia cum ego proximis his annis vidissem ac contulissem, non passus sum præcepta tanti momenti, & Astronomiæ, post planorum triangulorum scientiam apprimè necessaria sparsim legi. Ea itaque in hos duos libellos congessi adiiciens de ingenij mei riuulo demonstrationes nonnullas Sic tamen vt post elementa Theodosij ac Menelai demonstrata, detur his locus, vt hæc sint quasi illorum paralipomena. Vnde possint absolui quęstiones, quæ circa sphæralia triangula fieri solent, quæque ad primi mobilis circulos in Astronomia pertinent. Igitur expositis definitionibus, quasi negotij fundamentis, veniemus ad demonstrationes, & à facilioribus exorsi ordinem quàm commodissimum seruabimus.

DEFINITIONES.

✠. I. Sinus rectus arcus cuiuspiam est dimidium chordæ dupli talis arcus.

✠ II. Vnde, duorum arcuum qui coniuncti conflant semicirculum idem est sinus, sicut duorum arcuum circulorum integrantium eadem est chorda.

III. Et quadrantis sinus est circuli semidiameter: qui sinus totus, siue sinus maximus vocatur. Sicut semicirculi chorda est tota diameter.

✠ IV. Sinus secundus arcus cuiuspiam est sinus complementi eius ad quadrantem, siue sinus excessus ipsius supra quadrantem.

✠ V. Sinus versus arcus cuiuspiam est portio diametri inter arcum ipsum sinumque rectum recepta: quæ & excessus est semidiametri super sinum secundum: siue congeries semidiametri & sinus secundi.

✠ VI. Sinus autem anguli cuiuspiam est ille, qui sinus est arcus, angulum ipsum subtendentis iuxta prædictas definitiones.

Propositio prima.

✠ Linea perpendicularis à puncto quopiam in periferia semicirculi ad diametrũ est sinus rectus vtriusque arcuum ab ipso puncto ad diametrum receptorum. Portiones verò diametri à perpẽdiculari ad periferiam vtrinque susceptæ sunt sinus versi arcuum sibi singuli conterminorum. Quæ porrò cadit inter perpendicularem & centrum, est sinus secundus vtriusque dictorum arcuum.

Prop. II.

✠ Si in superficie sphæræ duo circuli maiores se vicissim ad rectos angulos secent: linea perpendicularis à puncto quolibet peripheriæ vnius eorum ad planum reliqui, est sinus rectus vtriusque arcuum ab ipso puncto ad circulorum sectiones receptorum.

Prop. III.

Trianguli ex arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ constituti; quorum duo sunt quadrantes: anguli quadrantibus oppositi sunt recti. Contra, si recti sint anguli, arcus illis oppositi sunt quadrãtes. Polus autem tertij arcus est in ipsorum quadrantum cõcursu.

Prop. IV.

Trianglum ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ habens vnum quadrantem, & vnum ex angulis rectum, habebit & alterum quadrantem & alterum angulum rectum.

Prop. V.

Trianguli ex arcubus circulorum maiorum, quorum vnusquisque

minor est quadrante, in superficie sphæræ constituti, cuius ex angulis vnus rectus, duo reliqui anguli acuti sunt. Contra, si rectus sit ex angulis vnus, duoque reliqui acuti; vnusquisque arcuum minor erit quadrante.

Prop. VI.

In triangulo ex arcubus circulorum maiorum quadrante minoribus in superficie sphæræ rectangulo, est sicut sinus arcus rectum angulum subtendentis ad sinum arcus alterum ex acutis angulis respicientis, sic est sinus totus ad sinum dicti acuti anguli.

Prop. VII.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ duos angulos acutos æquales inuicem habentibus, sinus arcuum rectos angulos subtendentium sunt sinibus arcuum acutis oppositorum proportionales.

Prop. VIII.

Si in duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, sinus arcuum rectos respicientium proportionales fuerint sinibus arcuum acutos angulos subtendentium: ipsi acuti anguli æquales erunt.

Prop. IX.

Si in triangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sicut est sinus totus ad sinum anguli acuti, sic sit sinus arcus alium angulum subtendentis ad sinum arcus, qui acuto opponitur: angulus ille rectus erit.

Prop. X.

In triangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ angulum rectum habente, sinus reliquorum angulorum sunt sinibus laterum, quibus opponuntur, proportionales.

Prop. XI.

Si duo anguli trianguli cuiuspiam ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ fuerint duobus angulis trianguli alterius ex arcubus circulorum maiorum in eadem superficie, singuli singulis æquales: tunc sinus arcuum æqualibus angulis oppositorum proportionales erunt.

Prop. XII.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, quorum arcus rectis oppositi sunt æquales, duorum ex reliquis arcuum vtcumque sumptorum sinus sunt sinibus oppositorum angulorum proportionales.

Prop. XIII.

Prop. XIII.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, ratio sinuum duorum arcuum acutis oppositorum componitur ex duabus, quarum vna est ratio sinuum arcubus rectos respicientibus debitorum, altera ratio sinuum dictorum acutorum angulorum.

Prop. XIV.

In duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, ratio sinus arcus vni acutorum oppositi in vno triangulo, ad sinum arcus vni acutorum oppositi in altero triangulo est sicut ratio rectanguli contenti sub sinibus arcus rectum subtendentis, & anguli acuti in illo triangulo ad rectangulum contentum sub sinibus arcus recto oppositi & anguli acuti in hoc triangulo.

Prop. XV.

Si in duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sinus arcuum rectis angulis oppositorum fuerint sinibus acutorum angulorum ordine permutato proportionales: æquales erunt arcus, qui acutos subtendunt. Quod si æquales sint arcus, acutis angulis subtensi, & sinus arcuum rectis oppositorum erunt sinibus acutorum ipsorum ordine permutato proportionales.

Prop. XVI.

In omni triangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sinus duorum vtcumque sumptorum arcuum sunt sinibus oppositorum angulorum proportionales.

Prop. XVII.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ sinus secundus alterius arcuum rectum angulum continentium ad sinum secundum arcus rectum subtendentis est, sicut sinus totus ad sinum secundum reliqui ex arcubus rectum comprehendentium.

Prop. XVIII.

Arcus bini & bini in circulo eodem, siue in circulis æqualibus sumpti, quorum excessus æquales, & chordæ siue sinus proportionales, sunt singuli singulis, hoc est, maior maiori & minor minori æquales.

Prop. XIX.

Si in triangulo ex arcubus circulorum maiorum quadrante minoribus in superficie sphæræ, sinus secundus primi arcus ad sinum secundum secundi arcus sit, sicut sinus totus ad sinum secundum tertij arcus tunc angulus secundo lateri oppositus rectus erit.

Prop. XX.

✠ Si in quolibet triangulo ex arcubus circulorũ maiorum in superficie sphæræ ducatur ab angulo quouis ad basim perpendicularis arcuum à reliquis angulis ad perpendicularem receptorum, sunt sinibus secundis conterminorum laterum proportionales.

Prop. XXI.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, sinus vnius acutorum angulorum ad sinum totum est, sicut sinus secundus reliqui acuti ad sinum secundum arcus eum subtendentis.

Prop. XXII.

Si in triangulo quolibet ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ ducatur à quouis angulo perpendicularis arcus circuli maioris ad basim: sinus angulorum apud verticem sub perpendiculari & lateribus comprehensorum sunt sinibus secundis angulorum ad basim proportionales.

Prop. XXIII.

Duo triangula rectilinea inuicem æqualia, & æquiangula sunt & inter se æquilatera.

Prop. XXIV.

Duo triangula rectilinea inuicem æqualia eandem, siue æquas bases habentia, & basibus oppositos angulos æquales: habebunt & reliqua latera singula singulis æqualia.

Prop. XXV.

✠ Si trianguli rectanguli ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ & quadrantibus minorum sinus secundi vnius arcuum acutis oppositorum fuerit medius proportionalis inter sinum totum sinúmque secundum acuti anguli oppositi: tunc reliqui arcus erunt alter complemento alterius æquales. Et sinus secundus prædicti arcus acutum subtendentis æqualis erit sinui reliqui acuti anguli.

Prop. XXVI.

✠ Iisdem suppositis, ipsi reliqui coniuncti quadrantem conficient.

Prop. XXVII.

Iisdem suppositis, si alternæ quadrantum portiones sint æquales: vel si arcus ipsius trianguli prædicti coniuncti quadrantem conficiãt, tunc sinus secundus arcus reliqui erit medius proportionalis inter sinum totum, sinúmque secundum anguli oppositi, & etiam æqualis sinui reliqui anguli acuti.

Prop. XXIII.

Iisdem suppositis, si sinus secundus arcus acuto angulo oppositi pe-

natur æqualis ſinui reliqui acuti tunc idem ſinus erit medius proportionalis inter ſinum totum ſinúmque ſecundum anguli ipſi arcui oppoſiti: & reliqui arcus æquales ſingulis coalternis quadrantum complementis.

Prop. XXIX.

Iiſdem ſuppoſitis, ſi ſinus ſecundus arcus acuto oppoſiti ſit medius proportionalis inter ſinum totum ſinumque ſecundum eiuſdem acuti: tunc arcuum comprehendentium ipſum acutum differentia erit maxima differentiarum, quibus differunt quilibet duo arcus eundem angulum complectentes ab angulo ad quemlibet alium quadrantem recepti.

Prop. XXX.

Iiſdem ſuppoſitis, ſi arcuum acutum angulum complectentium differentia ſit maxima earum, quibus differunt arcus eundem angulum continentes ab ipſo angulo ad quoſlibet quadrantes conterminos recepti: tunc ſecundus ſinus arcus eidem acuto oppoſiti erit medius proportionalis inter ſinum totum, ſinumque ſecundum ipſius acuti. Et arcus maximè differentes quadrantem conflabunt.

Prop. XXXI.

Iiſdem ſuppoſitis, ſi arcuum acutum angulum continentium congeries ſit quadrans, iidem arcus maximè different.

Prop. XXXII.

Iiſdem ſuppoſitis, ſi arcus acutum angulum continentes maximè differant, ſinus ſecundus reliqui arcus æqualis erit ſinui acuti anguli.

Prop. XXXIII.

Si duo circuli maiores in ſuperficie ſphæræ angulum acutum contineant, & in vno eorum ſignentur duo puncta, à quibus arcus circulorum maiorum perpendiculares ad reliquum ducantur: Ratio ſinus arcus inter caſus perpendicularium ad ſinum arcus inter puncta ſignata cadentis componetur ex duabus: quarum vna eſt ratio ſinus totius ad ſinum ſecundum vnius arcus perpendicularium: altera eſt ratio ſinus ſecundi acuto angulo prædicto debiti ad ſinum ſecundum reliqui arcus perpendicularis.

Prop. XXXIV.

Iiſdem ſuppoſitis, ſinus arcus inter caſus perpendicularium ad ſinum arcus inter puncta ſignata cadentis erit ſicut quod ex ſinu toto, ſinuque ſecundo anguli acuti prædicti fit, rectangulum, ad id, quod ex ſinibus ſecundis arcuum perpendicularium producitur rectangulum.

rius perpendicularis ad sinum secundum anguli perpendicularibus oppositi. Et cętera sequentur quæ in tricesima nona præcedenti.

Prop. XLII.

Item, si duorum coalternorum arcuum, qui ad angulum, ponatur maior: & cætera, quæ dicta sunt sequentur.

Prop. XLIII.

Item, si sinus vnius angulorum à perpendicularibus apud signata puncta factorum ponatur maior sinu secundo reliqui perpendicularis: & eadem reliqua sequentur.

Prop. XLIV.

Si verò arcus inter casus perpendicularium ponatur minor arcu inter puncta signata cadente, sequentur cætera deinceps quæ in quadragesima.

Prop. XLV.

Item, si duorum coalternorum arcuum, qui ad angulum, ponatur minor: & cætera similiter sequentur.

Prop. XLVI.

Item, si anguli ab vno perpendicularium arcuum apud signatum punctum facti sinus ponatur minor sinu secundo reliqui perpendicularis: non aliter, quàm priùs, cætera sequentur.

Prop. XLVII.

Si sinus secundi arcuum perpendicularium proportionem seruantes in trigesima quinta prædictam fuerint proportionales permutato ordine sinibus secundis aliorum duorum arcuum perpendicularium: arcus coalterni inter perpendiculares æquales erunt.

Prop. XLVIII.

Quod si sinibus secundis arcuum perpendicularium proportionem in trigesima quinta prædictam seruantibus intersit medius proportionalis secundus arcus medij proportionalis: Et coalterni arcus item perpendiculari medio ad collaterales hinc inde recepti æquales erunt.

Prop. XLIX.

Quod vigesima-nona huius proposuit, aliter ostendere.

tio ſinus partis ſuperioris alterius deſcendentis ad ſinum partis eiuſdem inferioris: altera eſt ratio ſinus partis inferæ arcus reflexi à termino huius deſcendentis ad ſinum partis ſupernæ eiuſdem reflexi.

Prop. V.

Idem & aliter demonſtrare.

Prop. VI.

Si quadrilaterum rectilineum circulo inſcriptum fuerit: Quod ſub duabus eius diametris continetur rectangulum, æquale eſt duobus ijs, quæ ſub oppoſitis lateribus comprehenduntur, coniunctim ſumptis rectangulis.

Prop. VII.

Aggregatum eorum, quæ fiunt ex vtraque chordarum duorum arcuum inæqualium in chordam reſidui de ſemicirculo alterius rectangulorum ad differentiam eorumdem eſt ſicut chorda aggregati ex eiſdem arcubus ad chordam arcus differentiæ eorumdem.

Prop. VIII.

Aggregatum eorum, quæ fiunt ex vtroque ſinu duorum arcuum inæqualium in ſinum ſecundum alterius, rectangulorum, ad differentiam eorumdem eſt ſicut ſinus aggregati ex ijſdem arcubus ad ſinum arcus differentiæ eorumdem.

Prop. IX.

Si duæ magnitudines duabus magnitudinibus ſint proportionales; erunt & earum aggregata differentijs proportionalia, Contra, ſi aggregata fuerint differentijs proportionalia, & duæ magnitudines duabus magnitudinibus proportionales erunt.

Prop. X.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in ſuperficie ſphæræ ſinus aggregati duorum arcuum angulum acutum comprehendentium ad ſinum differentiæ eorundem eſt ſicut aggregatum ex ſinu toto, ſinúque ſecundo dicti anguli acuti, ad differentiam eorumdem ſinuum.

Prop. XI.

Si fuerit triangulum rectangulum ex arcubus circulorum maiorum in ſuperficie ſphæræ, atque anguli ad centrum ſphæræ conſtituti, quos ſubtendunt duo arcus trianguli acutum angulum continētes, & fuerint æquales angulis, quos continent latera duo trianguli rectilinei cum perpendiculari ad tertium latus; ſinguli ſingulis: Tunc ſinus totus ad ſinum ſecundum anguli acuti prædicti erit, ſicut portio maior tertij lateris trianguli rectilinei ad minorem.

Prop. XII

Quod decima huius propositione, aliter demonstrare. *Videatur scholium Maurolyci.*

Prop. XIII.

Cum circuli semidiameter secat chordam arcúmque, chordæ portiones sunt sinibus portionum arcus proportionales.

Prop. XIV.

Quod decima, quódque duodecima huius demonstrant, adhuc aliter demonstrare.

Prop. XV.

In triangulo ex arcubus circulorum maiorum rectangulo in superficie sphæræ, aggregatum ex sinu toto, sinúque secundo anguli acuti ad differentiam eorumdem est sicut quadratum, quod ex sinu secundo dimidij anguli acuti ad quadratum, quod ex sinu eiusdem dimidij.

Prop. XVI.

Item, sinus aggregati arcuum acutum angulum comprehendentium ad sinum differentiæ eorumdem arcuum est sicut quadratum, quod ex sinu secundo dimidij anguli acuti ad quadratum, quod ex sinu eiusdem dimidij.

Prop. XVII.

Item, sinus aggregati arcuum angulum acutum comprehendentium ac sinum differentiæ eorumdem arcuum est sicut sinus versus complementi ipsius anguli ad duos rectos ad sinum versum talis acuti.

Prop. XVIII.

Si fuerint duo triangula ex arcubus circulorum maiorum rectangula in superficie sphæræ, quorum vnius angulus acutus æqualis alterius angulo acuto : tunc sinus aggregati arcuum acutum angulum comprehendentium in vno triangulo ad sinum arcus differentiæ eorum est, sicut sinus aggregati arcuum acutum angulum continentium in altero triangulo ad sinum arcus differentiæ eorundem.

Prop. XIX.

Quod si id duobus triangulis rectangulis ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ, sinus aggregati arcuum acutum angulum comprehendentium in vno triangulo ad sinum arcus differentiæ eorum, fuerit sicut sinus aggregati arcuum angulum continentium in altero triangulo ad sinum arcus differentiæ eorum, tunc ipsi acuti anguli æquales ad inuicem erunt

Prop. XX.

Prop. XX.

In triangulo ex arcubus circulorum maiorum rectangulo in superficie sphæræ, arcus acutum angulum continentes, dum quadrantem perficiunt, maximè differunt, quàm sub eodem angulo siue breuiati siue producti differre possint. Contra, si huiusmodi arcus maximè prædicto modo differant, & coniuncti quadrantem circuli constabunt.

Prop. XXI.

Aliter idipsum demonstrare.

Prop. XXII.

Si fuerint in superficie sphæræ duo triangula ex arcubus circulorum maiorum; quorum vnius angulus acutus æqualis alterius angulo acuto:& alius vnius angulus cum alio alterius angulo iunctus conficiat duos rectos, tunc sinus arcuum his angulis oppositorum erunt sinibus arcuum oppositorum acutis proportionales.

Prop. XXIII.

Si fuerint duo triangula in superficie sphæræ ex arcubus circulorum maiorum, quorum vnius acutus angulus æqualis alterius acuto angulo: Et sinus arcuum acutis oppositorum proportionales sinibus arcuum duos ex reliquis angulos respicientium: tunc hi anguli aut æquales erunt, aut coniuncti duos rectos conficient.

Prop. XXIV.

Si ab angulo trianguli ex arcubus singulorum maiorum in superficie sphæræ constituti descendat ad basim arcus circuli maioris angulum ipsum per æqua diuidens:tunc sinus arcuum angulum ipsum continentium erunt sinibus factarum basis portionum proportionales.

Prop. XXV.

Quod si sinus arcuum dictum angulum continentium proportionales fuerint sinibus factarum basis portionum: tunc arcus descendens angulum ipsum per æqualia secare probabitur.

Prop. XXVI.

Si bina triangula fuerint in superficie sphæræ ex arcubus circulorum maiorum, quorum vnius duo anguli fuerint, duobus alterius anguli singulis singulis æquales, & ab angulis reliquis perpendiculares arcus circulorum maiorum ad bases ducantur: tunc sinus factarum basis portionum in vno triangulo proportionales erunt sinibus factarum basis portionum in reliquo triangulo.

Prop. XXVII.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in super-

ficie sphæræ, sinus vnius acutorum angulorum ad sinum totum est sicut sinus secundus reliqui ad sinum secundum lateris cum subtendentis.

Prop. XXVIII.

Item sinus secundus vnius acutorum angulorum ad sinum totum est sicut quod sub sinu secundo arcus acutum angulum subtendentis & sub sinu reliqui acuti continetur, rectangulum ad quod ex sinu toto quadratum.

Prop. XXIX.

In omni triangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ constituto, sinus versus anguli cuiuslibet ad differentiam duorum sinuum versorum, quorum vnus est lateris eum angulum subtendentis; alter verò differentiæ duorum arcuum ipsum angulum continentium est sicut quadratum sinus totius ad id quod sub sinibus arcuum eorumdem continetur, rectangulum.

Prop. XXX.

Sinus arcus alicuius ad sinum eius secundum est sicut gnomon ad vmbram rectam eiusdem arcus. Sicut autem sinus secundus ad sinum dicti arcus, sic est gnomon ad vmbram versam eiusdem arcus.

Corollarium.

Vnde vmbra recta cuiusuis arcus est & vmbra versa complementi eiusdem arcus. Item dimidio quadrantis debita vmbra tam recta, quàm versa æqualis est suo gnomoni. Item gnomon semper est medius proportionalis inter vmbras duorum arcuum quadrantem integrantium seu rectas, seu versas.

Prop. XXXI.

In triangulo rectangulo ex arcubus circulorum maiorum in superficie sphæræ constituto, sinus totus ad sinum arcus vnum ex acutis angulis subtendentis est sicut quadratum gnomonis ad rectangulum comprehensum sub vmbris versis, quarum vna complemento reliqui acuti, altera verò arcui eundem acutum subtendenti debetur.

Corollarium.

Hinc manifestum est, quod in duobus triangulis sphæralibus orthogoniis, duo latera, quæ circum rectos angulos æqualia fuerint: tunc rectangula, quæ ex vmbris versis reliquorum laterum, quæ circum rectos, in vmbra versas debitas complementis subtensorum angulorum producuntur, erunt & inuicem æqualia. Et contrariò.

Prop. XXXII.

In triangulo rectangulo ex arcubus magnis in superficie sphæræ

constituto, sinus totus ad sinum arcus vnum ex acutis angulis subtendentis est sicut vmbra versa reliquo acuto angulo debita, ad vmbram versam lateri dictum angulum respicientis.

Scholium.

Ex his igitur demonstrationibus absolui possunt omnes quaestiones, quae fieri consueuerunt circa sphaeralia triangula: quaeque in Astronomia pertinent ad arcus circulorum in primo caelo intellectorum, hoc est, in concaua superficie primi mobilis descriptorum. Sed nemo harum speculationum scientiam perfectam habens nesciet theoriam ad praxim atque demonstrationem ad calculum deducere. Quae res vt magis peruia fiat lectori, exempla nonnulla sunt adducenda, vt circa declinationes, & ascensiones.

AVTOLYCI DE SPHÆRA MOBILI, EX TRADITIONE MAVROLYCI LIBER.

ABSOLVTIS *Theodosij, Menelai atque Maurolyci sphaericis, subiungemus ea quae ad sphaeram mobilem, motumque primum pertinent, quippe quae sphaericorum demonstratis innituntur, & prima sunt syderalis disciplinae rudimenta: quibus addemus Theodosium de habitationibus, & habitationum collatione. Aduerte autem ea esse Maurolyci, quae literis* Italicis *scribentur.*

Sphaerae puncta aequaliter ferri dicuntur, quaecumque aequali tempore aequales ac similes transeunt periferias. At si in linea aliqua delatum aliquod punctum aequaliter, binas transierit lineas, eandem habebit rationem tempus ad tempus, quibus singulas transit lineas, quàm linea ad lineam: *id est, peracta spatia temporibus proportionalia sunt.*

Propositio prima.

Si aequaliter sphaera voluatur circa suum axem, cuncta quae in superficie sunt sphaerae puncta, praeter polos, circulos describunt parallelos, & ad axem rectos, & eosdem cum sphaera polos habentes.

Nam tales circuli describuntur per rectas à punctis ad axem, super quo sphaera versatur, perpendiculares: & ideò per 9. primi sphaeric. Theod. habent dictum axem communem, & polos communes, & per 2. secundi, sunt inuicem paralleli.

Prop. II.

Si sphaera voluatur aequaliter circa suum axem, cuncta, quae in su-

perficie puncta sunt sphæræ, similes periferias circulorum parallelorum, in quibus feruntur, in tempore eodem præteribunt.

Nam si duo puncta sint in eodem parallelo, constat propositum per assumptam in principio petitionem. Si autem in diuersis parallelis, constabit propositum per 15. secundi spharic. Theod.

Prop. III.

Si æqualiter sphæra voluatur circa suum axem, quas in tempore eodem periferias transmittent puncta quædam in circulis parallelis, per quos feruntur, eæ ipsæ similes erunt.

Hac est conuersa pracedentis, & simili modo demonstratur.

Prop. IV.

Si in sphæra maior circulus manens separet id, quod apparet de sphæra, ab eo, quod non apparet, sitque ad rectos angulos axi sphæræ, super quo mouetur: nullum punctum superficiei sphæræ oritur, nullum occidit: sed quæ sunt in hemisphærio apparenti, semper apparent: quæ verò in latenti, semper occultantur.

Nam talis circulus manens est communis limes talium hemisphariorum, & per 1. huius, puncta singula suos sursum parallelos semper in alterutro hemisphariorum describent.

Prop. V.

Si per polos sphæræ circulus manens definiat apparens & non apparens: cuncta in superficie sphæræ puncta ipsa euoluta, & occidunt & oriuntur, & æquali tempore morantur super horizontem & sub horizonte.

Nam tales circulus manens, per 20. primi sphar. Theod. secat per aqualia singulos parallelos, id est semicirculos, Quare per 2. huius, per aquale tempus punctorum vnum quodque feretur vtrinque à circulo secante.

Prop. VI.

✠ Si in sphæra maior circulus manens definiat quod apparens est sphæræ, & quod non apparens, obliquus existens ad axem, attinget binos circulos çquales, & parallelos inuicem, & eorum vnus ad apparentem polum semper erit apparens: alter autem ad latentem semper latens, *quod constat per 7o. secundi spharic. Theod.*

Prop. VII.

✠ Si circulus in sphæra fixus apparens ab occulto distinguat obliquus existens ad axem: circuli, qui ad angulos rectos axi in eisdem punctis semper horizontis ortus & occasus faciunt, & similiter inclinantur ad horizontem.

Nam cum circulus fixus constet semper in eodem loco: & circuli super axe suo versati semper in suo singuli plano iaceant: fit vt neque periferia locum

aliquando commutent: & perinde secent fixum in iisdem semper punctis. Inclinatio quoque eorum vna est: sequitur enim inclinationem axis communis.

Prop. VIII.

Si circulus maior in sphæra fixus apparens ab occulto dirimat inclinatus ad axem: quicumque circulus maior contingit duos circulos parallelos æquales, semper videlicet apparentem semperque occultum, quos horizon contingit; euoluta sphæra, congruit horizonti.

Nam dum versatur sphæra, puncta contactuum feruntur semper in periferijs dictorum parallelorum: & perinde contactus dicti circuli maioris couniuntur contactibus horizontis: & circulus ipse counitur horizonti.

Prop. IX.

✠ Si in sphæra maior circulus obliquus ad axem definiat manifestum ab occulto; quod ex simul orientibus punctis est polo apparenti propinquus, posterius occidi. Quod autem ex simul occidentibus, dicto polo vicinius, prius oritur.

Nam punctum polo manifesto vicinius habet, per 24. 2. Theod. maiorem arcum super horizontem: & perinde si simul oritur, cum puncto remotiori à dicto polo: posterius occidet. Et si simul occidat, iam prius exortum est per 2. huius.

Prop. X.

Si in sphæra maximus orbis obliquus ad axem definiat apparens sphæræ & latens; circulus, qui per polos sphæræ, bis rectus sit horizonti in vno sphæræ ambitu.

✠ *Patet, quia talis circulus bis transit in vno ambitu per polos horizontis: quare per 20. 2. spheric. Theod. bis eum orthogonaliter secabit.*

Prop. XI.

✠ Si in sphæra maior circulus obliquus ad axem definiat apparens sphæræ & latens: alius verò maior circulus parallelos maiores attingat, aut quos horizon semper apparentem semperque occultum rangit, per omnem horizontis periferiam parallelis, quos attingit, interpositam ortus & occasus facit.

Patet, quoniam omnia puncta talibus parallelis interiecta oriuntur & occidunt apud periferias horizontis iisdem interiacentes. Quare & tota talis circuli maioris periferia in idem facit.

Prop. XII.

✠ Si in sphæra manens circulus delatum aliquem circulum eorum, qui in sphæra, semper per æqualia secet: inter autem ipsorum ad re-

ctos fuerit angulos axi, neque per polos sphæræ: vterque ipsorum erit maior.

Nam si vterque sit circulus minor: manens non potest semper bifariam secare delatum, nisi manens ad rectos sit axi, si manens sit maior, ac delatus minor: non potest semper bifariam secare delatum, nisi existentem ad rectos axi, quod est contra hypothesim: Si manens sit minor, ac delatus maior: hoc esset contra 17. 1. spharic. Theod. superest ergo vt omnino sint ambo maiores.

THEODOSII DE HABITATIONIBVS

LIBER.

Propositio prima.

✠ SVB Septentrionali polo habitantibus hemisphærium quidem mundi vsquequaque idem apertum est vnum: alterum omnino idem occultum: nec astrorum aliquod ipsis occidit aut oritur: sed quæ in aperto sunt, prorsus sunt in conspectu: at quæ in occulto vsquequaque nusquam comparent. *Quæ prop. eadem fermè est cum 4. Autolyci.*

Prop. II.

✠ Sub æquinoctiali habitantibus omnia astra oriuntur & occidunt, & æquali tempore super horizontem attollentur, horizontique subuehentur. I*dem habetur in 5. Autolyci.*

Prop. III.

✠ Per omnem locum qui sub media zona tropicis parallelis interclusa, signifer quotidie rectus erigitur horizonti.

Nam circulus æquatoris parallelus per verticem loci ductus binis in locis secat Zodiacum. Quando igitur punctum sectionis alterutra ccunitur vertici, tunc zodiacus incedit per polos horizontis; & ideò per 20. 1. Theod. secat horizontem orthogonaliter: bis ergo fit hoc in vno ambitu. Habitantibus verò sub tropico semel, hoc est in puncto solstitij, in quo zodiacus tangit ipsum tropicum.

Prop. IV.

Quorum vertex à polo tantum abit, quantum tropicus distat ab Æquinoctiali: illis simul sex signa & occidunt, & oriuntur.

Hoc est illis, quorum vertex est in arctico, vel antarctico circulo. Nam cũ poli zodiaci ferantur in peripheriis talium circulorum, iam in vno semel polus

counitur vertici, hoc est polus zodiaci polo horizontis. Quare & zodiacus counitur horizonti, quæ counio fit instanti, & post illud in instans statim zodiacus dispescitur bifariam ab horizonte, & ideò in instanti semicirculus eius oritur, & reliquus semicirculus occidit.

Prop. V.

✠ Sub æquinoctiali habitantibus Meridianus bifariam secabit super horizontem signiferi semicirculum quando tactus tropicorum & signiferi fuerint in horizonte, & tunc signifer rectus erit ad horizontem.

Tunc enim horizon incedens iam per polos tropici, & puncta contactuum per 6.2 sphær. Theod. ibit, & per polos zodiaci: & ideò per 20.1. orthogonaliter eum secabit; & per 21.1. zodiacus vicissim ibit per polos horizontis, per quos & meridianus, vnde arcus tam meridiani, quam zodiaci ab horizonte ad horizontem recepti sunt quadrantes.

Prop. VI.

✠ Sub æquinoctiali habitantibus signiferi semicirculi omnes in tempore æquali oriuntur. Similiter etiam oppositæ periferiæ.

Ibi enim omnis semicirculus zodiaci oritur cum arcu diurno sui principij: omnes autem arcus diurni par. 2. huius, sunt semicirculi: constat igitur prima pars propositi. Reliqua verò, quoniam non solùm oppositæ zodiaci persferiæ, sed etiam ab æquinoctij pūcto æqualiter remotæ cum æqualibus æquinoctialis periferijs ascendunt.

Prop. VII.

✠ Habitantibus sub eodem parallelo stellę neque simul oriuntur, neque simul occidunt, sed quanto priùs oriuntur orientaliori loco, tantò priùs occidunt.

Nam talium locorum horizontes propter æquas polorum altitudines, tangunt eosdem æquatoris parallelos: quare per 18.2. sphær. Theod. arcus ex parallelo quolibet, semicirculi horizontum tam Orientalibus quàm Occidentalibus interiecti, sunt similes. Omnis igitur stella in loco Orientali per eundem arcum anticipat ortum, & inde occasum, & idcirco per idem temporis interuallum.

Prop. VIII.

✠ Sub eodem meridiano habitantibus stellæ quæcunque sunt inter maximum semper apparentium parallelorum & æquinoctialem diutius super horizontem feruntur illis, qui ad Septentrionem habitant, quàm illis qui ad Meridiem. Et quanto priùs oriuntur ad Septentrionem habitantibus, tanto posteriùs occidunt. Quę verò astra inter maximum semper occultorum, & æquinoctialem, diutiùs super horizontem apparent ad Meridiem habitantibus, quàm ad Septentrionē:

& quanto priùs oriuntur iis qui ad Meridiem, tanto posteriùs occidunt.

Nam eunti versus manifestum polum, arcus diurnus astri eodem versus ab æquatore declinantis crescit, & eunti versus occultum polum arcus diurnus astri eo declinantis etiam crescit. Collatis autem arcubus, vtrimque, hoc est ad ortum & ad occasum crescentibus, constat reliqua pars propositi.

Prop. IX.

✠ At si horizontes neque sub eodem parallelo, neque sub eodem Meridiano, sequetur tãtum arcuum super horizontem peractorum prædicto modo inęqualitas: non autem ortuum & occasuum anticipatio. *Constat sicut præmissa, propter magis, aut minus inclinatum horizontem.*

Prop. X.

✠ Sub polo vtrolibet habitantibus sol semestri tempore super horizontem iugiter fertur, & tandem sub horizonte.

Patet hoc per 1. huius: quoniam zodiaci semicirculus semper extat, & semicirculus semper delitescit: qui semestri fermè spatio à Sole peragitur. Neque hic motus differentia, quem Solis ingerit eccentricus, considieranda venit: supponitur enim Solis motus æqualis, vbi de arcubus primi motus agitur.

Prop. XI.

✠ A polo versus arcticum vel antarcticum procedentibus, hæc iugis mora Solis super horizontem, aut sub horizonte minor fiet semestri tempore, minorque, donec ad spatium 24. horarum sub arctico vel antarctico redigatur.

Nam horizon harum habitationum tangit duos æquatoris parallelos tropicis maiores, qui de zodiaco vtrimque duas peripherias æquales abscindunt. Et peripheria, quam parallelus semper apparens abscindit, nunquam occidit; ea verò quam semper occultus, nunquam oritur. In illa ergo quandiu Sol fuerit, nunquam occidet: in hac nunquam orietur. Vnde in illa tantus erit iugis dies: dies in hac tanta iugis nox, pro magnitudine scilicet peripheriæ, tot scilicet mensium, quot signa comprehenderit peripheria, & tot dierum naturalium, quot insuper gradus habuerit.

Prop. XII.

✠ Sub arctico vel antarctico habitantibus dies maxima fiet 24. horarum, & instans pro nocte. Contra nox maxima 24. horarum, & instans pro die. Cæteri arcus crescent & decrescent vsque ad æqualitatem æquinoctij.

Nam ibi habitantium horum tangit duos tropicos, quos & Zodiacus contingit

tingit. Quare Sol in tropico super horizontem extantem constitutus, peragit pro die integrum ambitum: & pro nocte punctum ipsum contactus. Contra Sol in tropico totaliter latenti positus circulum totum pro nocte describit, & pro die, solum contactus punctum, inde decrescunt vtrique arcus vsque ad medium æqualitatis.

Et quoniam per 23. 2. sphæric. Theod. coalterni arcus diurnus & nocturnus vtrinque ab æquatore sumpti sunt æquales, & perinde tam duo diurni, quàm duo nocturni coniugatè recepti circulum integrãt: propterea fit vt in omni horizonte totum tempus diurnum in anno collectum simul sit semestre, hoc est anni dimidium: & nocturnum similiter tantumdem, sed sub polo continuum: cæteris verò habitatoribus interpolatum. His autem Euclidis Phænomena in eorum gratiam subiungemus, qui seriò Geogrophiæ, & Astronomiæ operam dare voluerint: deinde breuissimum afferemus Cosmographiæ compendium, quod cœlos, & terram oculis velut in tabella subiiciet.

EVCLIDIS EX TRADITIONE
MAVROLYCI
Phænomena.

QVONIAM stellæ circumferuntur æquali semper à nobis remotione, propterea motum cœli circularem esse: easque per parallelos æquidistantes deferri. Et quoniam earum quædam perpetuò feruntur supra terram, quædam sub terra: quædam plus moræ trahunt super terram, quædam plus sub terra, & medio loco posita æqualiter. Hinc mundum non nisi sphæricæ figuræ esse: nec nisi circa axem, & æqualiter volui. Axem autem polorum vnum extare: alterum sub terra delitescere. Horizon autem circulus vocetur, qui definit spectatum hemisphærium. Meridianus, qui per sphæræ, horizontisque polos incedat. Æquinoctialis verò maximus inter parallelos communem cum sphæra axem habentes. Zodiacum, siue signiferum esse solis orbitam, à quo Æquinoctialis obliquè secatur. Tropici sunt duo paralleli æquales zodiacum tangentes. Ex quibus manifestum est, horizontem circulum esse maximum, quòd maximum quemque semper secet per medium.

PROPOSITIONES.

I.

TERRA *in medio mundo est, centrique fungitur officio.*

Quoniam ſcilicet eadem dioptra ſpectamus ſimul duo ſigna oppoſita, vnum oriens, alterum occidens: & rurſum alia duo ſigna oppoſita apud ortum & occaſum: fit vt linea viſualis in vtraque obſeruatione ſit diameter zodiaci, & firmamenti: terra igitur in ſectione talium diametrorum cum ſit, in centro zodiaci, & perinde mundi exiſtet.

II.

In vno ambitu, qui per polos ſphæra circulus, bis rectus erit ad horizontem.

Quia ſcilicet bis counitur in die cum meridiano, qui rectus eſt ad horizontem.

Zodiacus verò circulus ad meridianum bis erit rectus.

Quia ſcilicet plus zodiaci in parallelo arctico delatus bis in die ſiſtitur in meridiano.

Ad horizontem verò minimè rectus erit, quando polus horizontis fuerit extra tropicos.

Ibi enim zodiacus nunquam tranſit per polos horizontis, hoc eſt per verticem loci.

Si verò polus horizontis in tropico fuerit: zodiacus ſemel in die ad horizontem rectus erit.

Quando ſcilicet punctum ſolſtitiale zodiaci fuerit in polo horizontis, quod ſemel in die fit.

Quando demum polus horizontis inter tropicos fuerit: zodiacus circulus ad horizontem bis rectus erit.

Nam ibi parallelus æquatoris per polum horizontis incedens binis in punctis ſecat zodiacum: quæ puncta ſingula ſemel in die ſiſtentur in ipſo polo horizontis in dicto parallelo delata. Bis igitur in die zodiacus horizontem orthogonaliter ſecabit, per 20. 1. ſphæric. Theod.

III.

✠ *Aſtrorum non errantium ortus, occaſuſque officientium, vnumquodque apud eadem horizontis puncta oritur & occidit.*

Nam parallelus, in quo defertur aſtrum ſuper axem, in vno ſemper ſitu circunducitur, & in iiſdem ſemper punctis ſecat horizontem. *Additio 2. propoſitionum.*

IV.

✠ *Aſtra in circulo per polos mundi ducto exiſtentia ſimul oriuntur,*

& simul occidunt in horizonte recto.

Nam talis circulus bis in die counitur horizonti recto.

V.

Astra existentia in semicirculo orientali circuli tangentis maximum integrè apparentium parallelorum, quem tangit horizon obliquus, simul oriuntur in tali horizonte. Existentia verò in semicirculo reliquo, simul occidunt in eodem.

Sicut enim ille semicirculus semel in die counitur semicirculo orientali horizontis: ita hic occidentali. Vnde denominantur.

VI.

Astrorum in maximi circuli ambitu existentium, maximumque integrè apparentium non tangentis neque secantis, quæ priùs oriuntur, priùs occidunt: Et quæ priùs occidunt, priùs oriuntur.

Nam ex talibus astris occidentalibus priùs oritur, & priùs occidit. Ducto enim semicirculo orientali tangente maximum parallelorum integrè apparentium, per astrum occidentalius, relinquitur astrum reliquum ad orientem, similiter ducto semicirculo occidentali. Constat ergo propositum: cùm tales semicirculi repræsentent semicirculos horizontis.

VII.

✠ *Astrorum in maximi orbis ambitu, qui maximum integrè apparentium secat, existentium, quæ septentrioni propiùs, priùs oriuntur, posteriùs verò occidunt.*

Ductis enim per astrum à septentrione remotius circulis maioribus maximum integrè apparentium vtrinque tangentibus: relinquetur astrum reliquum in medio peripheriarum. Vnde palam fit ipsum astrũ reliquum priùs oriri, & priùs occidere. Sed Euclides loquitur respectu situs nostri. Nam apud nostros Antœcos, idem dicendum de astro, quod illi polo propinquus est.

VIII.

✠ *In Zodiaco, siue æquinoctiali, siue quouis alio maiori circulo astra ex diametro posita coniugatè oriuntur, & occidunt.*

Nam quæuis diameter cuiuslibet maioris circuli est, & mundi diameter: cuius extremorum altero ex oriente, reliquum occidit. Et è contrario.

X.

✠ *Zodiacus circulus per omnem horizontis locum inter circulos tropicos oritur, quando maximus integrè apparentium non minor fuerit circulo tropico.*

Hoc est in illo horizonte, cuius vertex est in circulo arctico, vel in-

ter ipſum & polum, ortus zodiaci fit per totum ſemicirculum horizontis orientalem: occaſus per totum ſemicirculum horizontis occidentalem: quandoquidem totus horizon iacet inter tropicos.

X.

✠ *Signa non apud æqualia horizontis ſegmenta oriuntur, & occidunt: in maximis enim quæ ad æquinoctialem: in minoribus autem quæ hac ſequũtur: in minimis verò quæ ad tropicos: apud æqualia porro, quæ ab æquinoctiali circuli æqualiter diſtant.*

Ductis enim per limites ſignorum zodiaci parallelis hinc inde ab æquinoctiali: peripheriæ horizontis interceptæ tam ad ortum quàm ad occaſum, ab æquinoctiali verſus tropicos ordinatæ ſucceſſiuè decreſcunt, vt infert propoſitio. Omnis enim arcus zodiaci apud peripherias horizontis ſuis parallelis interceptas oritur, & occidit. Hoc autem oſtendit Theodoſius in 3. 5. 7. & 9. prop. libri 3. ſphæric. & Menel. in 46. ſecundi. Quod intelligitur tam in horizonte recto quàm in obliquo; quamuis in obliquo periphæriæ dictæ horizontis ſint maiores.

XI.

✠ *Zodiaci ſemicirculos non ab eodem parallelo exorſos, neque æquali tempore totos exoriri, ſed in plurimo, qui cum cancro, eoque minori, quo inde remotius exordium ſumpſerint: in minimo tandem, qui cum capricorno. Quicumque autem in eodem parallelo initium habuerint, æquis temporum interuallis exortum facere.*

Conſtat hæc prop. apertiſſimè ſi conferantur arcus diurni ſemicirculorum zodiaci principiis debiti. Cum talibus enim arcubus oriuntur ipſi ſemicirculi. Et pro occaſu ſemicirculorum conferantur arcus nocturni, qui ſemicirculorum initiis reſpondent: quamuis de occaſu author non faciat mentionem. Sed vltra æquinoctialem pro ſignis in proportione expreſſis ſume ſigna oppoſita. Author autem reſpexit ad ſitum noſtrum.

XII

✠ *Si in Zodiaco bini ſemicirculi communem quandam circumferentiam habentes diuerſo tempore oriantur: relicti arcus diuerſo etiam tempore orientur, & in eodem exceſſu. Si autem in Zodiaco bini ſemicirculi communem arcum habentes æquis temporibus æquis oriantur, relicta quoque peripheriæ temporibus æquis orientur.*

Nam ſubtracto arcu communi, ſubtrahitur etiam commune tempus: & ideo relicta tempora erunt aut in eodem exceſſu inæqualia, in quo ſcilicet tempora ſemicirculorum ſunt: aut æqualia, ſi tempo-

ra semicirculorum fuerint æqualia.

XIII.

✠ *Zodiaci æqualium & ex opposito circumferentiarum in quo tempore altera oritur, reliqua occidit. Et in quo altera occidit, reliqua oritur.*

Nam, per octauam huius, talium arcuum limites exeūtes ex diametro, coniugatè oriuntur, & occidunt; hoc est, vno oriente, alter occidit, & è contrario. Et ideo quo tempore oritur interceptorum arcuum vnus: reliquus occidit; & è contrario. His autem rursus tres propositiones adduntur.

XIV.

✠ *Similium horizontum semicirculi similes, parallelorum peripherias includunt: Et ideo quodlibet astrum ad horizontem ex iis orientalem per vnum temporis interuallum anticipat tam ortum, quàm occasum, ac cæli mediationem.*

Similes horizontes sunt, qui aut recti sunt aut eiusdem latitudinis. Qui autem eiusdem latitudinis sunt, tangunt eosdem parallelos, quorum alter maximus integrè apparentium est, alter maximus integrè occultorum. Hęc ergo propositio quoad rectos horizontes, ostenditur in 14. l. 2. Theod. quoad autem obliquos, in 8. eiusdem. Vt si inter duos horizontum siue rectorum, siue vnius latitudinis obliquorum semicirculos orientales intersit arcus æquatoris 30. graduum: iam inter eosdem ex quolibet parallelo totidem gradus intercipientur. Et perinde omne astrum magis orientale per duas horas præuertet tam ortum quàm occasum, quàm & cœli mediationem. Quare constat apertè corollarium.

XV.

Similium horizontum semicirculi orientales vnà cum zodiaci peripherijs intercipiunt æquatoris arcus coorientes, occidentales autem coocidentes ad quemlibet talium horizontum.

Manente enim fixo horizontum talium vno, sphæra reuoluta, cæterorum similium horizontum semicirculi coniunguntur ei: & proinde zodiaci peripheriæ ante motum interceptæ cooriuntur, aut coocidunt cum arcubus æquatoris simul interceptis.

XVI.

Peripheriæ zodiaci æquales ad rectum horizontem non æquis temporibus oriuntur, neque occidunt: sed in maximo, quæ sunt ad tropicorum contactus: in minori autem, quæ has subsequuntur: in minimis verò; quæ ad æquinoctialem: æqualibus porrò, quæ ab æquinoctij puncto æqualiter distant.

Exempli gratia, sumantur in zodiaco 3. signa ♈, ♉, & ♊, Aio quod

ex his in sphæra recta ♓ in maximo; ♉ in minori; ♈ in minimo tam oritur, quàm occidit tempore. Ducantur enim à polo mundi tres semicirculi horizontum rectorum per limites talium signorum: iam tales semicirculi, abscindent de æquinoctiali arcus inæquales: quorum maximus erit, qui remotissimus à sectione zodiaci, & æquinoctialis, scilicet qui cum ♓ intercipitur: minor, qui cum ♉ minimus, qui cum ♈, per 4, & 8. tertij sphæric. Theod. & 46. secundi Menel. Sed per præcedentem, tales æquatoris arcus cooriuntur, siue cooccidunt cum signis ipsis interceptis. Igitur ex his ♓ in maximo: ♉ in minori: ♈ in minimo oritur, & occidit tempore. Quod autem æquè ab æquinoctio remota signa æquis temporibus oriuntur, atque occidunt, constat, quoniam cum æquis arcubus æquatoris oriuntur, & occidunt, & id propter æquilatera inuicem sphæralia triangula, per 23. primi sphæric. Menel.

Corollarium. Hinc manifestum est quod in sphæra recta 4. signa ♓, ♋, ♐, & ♑ in maximis: 4. autem ♉, ♌, ♏, & ♒ in minoribus: 4. demum ♓, ♈, ♏, &, ♎, in minimis, & inuicem æqualibus oriuntur, & occidunt temporibus.

XVII.

✠ *Semicirculi zodiaci, qui cum 69 æquales circumferentia non æquis temporibus occidunt, sed in maxima, quæ sunt ad tropicorum contactus: in minori autem quæ ad æquinoctialem: æqualibus porrò quæ has subsequuntur: in minimis verò quæ ad æquinoctialem: æqualibus porro quæ ab æquinoctij puncto æqualiter distant, oriuntur, & occidunt.*

Per limites trium signorum ♋, ♌, & ♏ ducantur tres semicirculi horizontum obliquorum eiusdem latitudinis occidentales, & perinde tangentes eundem æquatoris parallem. Nam tales semicirculi abscindent ex æquatore arcus inæquales, quorum maximus erit, qui remotissimus à sectione æquinoctij, scilicet qui cum ♋ intercipitur: minor, qui cum ♌: minimus, qui cum ♏, per 6, & 10 tertij sphæric. Theod. & 46 sec. Menel. sed per ante præmissam, talia signa cooccidunt cum arcubus æquatoris interceptis; igitur ex his ♋ in maximo: ♌ in minori; ♏ in minimo tempore occidit. Quod autem signa æqualiter ab æquinoctio remota æquis temporibus oriuntur, & occidunt, constat per 25 primi sphæric. Menel. propter æquilatera inuicem sphæralia trianguli. Verùm in horizontibus vltra æquatorem pro ♋, ♌, & ♏, substitue ♑, ♒, & ♓.

Coroll. Hinc patet quod in horizonte nostro obliquo, duo signa ♋, & ♐ in minimis: ♌, & ♏ in minoribus: ♍, & ♎, in minimis, &

inuicem æqualibus occidunt temporibus.

XVIII.

✠ Semicirculi Zodiaci, qui cum ♑, æquales peripheriæ: nequaquam æquis oriuntur temporibus. In maximo quidem, quæ ad tropicorum contactus: in minori autem, quæ has subsequuntur: in minimis verò, quæ ad æquinoctialem: æqualibus porrò, quæ ab æquinoctij puncto æqualiter distant, oriuntur, & occidunt.

Ostensum est in præcedenti, ♋ in maximo, in minori ♌ in minimo ♍ occidere. Igitur per 23 præcedentem, his oppositа signa, scilicet ♑, in maximo: ♒, in minori: ♓ in minimo orientur; quod est propositum. Vnde & æqualitas ortuum in signis æquè ab æquinoctio remotis sequetur. Sed in regionibus vltra æquatorem, quoniam mutatur polus manifestus, immutanda sunt, & signa.

Coroll. Constabit igitur hic similiter, quod in his obliquis horizontibus ♑, & ♓ in maximis: ♒, & ♉ in minoribus: ♓, & ♈ in minimis, & inuicem æqualibus oriuntur temporibus.

MONITVM.

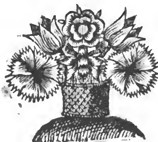
QVI seriò Trigonometriæ suam operam dare voluerit, adeat Gellibrandi Britannicam Trigonometriam, cuius fundamentum consistit in triangulorum planorum similitudine, ad quam duntaxat requiritur æqualitas angulorum, vel proportio crurum. quæ cùm numeris exprimi debeant, tam peripheriæ circulares, quibus angulos metimur, quàm rectæ circulis adscriptæ in certas partes diuidendæ sunt, quæ numeris exprimantur.

Quapropter peripheriæ in 360 gradus diuisæ gradum quemlibet primum in 100 partes, Vietam imitatus pag. 29. Calendarij, partitur, deinde quamlibet partem centesimam, ad calculi facilitatem diidit. Radium verò facit vnius partis vel 1000,000,000,000,000; & in ijsdem partibus rectas circulo adscriptas, putà sinus arcuum, & tangentes, atque secantes diuidit, de quibus fusissimè dictum est vtili Præfatione ad Theodosij sphærica.

Cùm autem Gellibrandus, post Neperum & Briggium, per Logarithmos progediatur, quos ferè omnes iudicant longè faciliores reliquis sinuum & tangentium canonibus antea vsurpatis, hic autor præ reliquis legatur, atque teratur, quippe satisfacit abundè, tum

pro planis triangulis in 2. Britannicæ Trigonometriæ; tum pro ſphæricis in 2. artificialis trigonometriæ libris.

Vt autem ea quæ dicta ſunt hactenus de ſphæricis, ad coſmographiam breuiſſimè contrahamus, peculiarem tractatum, quem vocare poſſis Coſmographiam Aſtronomicam, quòd ex æquo vtrique conueniat, Autolici, Theodoſij, & Euclidis Phænomenis, veluti Corollarium ſubiungemus, ex quibus valeant intelligi, quæ in illo tractatu quiſpiam deſiderare poſſet.



COSMO-

COSMOGRAPHIA ASTRONOMICA.

AD REVERENDVM P. FRANCISCVM LANOVIVM.

F. M. MERSENNVS S. P.



VM à pluribus annis, R. P. non solùm Patres Græcos & Latinos, sed alios prætcrea libros plus minus I C C X L euolueris, & euisceraueris, nouosque, vi quâ polles ingenij propemodum infinitâ, in lucem edendos tanto numero scripseris, vt etiam æquare possint numerum illum Platonicum, vel illius ad minimum partes aliquotas ad calcem Præfationis ad Hydraulica relatas. Iter illud, ad quod accingeris, vt Te Summi Pontificis iussu, Collegam admodum Reuerendi Patris Laurentij à Spezzano, Ordinis nostri Dignissimi Generalis exhibeas, non debet fructus illos vberrimos sufflaminare, quos viri Docti à te propediem expectant: quosque, nullus dubito, quin superiores abs te vel precibus, vel iussu, statim atque rescierint tuorum operum inscriptionem, pulchritudinem, & vtilitatem, extorqueant.

Quid enim vtilius, aut pulchrius singulis totius Religionis Christianæ Formulis, & Ritibus, hucusque à Christo Domino, quaquà patet, vsurpatis? Quodnam Calendarium cum Anno tuo Eucharistico conferendum? Quid tuæ Patriæ Annales, quid Theologum, quid Angelica, quid omnia elegantissimo stylo à te parata, commemorem, quibus totam Ecclesiam XXX sequentibus annis illustratam iri confido.

Gaudeat igitur minimus noster orbiculus, qui Tuorum operum splendore, sapiētibusq; consilijs illuminatus maximas gratias, Diuino

primùm numini, deinde Summo Pontifici habere debeat, quorum prouidentiâ Generalem & Collegas accepit, qui non solùm parta tueantur, verùm etiam illius terminos promoueant.

Dum igitur, R. P. thesauros illos amplissimos abs Te collectos expectamus in literatorum, & Ecclesiæ Catholicæ vsum effundendos, hoc accipias Astronomicæ Cosmographicæ opusculum quod in amicitiæ nostræ antiquæ, & sinceræ testimonium, Tuo nomine inscriptum volui; quippe refert œconomiam, quâ in ipso itinere, siue terrestri, siue maritimo, recrees animum, & opera Dei circumspiciens maiore semper diuini amoris flammâ succendaris.

PRÆFATIO AD LECTOREM.

NIL interest, Beneuole, si mentem Ptolemaicorum, vel Tychonicorum sequaris; siue Philolai, Aristarchi (de quo in Plamnite) & aliorum Pythagoræorum anteponas sententiam: lectione sequentium propositionum veritatem assequêris. Vt verò supremum istius autorem scientiæ magis magisque suspicias, atque venereris, mecum, obsecro, pernicitatem siderum contemplare, quæ tanta est vt stella quælibet iuxta Æquinoctialem sita, minuto horario, motu raptus seu diurno, 15′ percurrat, quæ in octauo cœlo leucis 70000, in terra verò 5 leucis respondent: suppono namque firmamenti ambitū 10080000 leucarum; diametrūque 32072727, quarum vnaquæque sit 3000 passuum, & passus 5 pedum Regiorum. Eædem stellæ durante 1″ temporis, faciunt leucas in firmamento 1166 $\frac{2}{3}$, in terra 250 passus.

At verò si de proprio stellarum motu loquamur, qui 28800 annorum spatio perficitur, conficiunt gradum spatio 80 annorum, qui respondet 280000 leucis firmamenti, 20 verò terræ leucis. Spatio mensium 16, minutum, leucis 4666 $\frac{2}{3}$ firmamenti, terræ $\frac{1}{3}$ leucæ, seu 1000 passibus respondens. Octo verò diebus, horis, 48′, seu 11688′, quot sunt dies in 32 annis, 1″ conficiunt, quod in firmamento constat leucis 77 $\frac{7}{9}$; in terra verò passibus 16 $\frac{2}{3}$. Spatio 3 horarum, 14′, 48″, faciunt 3‴, quod in firmamento constat vnâ leucâ, 888 passibus, pedibus 4, 5 digitis, & 4 lineis: in terra verò digitis 16 $\frac{2}{3}$, seu 200 lineis. Spatio 3′, 14′, & 48′, conficiunt 1′, quod firmamenti passibus 64, pedibus 4, lineis 10 $\frac{1}{3}$ 10 $\frac{1}{3}$, terræ verò lineis 3 $\frac{1}{3}$ respondet. Spatio annuo 45′ faciunt, hoc est 3500 leucas firmamenti; terræ verò $\frac{1}{4}$ leucæ.

Spatio diei conficiunt 7 $\frac{[illegible]}{487}$, id est firmamenti leucas 9, passus 1747, pedes 2 $\frac{[illegible]}{487}$: terræ verò passus 2 $\frac{26}{487}$.

Spatio horæ faciunt 18', & 28', 49, 46', 26', 51, 27''' $\frac{[illegible]}{487}$, hoc est passus firmamenti 1197. pedes 4, lineas 7; & terræ digitos 5 $\frac{[illegible]}{[illegible]}$.

Spatio 1', conficiunt in firmamento passus 20, digitos 2, lineas 3 $\frac{17}{60}$; in terra verò lineam 1 $\frac{13}{487}$.

Spatio 1'', in cœlo faciunt pedem 1, digitos 7, lineas 11 $\frac{[illegible]}{3000}$: in terra autem lineæ $\frac{[illegible]}{[illegible]}$: vbi nota denominatorem esse 4 annorum diebus æqualem.

Denique spatio 1''' faciunt in cœlo lineas 4 $\frac{1}{120}$ si ludere volueris in proportionibus terræ, & firmamenti, scias ambitum terræ esse 7200 leucarum: eius diametrum 2290 $\frac{10}{11}$: maximum illius circulum 4123636 $\frac{4}{11}$. totam superficiem 16494545 $\frac{5}{11}$. Conum, cuius altitudo, terræ radius; basis autem maximus terræ circulus, leucarum cubicarum 1574479338 $\frac{[illegible]}{121}$. terræ verò soliditatem, 6297917273555 $\frac{[illegible]}{[illegible]}$. eiusdemmodi leucarum Gallicarum, 2500 constantium hexapedis. Quemadmodum enim maximus circulus est quarta pars totius superficiei, ita conus ille totius est soliditatis quadrans.

Cùm autem satis constet ex nostris tractatibus, me leucam Gallicam 15000 pedibus Regijs: pedem 144 lineis, lineam 10 minutioris arenæ granis definire, facilius fuerit multitudinem similium arenarum, quibus conflanda sit tota non solùm orbis nostri, sed etiam totius mundi soliditas, quaqua nobis patet, calculis subducere, quàm vt tuum animum grauioribus intentum, diuiùs ab his propositionibus percurrendis distrahere velim. Quibus si sphærica præcedentia coniunxeris, ausim Tibi subtiliorem totius Cosmographiæ, & Astronomiæ cognitionem polliceri.

Propositio prima.

Circulus æquinoctialis cælestem & terrenum globum in duas partes æquales diuidens distinguitur in 360. gradus, vt æquiliber alius circulus tam maior quàm minor, ob facilitatem diuisionis huiusce numeri, quippe qui habet partem mediam, tertiam, quartam, quintam, sextam, octauam, &c. cuius sexta pars est 60, qui plurimas etiam diuisiones absque fractionibus paritur: hæc autem sexta pars à circulo, seu radio describente circulum, generatur, quæ rursus in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum in 60 secunda, & sic in infinitum, vel pro libito deinceps diuiditur.

II.

Quodlibet gradus æquinoctialis, continet 20 leucas, quarum quælibet 3000 passuum est, passus autem 5 pedes regios habet: pes regius in lineas diuiditur; linea verò continet 10. grana arenæ minutissimæ: igitur circulus æquinoctialis in terra 7200. leucas complectitur in cœlo solis apogæi totidem leucas 1181, perigæi 1101. in firmamento verò totidem 14000, id est 100800000 leucas: igitur vni gradui solari apogæo respondebunt leucæ 12620, quæ nascuntur ex 20. ductis in 1181. Hinc deduces quot leucas contineat gradus firmamenti; & cui parti cœli solaris, vel firmamenti leuca vna terrestris respondeat: reliquas mensuras, nempe milliare Helueticum, seu Germanicum maius 5 milliarum: milliare 8 stadiorum: stadium 125. passuum: passum 5 pedum; pedem 4 palmorum: palmum 4 digitorum: digitum 4 granorum hordei lateraliter dispositorum, vt potè iam apud nos inusitatas non moror.

III.

Cum cuiuslibet gradui æquinoctialis terrestris 15. milliaria Germanica respondeant, ambitus terrenus erit 5400 milliariorum Germanicorum; & cùm circumferentia se habeat ad diametrum vt 22 ad 7. diameter terræ erit milliarium 1718 $\frac{2}{11}$, & semidiameter 859 $\frac{1}{11}$: sumamus facilitatis ergo 860, dimidia circumferentia 2700 multiplicata per 860 dabit aream æquinoctialis milliariorum 2322000, qui per 4 multiplicati, dabunt totam superficiem terrenam milliariorum 9288000: Denique si illa area ducatur in semidiametrum, efficiet cylindrum semidiametro sphæræ æquè altum, milliariorũ 1996920000: cuius tertia pars 665640000 quater collecta totius terræ soliditatem milliarior. Germanicor. 2662560000 tribuet: hinc facilè reperietur terræ soliditas in nostris leucis.

IV.

Longitudo terræ sumitur ab insulis Fortunatis, vel Canariæ, numeraturque in æquinoctiali, vel circulo ei parallelo inter fixum meridianum occidentalem Fortunatum, & meridianum verticalem cuiusque loci intercepto: itaque meridiani distinguunt; æquinoctialis autem, & ei paralleli mensurant longitudinem.

V.

Æquinoctialis seu ἰσημερινὸς noctem diei æqualem efficit, cum sol in eo versatur, diuiditque sphæram in partem septentrionalem; & meridionalem: cuius poli, sunt poli mundi, huius autem 15 gradus ex vna parte oriuntur, & ex alia occidunt singulis horis: igitur & gradus vnus

oritur quibusque minutis horæ, & quarta pars gradus, seu $\frac{1}{4}$ vnoquoque horæ minuto: ideoque æquinoctialis mensura primi mobilis dicitur.

VI.

Æquinoctialis ostendit puncta æquinoctiorum, quæ bis in anno contingunt: diuidit Zodiacum in duas medietates, australem, & septentrionalem: hinc signa australia, & septentrionalia: est mensura temporis & ostendit quam habeant declinationē septr. aut meridion. stellæ, vel eclipticæ partes. insuper & in hoc circulo ascensiones, & descensiones signorum zodiaci obseruantur.

VII.

Linea perpendicularis lineæ meridianæ, repræsentat æquatorem, & contra: quæ tamen absque linea meridiana describetur, si linea recta ducatur per puncta apicis vmbræ à stylo, die æquinoctij verni, vel autumnalis productę. Data autem poli altitudine datur æquinoctialis altitudo, quippe quæ est complementum quadrantis circuli; exempli gratia altitudo poli Lutetiæ est 48. graduum, 45: igitur æquinoctialis, ac proinde solis in primo gradu ♈, vel ♎ altitudo est 41 graduum, 15'. Et contra, data æquinoctij altitudine datur altitudo; sed & totius cœli, & terræ status ex vnius ex istis circulis data eleuatione sciri potest, dummodo longitudo loci cognita sit.

VIII.

Æquator in sphæra recta trāsit per verticem, seu polum horizontis: in parallela, horizonti coincidit, estque ipse horizon: in obliquis autem sphæris facit angulos acutos cum horizonte, quos faciebat rectos in recta, in qua omnia cœli puncta quotidie oriuntur, & occidūt, exceptis tamen mundi polis: propterea huius sphæræ incolis perpetuum est æquinoctium, duplex æstas, duplex hyems; & 4 vmbræ, nempe orientalis, & occidentalis, septentrionalis, & australis: hinc *Amphiscij*, seu *Amphiumbræ* dicuntur: quod etiam obliquæ sphæræ contingit, cuius vertex est inter æquatorem, & tropicorum alterum.

IX.

In sphæra obliqua, cuius vertex est in vno tropicorum, æquator $66\frac{1}{2}$ ac proinde polus $13\frac{1}{2}$ gradus eleuatur; & circuli polares constituunt semper apparentium, semperque latentium maximum circulum: huius incolæ vnicam æstatem, & hyemem habent, & vmbra septentrionali carent: hinc *Heteroscij*, seu *alteriumbræ* vocantur: hæ autem 3 sphæræ, nempe recta, & duæ posteriores obliquæ, sunt in *zona*.

torrida, quæ vtroque tropico terminatur, & quam æquatorper medium secundùm longitudinem, sicut ecliptica zodiacum, secat.

X.

Æquator, & polus æquales habent 45 graduum altitudines in sphæra obliqua, cuius vertex est medius inter tropicum, & polarem circulum: hinc tantus est calor æstatis, quantum est frigus hyemis: calor eo maior est, quo altior fuerit æquator; frigus intensius, quo polus sublimior. In sphæra verò obliqua, cuius vertex est in circulo polari, æquator 23 $\frac{1}{2}$, polus 66 $\frac{1}{2}$ gradibus eleuatur: dies autem maximus est 24 horarum: quo Zona temperata finitur versus polum, sicut tropico, versus æquatorem.

XI.

Zona frigida incipit à circulo polari, in qua noctes, diésque maximæ eò fiunt maiores, quò vertex incolarum magis ad polum accedit, donec sphæra parallela fiat, in qua Septentrionales eo priuilegio gaudent, quòd dies eorum maxima sit 7, & ampliùs diebus longior quàm maxima dies australium; quòd illos sol in signis septentrionalibus existens illuminet, in quibus tardiùs incedit ob locum apogæi in ♋ positi. Quibus si crepusculum addamus, (quod fit à sole sub horizontem 18 gradibus depresso) nec non refractiones, dies artificialis 9 mensium, & 12 dierum apud sphæræ parallelæ incolas esse poterit, cùm 21 gradus ♍, & 9 ♒, grad. 18 ab æquatore declinent. Nox verò è contrario, 7 diebus longior est apud Australes, quàm apud septentrionales. Hi autem *Periscij*, hoc est, *circumumbræ* vocantur, quia vmbræ quaquauersum in gyrum, ob solem circa horizontem æquidistanter gyrantem, proijciuntur. Vide, num ista sphæra sit omnium ignobilissima, recta verò omnium nobilissima: & seriò contemplare, cur Deus sphæram terrestrem ita cælesti iunxerit, vt in sphæra, cuius vertex est intra polarem circulum, & polum, signa circa vernum æquinoctium sita præposterè oriantur, id est ♉ ante ♈, & ♈ ante ♓: & signa circa æquinoctium autumnale posita præposterè occidant, nempe ♐ ante ♏, & ♏ ante ♎.

XII.

Zodiacus, seu Σημειοφόρος, in punctis oppositis æquatorem ad angulos obliquos intersecat: cuius latitudo est 12, vel 16 graduum; medium autem istius circuli obtinet Ecliptica, sic dicta, quod luna solem obscuret, cùm sub ea directè ista duo luminaria coniunguntur; cùm autem sub eadem ecliptica è diametro opponuntur, sol lunam nobis occultat, & ita fiunt eclypses.

XIII.

Ecliptica secundùm latitudinem indiuisibilis, æquatorem intersecando, tropicum æstiuum Capricorni, & hybernum Cancri statuit: ob quem signa illa descendentia dicuntur, quæ à ♋ ad ♑, ascendentia verò quæ à ♑, ad ♋ continentur: quia sol descendit in illis, & ascēdit in istis. Præterea duo puncta æquinocti alia notat in æquatore.

XIV.

Aliæ sunt signorum diuisiones, iuxta varias intersectiones, & relationes circulorum inter se: vt ex intersectione colurorum, & zodiaci, ♈, ♉, ♊ dicuntur *vernalia*, quia cùm sol versatur in illis, Martem, Aprilem, & Maium efficit: ♋, ♌, ♍, *æstiua*, & sic de reliquis, iuxta 4 anni tempestates. Quæ autem contingunt intersectiones, vt ♈, ♋, &c. dicuntur *cardinalia*: sequentia verò, *fixa*; reliqua sunt *communia*. Omitto reliquas diuisiones, vt trigonorum ignei, aërei, & terrei, & dodecatemoriorum, in quæ totum cælum diuidi concipitur, penes 12. partes zodiaci.

XV.

Duodecim signa naturalia, in quæ Zodiacus diuiditur, incipiunt à communi sectione æquatoris, coluri æquinoctiorum, & eclipticæ, procedendo versus orientem; quorum primum est ♈, ver incipiens, deinde ♉, &c. quem ordinem appellant successionem, & consequentiam signorum; contrarium verò ordinem, præcedentiam. Zodiacus verò, & ecliptica motus secundos planetarum, vt æquator, motum primum, mensurat: Deinde numeratur siderum longitudo in ecliptica ab ♈ initio, secundùm sequelam signorum, vsque ad circulum maximum per polos eclipticæ, stellæ locum transeuntis; sicut longitudo terrestris in æquatore à primo meridiano occidentali vsque ad meridianum transcuntem per locum propositum.

XVI.

Ab ecliptica vsque ad polum numerantur siderum latitudines: est autem latitudo hæc, arcus circuli maximi per polos eclipticæ, & stellam incedentis inter eclipt. & stellam interiectus. Tales autem arcus, circuli latitudinem appellantur. Puncta verò inter æquatorem & eclipt. existentia, respectu æquatoris sunt borealia, & respectu eclipticæ, australia, vel contra.

XVII.

Ecliptica continet omnium siderum loca: nam stella est in eo gradu eclipticæ, per quem circulus latitudinis eiusdem stellæ incedit: sic enim stellæ existentes in coluro solstitiorum, sunt in primo gradu ♋ vel ♑. Qua ratione omnes stellæ firmamenti ad visum ex 12 zodiaci

signis referuntur. Omitto circulos quos eclipticæ parallelos eodem modo statuere possemus, quo Astronomi 182 æquatori parallelos imaginantur, per quos sol toto anno incedit, quorum extremi sunt 2 tropici, medius verò æquator.

XVIII.

Coluri per polos mundi, & 4 puncta cardinalia zodiaci transeuntes sese mutuò ad angulos rectos sphærales in ipsis polis intersecant, & vnà cum sphæra voluuntur: ita vocati, quia mutili videntur in obliqua sphæra, cùm vna pars semper infra horizontem deprimatur, alia verò supra eleuetur: horum vnus dicitur æquinoctiorum, qui per pũcta intersectionis æquatoris, & eclipticæ transiens duo puncta æquinoctialia, nempe ♈ & ♎ statuit: alter verò solstitiorum, quia æquatorem in illis punctis ad angulos rectos diuidit, in quibus sol æstatem & hyemem incipit, nempe in primo gradu ♋, & ♑: qui propterea colurus maximas solis declinationes metitur, zodiaci polos continens, eorum à polis mundi distantiam ostendit: Infiniti verò coluri ad singulas siderum ab æquatore declinationes ostendendas statui possunt.

XIX.

Meridianus, seu μεσημβρινὸς, in quocumque situ sphæræ meridiem, & mediam noctem efficit, continétque duo puncta Zenith, & Nadir sibi inuicem opposita: primus autem meridianus vulgò statuitur in insulis Fortunatis, ab alijs in insula *ferri*: sunt autem 36, vel potius 18 meridiani, cum iidem meridiani vnius hemisphærij alteri etiam hemisphærio seruiant: singuli quippe 10 inter se distant gradibus: quanquam geometricè loquendo, tot sint meridiani, quot puncta verticalia, quemadmodum tot horizontes, quot sunt diuersa puncta terræ: qui vnicuique gradui meridianum assignant, 180 statuunt.

XX.

Idem est meridianus progredientibus rectà à septentrione in meridiem secundùm latitudinem: solis autem, & stellarum maximam altitudinem, earum ab æquatore distantiam poli altitudinem, & totius terræ habitudinem ostendit: atque latitudinem terrenorum locorum metitur, de qua nunc agendum est.

XXI.

Latitudo numeratur in meridiano, ab æquatore versus alterum polorum & ostendit quanto punctum quodlibet ab æquatore distet; alter polorum mundi eleuetur, & alter deprimatur: est autem latitudo cuiuscumque loci, seu arcus meridiani interceptus inter Zenith, & æquatorem, æqualis eleuationi poli supra horizontem: hæc autem eleuatio

eleuatio est arcus meridiani ab horizonte ad polum mundi ductus.

XXII.

Quemadmodum latitudo terræ numeratur in meridiano insularum Fortunatarum, vel in alio orientaliori, ita declinatio siderum in iisdem meridianis numerari potest; qui tamen propterea *circuli declinationum* appellantur, quia ostendunt quantum stellæ, vel planetæ distent ab æquatore, & ab eo versus polum declinent. Possunt etiã *verticales* appellari, quatenus per verticem cuiusque loci transeuntes, perque horizontis singula puncta perpendiculariter descendentes, siderum altitudinem supra horizontem, aut depressionem infra metiuntur: Arabicè verò *Azimuth* in astrolabiis vocari solent, quòd ostendant in qua parte mundi sidus oriatur, aut occidat.

XXIII.

Meridianus incipit diem astronomicum; potest autem punctum meridianum diuersis modis reperiri, vt arborum abscissione, quarum trunci ostendunt circulos densiores, seu sibi viciniores esse ex parte septẽtrionis; acu in aqua, suberis auxilio, natante; ferro in aëre liberè suspenso, acu magnetica, dũmodo illius declinatio cognoscatur: quadrante astronomico, breuissimâ diei vmbrâ à stilo proiectâ. Possumus etiam inuestigare quot gradibus sol eleuetur supra horizontem, siue sit in meridie, siue extra meridiem; eius enim altitudinem dabit triãgulus, cuius latus vnum sit vmbra stili, aliud linea stilo æqualis, vmbræ per pedem stili perpendiculariter acta; tertium verò latus coniũget duo prædicta latera: linea enim æqualis stilo, vel arcus ei respondens repræsentabit arcum verticalem, quo solis altitudo mensuratur.

XXIV.

Horizon astronomicus, seu verus diuidit totam mundi sphæram in duas partes æquales, nempe in hemisphærium superum, seu visum, & inferum, seu occultum, cuius centrum idem est cum centro mundi, poli verò Zenith, & Nadir incolæ: Horizon physicus, seu sensibilis, & visualis, astronomico æquidistans est pars terræ quam oculis detegimus: cuius semidiameter in planitie est leucæ circiter, cũ oculus 6 pedes altus est; qui si ad leucæ altitudinem eleuetur, semidiameter horizontis sensibilis erit 51 leucarum, vt l. 3. de Veritate scientiarum, c. 2. demonstratum est.

XXV.

Quilibet horizon vnicum habet incolam; in quo stantia ei ita perpendicularia esse debent, vt linea directionis transeat per duos polos, & centrum horizontis, & per puncta grauitatis stantium siue turriũ, siue arborum, siue hominum: sed de linea directionis, & de his cen-

tris, in Mechanicis agendum erit.

XXVI.

Horizon ad omnes prædictas sphæras, nempe rectam, obliquam, & parallelam statuendam cõcurrit: vnde rectus, obliquus, & parallelus appellatur: ortus & occasus siderum limbo suo determinat: latitudines ortiuas, & occiduas ab ortu, & occasu æquinoctiali incipientes ostendit, quantitatem diei, & noctis, quarum est terminus, & 4 pũcta, nempe ortum, occasum, septentrionem, & meridiem, nec non quãtitatem duorum circulorum æquatori, ac tropicis parallelorum, ex polis mundi vsque ad horizontem descriptorum, quorum descriptus ex polo conspicuo, dicitur maximus apparentiũ, alter verò maximus occultorum determinat. *Ex quibus alia possunt intelligi quæ de horizonte dici solent.*

XXVII.

Circuli horizonti paralleli, qui altitudines, & depressiones siderum ostendunt, in Astrolabio vocantur *Almicantarath*, vel circuli progressionum, inter quos circulus crepusculi numeratur, qui parallelus est horizonti, & infra eum 18 gradibus deprimitur. *Hactenus de circulis maioribus; sphæræ mundanæ: sequuntur minores.*

XXVIII.

Tropici sunt circuli minores æquatori paralleli, à quo nunc 23½ gradibus distant; sed hæc distantia diuersis sæculis diuersa est; quæ tamẽ variatio 24′ hactenus notata fuit: duo verò tropici ostendunt maximam solis & eclipticæ declinationem ab æquatore; tropicus ♋ septẽtrionalem: & tropicus ♑ australem: ille etiam maximam, hic minimã solis altitudinem meridianam: ille maximum diem, & breuissimam noctem in æstiuo solstitio, hic autem in brumali maximam noctem, & diem breuissimam complectitur: quæ tamen quantitates neque in recta sphæra, neque in obliqua vltra altitudinem poli 66½ graduum à tropicis ostenduntur: in illa enim arcus diurni, & nocturni sunt semper æquales, in hac verò quantitates prædictæ ab ecliptica ostenduntur; & in altitudine poli 66½ graduum vnus tropicorum totus supra horizontem extat, eumque in puncto tangit; alter verò totus latet infra horizontem.

XXIX.

Circuli polares sunt diurnæ conuersiones polorum eclipticæ circa polos æquatoris, à quibus 23½ distant gradibus, totidem videlicet, quot puncta solstitialia, vel tropici ab æquatore. Ex quibus 5 zonæ facilè intelligi possunt, quippe quæ 4 circulis æquatori parallelis continentur; torrida enim est inter 2 tropicos, duæ temperatæ inter tro-

picos, & circulos polares: & duæ polares inter ambitum circulorum olarium.

XXX.

Paralleli ſunt circuli hinc inde æquatori paralleli tantùm inter ſe diſtantes quantum requiritur, vt maxima dies vnius horæ quadrante differat à maxima die alterius paralleli. Statuũtur autem 48 ab æquatore vſque ad circulum polarem, ſeu eleuationem poli grad. 66 .

XXXI.

Climata ſunt etiam æquatori parallela; continent autem tres parallelos: illorum enim tanta eſt latitudo, vt à termino auſtrali ad borealem maxima dies per ſemihoram excreſcat: ſunt autem eo anguſtiora climata quò magis ad ſeptentrionem accedunt. Si quis animi gratia Siderographiam in ſtellis, atque planetis ſtatuere velit, poterit parallelos, climata, polos, æquatorem, & alios circulos, cum maiores, tum minores, terrenis analogos ponere; ſcimus enim quæ ſit proportio terræ cum corporibus ſiderum; quandoquidem ſemidiameter terræ eſt ad ſemidiametrum ☽, vt 3., ad 1, vel vt 17 ad 5. Ad ſemid. ſolis, vt 1 ad 5 ', vel 5 ad 26. Ad ſemid. ☿, vt 2 ; ad 1, vel vt 8 ad 3: Ad ſemid. ♀, vt 1 ; ad 1, vel vt 11 ad 6 Ad ſemid. ♂, vt 2, ad 1, vel vt 12 ad 5 ad ſem. ♃, vt 1 ad 2 ', vel vt 5 ad 12. Ad ſemid. ♄, vt 11 ad 31. Denique ad ſemid. ſtellarum primæ magnitudinis, vt 3 ad 13. Vnde ſequitur terram milliaria cubica 170032521600 continentem, quæ ad maris ſoliditatem eſſe dicitur, vt 2290 ad 1: Ad aëris ſolid. vt 27. ad 13 & ad ætheris ſoliditatem, vt 1 ad 140608: eſſe ad ☽ ſoliditatem, vt 40 ad 1: ad ſolis ſolid. vt 1 ad 140: ad ☿, vt 19 ad 1: ad ♀, vt 6 ad 1. ad ☿, vt 13 ad 1: ad ♃, vt 1 ad 14: ad ♄, vt 1 ad 22: ad ſtellas verò primæ magn. vt 1. ad 70. Denique ad mundi ſphæram vt 1 ad 274400000000. Omitto diſtantias omnium ſiderum à terra, de quibus alibi dictum eſt: tãtùm aduertam ſtellas 14000 ſemidiametris terrenis à centro terræ diſtare.

Notandum eſt autem climata denominari à ciuitatibus, & aliis locis, per quæ tranſeunt: primum igitur tranſit per Meroën; 2. per Alexandriam; 3 per Rhodum & Babylonem: 4. per Romam, Corſicam, & Helleſpontum: 5. per Venetias: 6. per Podoliam: 7. per Vitebergam: 8. per Roſtochium: 9. per Hyberniam: 10. per Bous caſtrum Noruegiæ, 11. vt per Gothiam: 12. per Viburgum Finlandiæ: 13. per Arotiam Sueciæ: 14. per fluuij Dalecanlij oſtia: 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. & 23. per reliqua loca Noruegiæ, Sueciæ, Albæ-Ruſſiæ, & Inſularum vicinarum.

Porrò pauciora climata ab antiquis poſita ſunt, quia terræ partes, quæ iam detectæ ſunt, non illis innotuerant: verùm poterit quiſpiã parallelos, & climata vſque ad polum arcticum, & antarcticum pro-

Para.	Climata.	Hora.	Min.	grad.	Min.	grad.	Min.
1	I.	12	15	4	18		
2		12	30	8	34		
3	II.	12	45	12	43	7	50
4		13	0	16	43		
5	III.	13	15	20	33	7	3
6		13	30	23	11		
7	IV.	13	45	27	36	6	9
8		14	0	30	47		
9	V.	14	15	33	45	5	17
10		14	30	36	30		
11	VI.	14	45	39	20	4	30
12		15	0	41	12		
13	VII.	15	15	43	32	3	48
14		15	30	44	29		
15	VIII.	15	45	47	20	3	13
16		16	0	49	1		
17	IX.	16	15	50	53	2	44
18		16	30	51	58		
19	X.	16	45	53	17	2	17
20		17	0	54	29		
21	XI.	17	15	55	34	2	0
22		17	30	56	37		
23	XII.	17	45	57	34	1	40
24		18	0	58	26		

ducere, quemadmodum meridiani per omnem terræ circumferentiam multiplicantur: qui 180. erunt, ſi 4. ſolùm horæ minutis, id eſt vno gradu æquatoris; 12. verò, ſi hora, vel 15. gradibus æquatoris inter ſe diſtent. Quæcumque verò ad parallelos & climata pertinent, ſequenti tabula comprehenduntur, in qua primus ordo numerorum parallelos 24; ſecundus 23 climata : tertius maximum diem vnicuique parallelo conuenientem: 4 altitudines poli, ſiue latitudinem regionis: 5 denique latitudines climatum oſtendit.

Para.	Climata.	Hora.	Min.	grad.	Min.	grad.	Min.
25	XIII.	18	15	59	14	1	16
26		18	30	59	59		
27	XIV.	18	45	60	40	1	13
28		19	0	61	18		
29	XV.	19	15	61	53	1	1
30		19	30	62	25		
31	XVI.	19	45	62	54	0	52
32		20	0	63	22		
33	XVII.	20	15	63	46	0	44
34		20	30	64	6		
35	XVIII.	20	45	64	30	0	36
36		21	0	64	49		
37	XIX.	21	15	65	9	0	29
38		21	30	65	21		
39.		21	45	65	35	0	22
04	XX.	22	0	65	47		
41		22	15	65	57	0	16
42	XXI.	22	30	66	6		
43		22	45	66	14	0	11
44	XXII.	23	0	66	20		
45		23	15	66	25	0	6
46		23	30	66	28		
47	XXIII.	23	45	66	30	0	0
48		24	0	66	31		

Alia sunt quæ ad Astronomiam atque Geographiam pertinent, qualis est doctrina de secundis planetarum motibus, deque eorum magnitudinibus & distantijs cum à terra, tum à se inuicem, sed quæ longiora sunt quàm vt hocce breui compendio contineri possint. Quamobrem latitudinum & longitudinum tabulas omitto, quibus vrbium, & aliorum locorum situs exhiberi solent. Quarumdem tamen vrbium longitudinem & latitudinẽ à quibusdam obseruatas affero, quarum prima sit Lutetia, cuius longitudo, ab vna ex insula Hesperidum quæ *Ferri* dicitur, sumpta, est 24 grad. 30': latitudo 48.45', in qua acus magnetica à polo versus orientem 3 grad. declinat.

Longitudo Rothomagi est 23 graduum, latitudo 49. 30.

Dieppæ longitudo est 22 30: latit. 50. 3.

Londini longitudo 20, latitudo 52 esse dicitur. Romæ long. 36. latit 41.56. Venetiarum long. 34. latit. 45. Omitto reliquias vrbes, vt Hierusalem, cuius long. 66. latit. 31. 40. Babylonem, cuius long. 83. lat. 34. &c. quarum latitudines exactæ haberi poterunt, si Mathematici sumpserint altitudinem poli singularum ciuitatum; longitudinum verò differentiam, si earundem eclipsium lunarium initia in illis vrbibus obseruarint.

Aduertendum est autem circulos parallelos eò minores esse, breuioráque climata, quò magis ab æquatore recesserint, & accesserint ad polos; enimuero gradus æquatoris, qui 51. milliaria Germanica complectitur, 14 solùm in 21 gradu latitudinis, 13 in 30 gradu: 12. in 37. gradu: 11 in 48 $\frac{1}{2}$, vt Lutetiæ: 6 in 66 gradu, in quo sunt circuli polares: 1 denique milliare in 86 gradu continet. Vnde facillimum erit computare quot leucis parallelus quispiam constet: numerus enim graduum paralleli, nempe 360, multiplicatus per leucas vno gradu comprehensas, quæsitum leucarum numerum exhibebunt. Superest hic vt omnes terræ incolas inter se conferamus.

Habitationum collatio.

PERIOECI dicuntur sub eodem parallelo habitantes, quasi circumcolæ: his eadem est & eiusdem poli celsitudo: æquales simul arcus tam diurni, quàm nocturni: eadem astrorum & signorum apparitio, occultatio, ortus & occasus: simul habent æstatem: simul hyemem: simul ver: simul autumnum: easdem meridianas vmbras: per idem interuallum anticipant tam ortum quàm occasum.

Antœci sunt, qui sub æqualibus & oppositis parallelis habitant, quasi contracolæ. His æqualis est, sed diuersorum polorum celsitudo. Æquales, sed oppositorum punctorum arcus tam diurni, quàm nocturni. Eadem sed oppositorum astrorum & signorum apparitio, occultatio, ortus & occasus. Quando his fit æstas; illis hyems. Quando his fit ver, illis autumnus. Æquales habent, sed in oppositis solis locis & in diuersum proiectas vmbras meridianas.

Antichthones, siue Antipodes sunt, qui non solùm sub æqualibus & oppositis parallelis habitant, sed etiam in locis per diametrum oppositis, atque contrariis inuicem pedibus terram calcantes. Itaque omnia quæ Antœcis accidunt, etiam ad Antipodes omnino

spectant. Sed Antipodum hoc est proprium, quod habent communē horizontem,& hemisphæria diuersa,ac vertices diuersos,& quicquid his oritur,illis occidit:quidquid his extat, illis delitescit: quicquid his ascendit,illis descendit.

Amphiscij sunt qui intra Tropicos habitant, his enim vmbra meridiana quandoque dextrorsum, quandoque sinistrorsum soli orienti proiicitur. Qui etiam duas æstates,& totidem hyemes habent.

Periscii sunt, qui sub polo: his enim vmbra per totum horizontis ambitum,sole similiter circumlato, circumfertur.

Antiscii sunt Perioeci,quibus quidem æqualis & eodem versus meridiana vmbra flectitur.

Heteroscii sunt qui & Antæci,quibus in diuersum proiicitur vmbra meridiana. Possunt intelligi Heteroscii, quibus altera vmbrarum tantùm, hoc est versus vnum polorum in meridie proiicitur; vt potè extra tropicos habitantibus.

Omitto plurima quæ pertinent ad Astronomiæ,& Geographiæ terminos,qualia sunt epicyclus,excentricus,concentricus, prostaphæresis; insula, peninsula,isthmus, &c. vel quia faciliora sunt; quàm vt explicatione indigeant,vel quia alibi commodius explicabuntur.

MONITVM.

De faciendis obseruationibus.

QVÆ de Hydrostatica, & Hystiodromica huic opusculo subiiciēda paraueram, aliqui satius fore iudicarunt si iungerentur Hydraulicis: quibus morem gerens post sphærica, sublimes illos de Conicis tractatus accipe,qui magni Geometræ nomen dederunt Apollonio. Multa verò prædictis libris addi possunt, verbi gratiâ Theoria planetarum, quæ cùm plura diagrammata requirat, in aliud tempus differenda: deinde Geographia, quæ tam longitudinem, quàm latitudinem cuiusque ciuitatis, aut alterius loci doceat, sed cùm nondum satis longitudines innotuerint, postera sæcula varijs obseruationibus futuris sapientiora potiori iure illam exhibebunt. Eos interim monitos velim qui ad animi voluptatem peregrinantur, operæ pretium fore ad Geographiam ex omni parte perfectam,si naturæ varia miracula, rerúmque proprietates obseruent quæ cernuntur in altissimis montibus, quales sunt Pyrænei,Alpes,Vogesus,Iura,Gebenna, vel etiam altiores. Deinde fluuiorum origines, verbi causa Nili, Rhodani, Garumnæ, Ligeris, Sequanæ: & quinam fluuij minores

in maiores ingrediantur, quáue inclinatione quifque currat; vt innotefcat quanto velociùs magna currant flumina, vel etiam tardiùs ob nouorum fluuiorum additionem; verbi gratiâ, poftquam Rhodanum ingreffi funt fluuij Arar, Ifara, & Druentia: vel Garunnam Tarnus, Oldus, Duranius: vel in Ligerim Elauer Caris, Inder, Vigenna, Claris, Meduana, Loira, Sartra: vel in Sequanam Matrona, Icanna, Aëfia, Eura. Quódque Galli præftiterint in fua Gallia, fuis in regnis & Prouincijs fi fecerint alij, Geographiâ nihil præftantius fuerit, quot enim naturæ miranda in origine Padi, Athefis, Anaffi, Arfiæ, Arni, Vmbronis, Tiberis, & aliorum fluuiorum Italiam irrigantium Itali obferuabunt? Quis enumeret vtilitates prouenturas ex accurata vel vnius Padi obferuatione, qua notetur quid ei contingat tam in altitudine quàm in velocitate, pifciumque maiori, vel minori, hoc, aut illo loco frequentia, vel etiam diuerfitate, ob aquarum nouos cumulos, quos in illum profundũt Duria, Seffites, Ticinum, Addua, Ollius, Minius, Tanarus, Trebia, Rhenus, & fi qui alij fluuij fe in eum exonerent. Idemque de Germanicis, & aliarum prouinciarium fluminibus efto iudicium; quot enim ex vnico Danubio, & fluuiis fe in illud exonerantibus; quot ex magno Canadenfium fluuio, quot ex Sinenfium obferuationibus, fi quando fideliter ad nos deferantur: quot denique admiranda ex omnibus Indiæ, vel etiam Magellanicarum terrarum, vbi quis eas inuenerit, hiftoriis fperanda funt, quibus Geographia exornetur.

CLARISSIMO NOBILISSIMOQVE VIRO

RENATO DES CARTES PERRONII TÆPARCHÆ.

F. M. MERSENNVS ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

CVM plurimi ſynopſim noſtram ad editionem reuocari deſiderarint, VIR NOBILISSIME, partem illam ſubtiliorem de Conicis agentem, librisque doctiſſimis Clariſſimi Viri Claudij Mydorgij adauctam, Tuo nomine illuſtratam patiaris, obſecro, in lucem prodire, cùm nullus ſit, cui iuſtiùs quàm Tibi nuncupari debeat, qui nouas ſectiones adinueniſti, Tuæque Geometriâ, vtcunque breui, ſcientiarum orbem adeo promouiſti, vt hinc illam cooperis, vbi veloces deſijſſe videbantur.

Quid verò commemorem Hyperbolas, Ellipſeſque, quibus iam poſſimus Tuo lumine non minus quam pilâ ludere: luciſque radios quocumque libuerit torquere, deducere, atque reducere: vt nunc habeant, qui magnum aliquid in mechanicis cum Kepleo præſagiebant, ſi vera Refractionum lex diceretur, quo plurimum gaudeant, Tibique imprimis gratulentur.

Quibus omnibus cùm audiam Te Phyſicam illam ab eruditis viris adeo exoptatam propediem editurum, quæ longè perfectiùs cum noſtræ fidei myſteriis, Theologiciſque dogmatibus, quàm Peripatetica conueniat, omnium Catholicorum nomine Tibi maximas quas poſſum gratias habeo, qui non ſolùm Philoſophicis, ſed etiam Theologiæ veritatibus tam fœliciter patrocinaris.

Perge, Vir incomparabilis, ad Dei gloriam & bonorum omnium vtilitatem, qui mecum venerantur Deum Opt. Max. ſuâ vt luce diuinâ, menti tuæ magis, magiſque affulgeat, donec lumen illud Æternum & immenſum, quo duce laboras, tandem in lumine Gloriæ Beatiſſimus contempleris.

IN APOLLONII PERGÆI CONICA, AD LECTOREM.

PRÆFATIO.

CVm ex ſequente ad Hædenum ex præfatione conſtet 4 ſolummodo libros Apollonij hactenus à Commandino editos fuiſſe; treſque alios doctiſſimus Golius Arabicè recuperarit, placet hîc ea quæ dudum ad me ſcripſit, hîc in lectoris gratiam apponere. Itaque ſexti libri hoc eſt initium. Mitto ad te, Attale, ſextum Conicorum, in quo propoſitum nobis eſt agere de ſectionibus æqualibus & inæqualibus, ſimilibus atque diſſimilibus, earúmque diuiſione. Plura verò de hiſce diximus, quàm ij qui ante nos Geometræ fuerunt: docuimuſque quomodo in cono recto dato ſectio inueniri poſſit æqualis datæ, & è contra. Sequuntur definitiones. Æquales Coni ſectiones ſunt, quando vnius partes alterius partibus applicatæ nullum exceſſum, vel defectum habent. Similes autem ſectiones ſunt, in quibus, cùm ſegmenta axium inter ordinatas & verticem, eandem inter ſe habent rationem, ipſæ etiam ordinatæ eandem inter ſe rationem ſeruarint, &c.

Propoſitio prima talis eſt. Parabolæ habentes latera recta æqualia, ſunt æquales, & è contra. Vltima verò. Inuenire conum rectum, dato cono recto ſimilem, in quo ſit ellipſis data.

Initium ſeptimi ita habet. Continet ſeptimus hic liber propoſitiones multas inſignes & admirandas ad determinationem, & multa ſequentis libri problemata vtiliſſima, &c. Propoſitio 1. Si axis parabolæ producatur vltra verticem, donec æquetur lateri recto, & à puncto quouis ſectionis in axem ducatur perpendicularis, recta, ſectionis punctum illud in ſectione cum vertice connectens, poterit rectangulum contentum ſub recta inter verticem & perpendicularis incidentiam intericctâ, & totâ ab hoc incidentiæ puncto per verticalem continuata.

Quod verò ad numerum propoſit. attinet, habet liber quintus propoſitiones 77. & ſeptimus 51. Ad calcem codicis Goliani habetur octauum librum non fuiſſe tranſlatum ab Arabibus, quòd

illorum exemplaria etiam illo libro caruerint: quanquam testatur doctissimus scriptor Aben Nedin, qui Philosophorum Arabum, operúmque ab illis editorum circa CCCC à Mahammede annum, elenchum descripsit, partem istius octaui libri versam fuisse, asseritque omnes Apollonij libros suâ extare linguâ, eosque plures quàm Pappus enumeret.

Suspiciatur tamen C. Mydorgius hos tres libros esse cuiusdam Arabis sub Apollonio latentis, quòd in V suo libro primam Prop. VI. Apollonij superiùs allatam, non solùm in cono recto, sed in quouis, etiam scaleno, & illorum portionibus quibuscumque datis possibilia quæque demonstret.

Sunt autem qui conica breuiùs tradi posse contendant, cuius rei specimen G. Desargues, & post eum B.P. edidit, ex quo speres paucis propositionibus omnia præcipua comprehensum iri: vnicum addo problema quod 39, 40, & 41 l. 3. Myd. propositiones complectitur; nempe, dato cono exhibere in eius superficie omnes conicas sectiones, quæ datæ conicæ sectioni sint eædem: quod etiam problema ipse soluit, sed non vulgauit.

Omitto diuersa problemata, & theoremata generalissima, quæ iam à nostris analystis circa sectiones conicas inuenta sunt, vt tandem ad Apollonium redeamus.

Porrò videantur etiam quæ de harum sectionum proprietatibus libro Hydraulicæ, Prop. IX. quæque in harmoniæ Gallicæ Vtilitate & obseruationibus dicta sunt: imprimis verò quæ vir illustris habet in sua Dioptrica, & Geometria.

Legatur etiam Præfatio in Conica CL. Mydorgij, quippe supplet quæ huic deesse videantur: quemadmodum 4 illius libri multa docent quæ in 4 Apollonij libris minime reperiuntur.

APOLLONII
PERGÆI
CONICORVM
LIBER PRIMVS.

Ad Eudemum Præfatio.

EX octo libris quos Apollonius Pergę vrbi Pamphiliæ natus tempore Ptolomæi Euergetæ, teste Heraclio in Archimedis vita, composuerat, soli quatuor supersunt qui continent conicorum elementa, quorum primus complectitur generationes trium coni sectionum, & earum quæ oppositæ dicuntur: itẽque principalia ipsarum accidentia, ab Apollonio & vberiùs & vniuersaliùs, quàm ab aliis, qui de ea re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad illas lineas, quæ cum sectione non conueniunt, quæ à Græcis ἀσύμπτωτοι appellantur: tum de aliis differit, quæ & generalem, & necessariam vtilitatem ad determinationes afferunt: quas autem vocet diametros, & quos axes ex hoc libro cognosces. Tertius liber continet multa, & admirabilia theoremata, quæ vtilia erunt, & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes: quorũ complura, & pulcherrima & noua sunt. Hæc nos perpendentes, inquit Apollonius, animaduertimus non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres, & quatuor lineas: verùm ipsius tantummodo particulam quandam, atque hanc nõn satis fœliciter. Non enim fieri poterat, vt ea compositio rectè perficeretur absque iis, quæ à nobis inuenta sunt. Quartus liber tradit, quot modis conorũ sectiones inter sese, & circuli circunferentiæ occurrere possint; & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt memoriæ proditum est: coni sectio, & circuli circunferentia, & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant: Reliqui autem libri ad abundantiorem doctrinam pertinent. Quintus enim de minimis, & maximis magna ex parte agit. Sextus de æqualibus, & similibus coni sectionibus. Septimus continet theoremata, quæ determinandi vim habent. Octauus problemata conica determinata. At

verò omnibus his editis, licèt vnicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia iudicare.

Ex ἐπαφῶν ἀρχα Apollonij.

Datis duabus rectis lineis in plano, punctisque datis, & data proportione inæqualium linearum, potest in plano circulus describi, ita vt lineæ à datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatæ proportionem habeant eandem datæ proportioni.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I. SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: superficiem à linea recta descriptam, constantémque ex duabus superficiebus, ad verticem inter se se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta, voco conicam superficiem.

II. Verticem ipsius, manens punctum.

III. Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

IV. Conum autem voco, figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

V. Verticem coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

VI. Axem, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur.

VII. Basim, circulum ipsum.

VIII. Conorum rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

IX. Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

X. Omnis curuæ lineæ, in vno plano existentis diametrũ voco rectam lineam, quæ quidem ducta à linea curua: omnes lineas, quæ in ipsa ducuntur, cuidam lineæ æquidistantes bifariam diuidit.

IX. Verticem lineæ terminum rectæ, qui est in ipsa linea.

XII. Ordinatim ad diametrum applicari dicitur, vnaquæque linearum æquidistantium.

XIII. Similiter & duarum curuarum linearum in vno plano existentium, diametrum quidem transuersam voco rectam lineam, quæ

omnes in vtraque ipsarum ductas, lineæ cuidam æquidistantes bifariam diuidit.

XIV. Vertices linearum, diametri terminos, qui sunt in ipsis lineis.

XV. Rectam verò diametrum voco, quæ inter duas lineas positæ, lineas omnes ductas, rectæ cuidam æquidistantes, & inter ipsas interiectas bifariam secat.

XVI. Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquęque linearum æquidistantium.

XVII. Coniugatas diametros voco curuæ lineæ, & duarum curuarum rectas lineas, quarum vtraque diameter est, & lineas alteri æquidistantes bifariam diuidit.

XVIII. Axem verò curuæ lineæ, & duarũ curuarum, rectã lineam, quæ cum sit diameter curuæ lineæ, vel duarum curuarum, ęquidistantes ad rectos secat.

XIX. Axes coniugatos curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectas lineas, quæ cum sint diametri coniugatæ, ipsis æquidistantes ad rectos angulos secant.

PROPOSITIONES LIBRI PRIMI APOLLONII PERGÆI.

Therema I. Propositio I.

Rectæ lineæ, quæ à vertice superficiei conicæ ad puncta, quæ in superficie sunt, ducuntur, in ipsa superficie erunt.

Ex quibus constat, si à vertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra superficiem sunt, recta linea ducatur, intra: & si ad aliquod eorum quæ sunt extra, extra superficiem cadere.

Theor. II. *Prop.* II.

Si in alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, duo puncta sumantur: & quæ puncta coniungit recta linea ad verticem non pertineat, intra superficiem cadet: quæ verò est in directum ipsi, cadet extra.

Theor. III. *Prop.* III.

Si conus plano per verticem secetur, sectio triangulum erit.

Theor. IV. *Prop.* IV.

Si alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, plano secetur, æquidistante circulo, per quem fertur recta linea superficiem des-

cribens: planum, quod superficie concluditur, circulus erit, centrum in axe habens: figura verò contenta circulo, & ea parte superficiei conicæ, quæ interſecans planum & verticem interiicitur, conus erit.

Constat præterea figuram contentam circulo D E, & ea parte superficiei conicæ, quæ inter dictum circulum, & punctum A interijcitur, conum esse: simulque demonstratum est communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem diametrum esse ipsius circuli.

Theor. V. Prop. V.

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, seceturque altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex verticis parte triangulum abscindat simile ei, quod per axem, subcontrariè verò positum, sectio circulus erit. Vocetur autem huiusmodi sectio subcontraria.

Theor. VI. Prop. VI.

Si conus plano per axem secetur, sumatur autem aliquod punctum in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem: & ab ipso ducatur recta linea æquidistans cuidam rectæ, quæ perpendicularis est à circumferentia circuli ad trianguli basim, triangulo per axem occurret, & vlteriùs producta vsque ad alteram superficiei partem, bifariam ab ipso triangulo secabitur.

Theor. VII. Prop. VII.

Si conus plano per axem secetur: secetur autem & altero plano secante planum basis coni secundùm rectam lineam, quæ sit perpendicularis, vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur: lineæ quæ à sectione in superficie coni à plano facta ducuntur æquidistantes ei, quæ est perpendicularis ad trianguli basim, in communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem cadent: & vlteriùs productæ ad alteram sectionis partem, ab ea bifariam secabuntur: & siquidem rectus sit conus, linea, quæ est in basi, perpendicularis erit ad communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem: si verò scalenus, non semper, nisi cum planum, quod per axem ducitur, ad basim coni rectum fuerit.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Si conus plano secetur per axem, & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: diameter autem sectionis factæ in superficie, vel æquidistet vni laterum trianguli, vel cum ipso extra coni verticem conueniat: & producantur in infinitum, tum superficies

coni, tum planum fecans: fectio quoque ipfa in infinitum augebitur, & ex diametro fectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualem abfcindet linea, quæ quidem à coni fectione ei, quę eft in bafi, æquidiftans ducta fuerit.

Theor. IX. *Prop.* IX.

Si conus plano fecetur conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque bafi ęquidiftet, neque fub contrariè ponatur: fectio circulus non erit.

Theor. X. *Prop.* X.

Si in coni fectione duo puncta fumantur, recta linea, quę eiufmodi puncta coniungit, intra fectionem cadet: & quæ in directum ipfi conftituitur, cadet extra.

Theor. XI. *Prop.* XI.

Si conus plano per axem fecetur: fecetur autem & altero plano fecante bafim coni fecundum rectam lineam, quę ad bafim trianguli per axem fit perpendiculari: & fit diameter fectionis vni laterum trianguli per axem ęquidiftans: recta linea, quę à fectione coni ducitur ęquidiftans communi fectioni plani fecantis, & bafis coni vfque ad fectionis diametrum poterit fpatium æquale contento linea, quæ ex diametro abfciffa inter ipfam, & verticem fectionis interiicitur, & alia quædam, quæ ad lineam inter coni angulum, & verticem fectionis interiectam, eam proportionem habeat, quam quadratum bafis trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus continetur: dicatur autem huiufmodi fectio parabole.

Theor. XII. *Prop.* XII.

Si conus plano per axem fecetur: fecetur autem & altero plano fecante bafim coni fecundùm rectam lineam, quæ ad bafim trianguli per axem fit perpendicularis: & fectionis diameter producta cum vno latere trianguli per axem, extra verticem coni conueniat: recta linea, quæ à fectione ducitur æquidiftans communi fectioni plani fecantis, & bafis coni vfque ad fectionis diametrum, poterit fpatium adiacens lineæ, ad quam ea, quæ in directum conftituitur diametro fectionis, fubtenditúrque angulo extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ, quæ diametro æquidiftans à vertice fectionis vfque ad bafim trianguli ducitur; ad rectangulum bafis partibus, quæ ab ea fiunt, contentum: latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abfcinditur, inter ipfam & verticem fectionis interiectā: excedénfq; figurâ fimili, & fimiliter pofita ei, quæ cōtinetur linea extra triangulū fubtēfa, & ea, angulo iuxta quam poffunt

quæ

quæ ad diametrum applicantur. Vocetur autem huiusmodi sectio hyperbole.

Theor. XIII. *Prop.* XIII.

Si conus plano per axem secetur, & secetur altero plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, neque sub contrariè ponatur: planum autem, in quo est basis coni, & secans planum conueniant secundùm rectam lineam, quæ sit perpendicularis, vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: recta linea, quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni planorum vsque ad diametrum sectionis poterit spatium adiacens lineæ, ad quam sectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ diametro æquidistantis à vertice coni vsque ad trianguli basim ductæ, habet ad rectangulum contentum basis partibus, quæ inter ipsam & rectas trianguli lineas interiiciuntur: latitudinem habens lineam, quę ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis, deficiensque figura simili, & similiter posita ei, quæ diametro, & linea iuxta quam possunt, continetur. Dicatur autem huiusmodi sectio ellipsis.

Theor. XIV. *Prop.* XIV.

Si superficies, quæ ad verticem sunt, plano non per verticem secentur: erit in vtraque superficierum sectio, quæ vocatur hyperbole: & duarum sectionum eadem erit diameter, lineæ verò, iuxta quas possunt applicatæ ad diametrum æquidistanter ei, quæ est in basi coni, inter se æquales erunt: & figuræ transuersũ latus vtrisque cõmune: quod scilicet inter sectionum vertices interiicitur. Vocentur autem huiusmodi sectiones oppositæ.

Theor. XV. *Prop.* XV.

Si in ellipsi à puncto, quod diametrum bifariam diuidit ordinatim ducta linea ex vtraque parte ad sectionem producatur; & fiat vt producta ad diametrum; ita diameter ad aliam lineam: recta linea, quæ à sectione ducitur ad productam, diametro æquidistans poterit spatium adiacens tertiæ proportionali latitudinem habens lineam, quæ inter ipsam: & sectionem interiicitur, deficiensque figura simili ei, quæ continetur linea, ad quam ducuntur, & ea iuxta quam possunt. Quod si vlteriùs producatur ad alteram partem sectionis, bifariam secabitur ab ea, ad quam applicata fuerit.

Theor. XVI. *Prop.* XVI.

Si per punctum, quod transuersum latus oppositarum sectionum bifariam diuidit, recta linea quædam ordinatim applicetur: ipsarum diameter erit, priori diametro coniugata.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

I. PVNCTVM, quod hyperbole, & ellipsis diametrum bifariam diuidit, centrum sectionis dicatur.

II. Et quæ à centro ad sectionem perducitur, vocetur ex centro sectionis.

III. Similiter & punctum quod transuersum latus oppositarum sectionum bifariam diuidit, centrum vocetur.

IV. Quæ autem à centro ducitur æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, mediamque proportionem habet inter latera figuræ, & bifariam à centro, secunda diameter appelletur.

Theor. XVII. *Prop.* XVII.

Si in coni sectione à vertice ipsius ducatur recta linea æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, extra sectionem cadet.

Theor. XVIII. *Prop.* XVIII.

Si recta linea coni sectioni occurrens, productaque in vtramque partem extra sectionem cadat: sumatur autem aliquod punctum intra sectionem, & per ipsum ei, quæ sectioni occurrit æquidistans ducatur, ducta linea & producta ex vtraque parte sectioni occurret.

Theor. XIX. *Prop.* XIX.

In omni sectione coni recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conueniet.

Theor. XX. *Prop.* XX.

Si in parabola duæ rectæ lineæ à sectione ad diametrum ordinatim applicentur, vt eorum quadrata inter sese, ita erunt & lineæ, quę ab ipsis ex diametro, ad verticem abscinduntur.

Theor. XXI. *Prop.* XXI.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia rectæ lineę ordinatim ad diametrum applicentur, erũt quadrata earum ad spatia contenta lineis, quæ inter ipsas, & vertices transuersi lateris figuræ interiiciuntur, vt figuræ rectum latus ad transuersum: inter sese verò, vt spatia, quæ interiectis, vt diximus, lineis continentur.

Theor. XXII. *Prop.* XXII.

Si parabolem, vel hyperbolem recta linea in duobus punctis secet, non conueniens cum diametro sectionis intra sectionem; producta cum eadem diametro extra sectionem conueniet.

Theor. XXIII. *Prop.* XXIII.

Si ellipsim recta linea secet inter duas diametros, producta cum vtraque earum extra sectionem conueniet.

Theor. XXIV. *Prop.* XXIV.

Si parabolæ vel hyperbolæ recta linea in vno puncto occurrens, & producta ex vtraque parte extra sectionem cadat, cum diametro conueniet.

Theor. XXV. *Prop.* XXV.

Si ellipsi recta linea occurrens inter duas diametros, & producta ex vtraque parte cadat extra sectionem, cum vtrisque diametris conueniet.

Theor. XXVI. *Prop.* XXVI.

Si in parabola, vel hyperbola recta linea ducatur diametro sectionis æquidistans, in vno tantùm puncto cum sectione conueniet.

Theor. XXVII. *Prop.* XXVII.

Si parabolæ diametrum secet recta linea, producta in vtramque partem cum sectione conueniet.

Theor. XXVIII. *Prop.* XXVIII.

Si recta linea vnam oppositarum sectionum contingat, sumatur autem punctum intra alteram sectionem; & per ipsum linea contingenti æquidistans ducatur, producta ad vtrasque partes cum sectione conueniet.

Theor. XXIX. *Prop.* XXIX.

Si in oppositis sectionibus recta linea per centrum ducta occurrat vni sectioni, vlteriùs producta alteram quoque secabit.

Theor. XXX. *Prop* XXX.

Si in ellipsi, vel oppositis sectionibus recta linea ducatur, ad vtrasque centri partes sectioni occurrens, ad centrum bifariam secabitur.

Theor. XXXI. *Prop.* XXXI.

Si in transuerso figuræ latere hyperboles sumatur aliquod punctum, non minorem abscindens ad verticem sectionis, quàm sit dimidia lateris transuersi figuræ; & ab ipso recte linea sectioni occurrat, si producatur intra sectionem, ad sequentes ipsius partes cadet.

Theor. XXXII. *Prop.* XXXII.

Si per verticem sectionis coni recta linea ordinatim applicatæ æquidistans ducatur, sectionem continget, & in locum, qui inter coni sectionem & rectam lineam interiicitur, altera recta linea non cadet.

Theor. XXXIII. *Prop.* XXXIII.

Si in parabola sumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur, & ei quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis ponatur in directum ab eius extremi-

tate, recta linea, quæ à facto puncto ducitur ad illud quod sumptum fuerat sectionem continget.

Federicus Commandinus
Lemma.

Si recta linea in partes inæquales secetur, earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, & quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

Th. XXXIV. *Prop.* XXXIV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum, ab eoque recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: & quam proportionem habent lineæ interiectæ inter applicatam, & terminos transuersi lateris figuræ, eandem habeant inter se partes lateris transuersi, ita vt quæ sunt ad verticem partes sibi ipsis respondeant, recta linea coniungens punctum quod in transuerso latere sumitur, & punctum, quod est in sectione, sectionem ipsam continget. *Vide Lemmata 4. Eutocij & Commandini.*

Th. XXXV. *Prop.* XXXV.

Si parabolem recta linea contingat, conueniens cum diametro extra sectionẽ, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicetur, abscindet ex diametro ad verticem sectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipsam & contingentem interiicitur: & in locum, qui est inter contingentem & sectionem alia linea recta non cadet.

Th. XXXVI. *Prop.* XXXVI.

Si hyperbolem, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conueniens cum transuerso figuræ latere, & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur, erit, vt linea quæ interiicitur inter contingentem, & terminum transuersi lateris ad interiectam inter eandem, & alterum lateris terminum, ita linea, quæ est inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam, quæ est inter eandem & alterum terminum, adeo vt continuatæ inter se sint, quæ sibi ipsis respondent; & in locum, qui inter contingentem, & sectionem coni interiicitur, altera recta linea non cadet.

Th. XXXVII. *Prop.* XXXVII.

Si hyperbolem, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat; & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur, quæ interiicitur inter applicatam & centrum sectionis vnà cum interiecta inter contingentem, & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ, quæ est ex centro sectionis: sed vnà cum ea, quæ inter applicatam & contingen-

tem interiicitur, continebit ſpatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ eandem proportionem habet, quam tranſuerſum figuræ latus ad rectum

Th. XXXVIII. *Prop.* XXXVIII.

Si hyperbolem, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conueniat; & à tactu ad diametrum applicetur linea alteri diametro æquidiſtans: quæ interiicitur inter applicatam, & ſectionis centrum, vnà cum interiecta inter contingentem, & centrum ſectionis, continebit rectangulum æquale quadrato, quod fit ex dimidia ſecundæ diametri: ſed vnà cum ea, quæ inter applicatam, & contingentem interiicitur, ſpatium continebit, quod ad quadratum applicatæ eam proportionem habeat, quam figuræ latus ad tranſuerſum.

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt, vt linea, quæ inter tangentem, & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ interiicitur, ad eam, quæ inter tangentem, & alterum terminum ſecundæ diametri, ita eſſe lineam, quæ eſt inter alterum terminum, & applicatam ad eam quæ inter alterum terminum & applicatam.

Ex iam dictis manifeſtum eſt lineã EF *contingere ſectionem, ſiue rectangulum* FGH *æquale ſit quadrato* GC, *ſiue* FHG *rectangulum ad quadratum* HE, *eam quam diximus, proportionem habeat: conuerſo enim modo illud facilè oſtendetur.* Vide Commandinum.

Th. XXXIX. *Prop.* XXXIX.

Si hyperbolem, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat, & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: ſumpta quauis linea ex duabus, quarum altera interiicitur inter applicatam, & centrũ ſectionis; altera inter applicatam, & contingentem: habebit ad eam applicata proportionem compoſitam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum ad applicatam, & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad tranſuerſum.

Theor. XL. *Prop.* XL.

Si hyperbolem, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conueniat: & à tactu eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans: ſumpta qualibet ex duabus quarum vna inter applicatam, & ſectionis centrum interiicitur, altera inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipſam applicata proportionem compoſitam ex proportione, quam habet tranſuerſum figuræ latus ad rectum, & ex ea, quam altera dictarum linearum habet ad applicatam.

Theor. XLI. *Prop.* XLI.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia recta linea ordinatim applicetur ad diametrum. & ab applicata, & ea, quæ ex centro parallelogramma æquiangula describantur: habeat autem applicata ad reliquam parallelogrammi latus proportionem compositā ex proportione, quam habet ea, quæ ex centro ad reliquum latus; & ex proportione, quam rectum figuræ sectionis latus habet ad transuersum, parallelogrammum factum à linea, quæ inter centrum & applicatam interiicitur, simile parallelogrammo, quod fit ab ea, quæ ex centro, in hyperbola quidem maius est, quàm parallelogrammum ab applicata, parallelogrammo ab ea, quæ ex centro, in ellipsi verò, & circuli circumferentia vnà cum parallelogrammo, quod fit ab applicata æquale est parallelogrammo ab ea quæ ex centro.

Theor. XLII. *Prop.* XLII.

Si parabolem recta linea contingens cum diametro conueniat; & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: sumpto autem quouis puncto in sectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ, altera quidem contingenti æquidistans, altera verò æquidistans ei, quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum, quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo contento lineâ à tactu applicata, & ea, quæ interiicitur inter æquidistantem & verticem sectionis.

Theor. XLIII. *Prop.* XLIII.

Si hyperbolem, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens conueniat cum diametro: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: huic verò æquidistans ducatur per verticē sectionis, quæ cum linea per tactum & centrum ducta conueniat, & sumpto aliquo puncto in sectione, ab eo ad diametrū duæ lineæ ducātur, vnà quidem contingenti æquidistans; altera verò æquidistans ei, quæ à tactu applicata est; triangulum ab ipsis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum, quod abscindit linea per centrum, & tactum ducta, triangulo ab ea, quæ ex centro, simili abscisso: in illipsi verò, & circuli circumferentia, vnà cum triangulo abscisso ad centrum æquale erit triangulo simili abscisso, quod ab ea quæ ex centro describitur.

Theor. XLIV. *Prop.* XLIV.

Si vnam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat: à tactu verò ad diametrum linea ordinatim applicetur, atque huic æquidistans ducatur per verticem alterius sectionis, vt conueniat cum linea per tactum, & centrum ducta: sumpto autem in sectione quauis puncto, applicentur ad diametrum duæ lineæ, qua-

rum altera contingenti æquidiſtet: altera æquidiſtet ei, quæ à tactu ordinatim applicata eſt: triangulum ab ipſis factum minus eſt, quàm triangulum, quod abſcindit applicata ad centrum ſectionis, triangulo ſimili abſciſſo ab ea, quæ ex centro.

Federicus Commandinus.

Si vnam oppoſitarum ſectionum recta linea contingat: & à tactu ducatur diameter vſque ad alteram ſectionem quæ ab eo puncto ducitur lineæ ſectionem contingenti æquidiſtans, ſectionem ipſam continget.

Theor. XLV. *Prop.* XLV.

Si hyperbolem, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conueniat; & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans: & per tactum & centrum ducta linea producatur: ſumpto autem in ſectione quouis puncto, ad ſecundam diametrum ducantur duæ lineæ, quarũ vna contingenti, altera applicatæ æquidiſtet: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur, in hyperbola quidem maius eſt quàm triangulũ abſciſſum ab applicata ad centrum, triangulo, cuius baſis eſt linea contingens, & vertex centrum ſectionis: in ellipſi verò & circuli circumferentia vnà cum triangulo abſciſſo, æquale eſt triangulo, cuius baſis linea contingens, & vertex ſectionis centrum.

Theor. XLVI. *Prop.* XLVI.

Si parabolem recta linea contingens cum diametro cõueniat: quæ per tactum ducitur diametro æquidiſtans ad eaſdem partes ſectioni, lineas in ſectione ductas, quæ contingenti æquidiſtant, bifariam ſecabit.

Theor. XLVII. *Prop.* XLVII.

Si hyperbolem, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: per tactum, & centrum ducta linea ad eaſdem partes ſectioni, lineas, quæ in ſectione ducuntur, contingenti æquidiſtantes bifariam ſecabit.

Theor. XLVIII. *Prop.* XLVIII.

Si vnam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum & centrum linea producta ſecet alteram ſectionem: quæ in altera ſectione ducta fuerit, contingenti æquidiſtans à linea producta bifariam ſecabitur.

Theor. XLIX. *Prop.* XLIX.

Si parabolem recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum ducatur linea diametro æquidiſtans: à vertice verò ducatur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, & fiat vt portio con-

tingentis inter applicatam & tactum interiecta ad portionem æquidistantis, quæ itidem inter tactum, & applicatam interiicitur: ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à sectione ducta fuerit, æquidistans contingenti ad lineam, quæ per tactũ ducitut diametro æquidistans, poterit rectangulum contentum inuenta linea, & ea, quæ inter ipsam & tactum interiicitur.

Theor. L. *Prop.* L.

Si hyperbolem, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum, & centrum linea producatur: à vertice autem ordinatim applicata conueniat cũ ea, quæ ducitur per tactum & centrum: fiatque vt portio contingentis inter tactum, & applicatam interiecta, ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à sectione ducitur contingenti æquidistans ad lineam per tactum & centrum ductam poterit spatium rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens interiectam inter ipsam & tactũ: in hyperbola quidem excedens figurâ simili contentæ lineâ dupla eius, quæ est inter centrum, & tactum, & inuentâ linea: in ellipsi verò & circulo eadem deficiens.

Theor. LI. *Prop.* LI.

Si quamlibet oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur vsq; ad alteram sectionem: à vertice verò ducatur linea æquidistãs ei, quæ ordinatim applicata est: conueniensque cum linea per tactum, & centrum ducta: & fiat vt portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem lineæ ductæ per tactum, & centrum, quæ inter tactum & applicatam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ in altera sectione ducitur æquidistans contingenti, ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens, lineam, quæ est inter ipsam & tactum: excedensque figura simili ei, quæ linea inter oppositas sectiones interiecta & inuenta continetur.

Itaque his demonstratis, perspicuum est in parabola vnamquamque rectarum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidistantes, diametrum esse: in hyperbola verò, ellipsi, & oppositis sectionibus vnamquamque earum, quæ per centrum ducuntur. Et in parabola quidem applicatas ad vnamquamque diametrum, æquidistantes contingentibus, posse rectangula ipsi adiacentia: in hyperbola & oppositis posse rectangula adiacentia ipsi, quæ excedunt eadem figura: in ellipsi autem quæ eadem deficiunt. Postremò

quæ-

quaecumque circa sectiones adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & aliis diametris assumptis eadem contingere.

Problema I. Prop. LII.

Recta linea data in plano, ad vnum punctum terminata, inuenire in plano coni sectionem, quae parabole appellatur, ita vt eius diameter sit data linea: vertex lineae terminus, quae verò à sectione ad diametrum in dato angulo applicatur, possit rectangulũ contentũ linea, quae est inter ipsam & verticem sectionis, & altera quadã data linea.

Probl. II. Prop. LIII.

Datis duabus rectis lineis terminatis, quae ad rectos inter se angulos constituantur: & altera producta ad easdem partes angulo recto, inuenire in linea producta coni sectionem, quae hyperbole dicitur, in eodem plano, in quo sunt datae lineae: ita vt producta sit diameter sectionis, & vertex punctum, quod ad angulum consistit: quae verò à sectione ad diametrum applicatur, angulum faciens aequalẽ dato, possit rectangulum, quod adiacet alteri lineae, latitudinem habens lineã interiectam inter applicatam & verticem sectionis: excedénsque figura simili, & similiter posita ei, quae datis à principio lineis continetur.

Probl. IV. Prop. LIV.

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos, inuenire circa diametrum alteram ipsarum, coni sectionem, quae ellipsis appellatur, in eodem plano, in quo sunt datae lineae: ita vt vertex sit punctum ad rectum angulum: & à sectione ad diametrum applicatae in angulo dato possint rectangula adiacẽtia alteri lineae, quae latitudinem habeant, lineam inter ipsas & verticem sectionis interiectam, deficiantque figurâ simili, & similiter posita ei, quae datis rectis lineis continetur.

Probl. IV. Prop. LV.

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos; inuenire oppositas sectiones, quarum diameter sit vna datarum linearum: & vertices lineae termini: applicatae verò ab vtraque sectione in dato angulo possint spatia adiacentia alteri lineae, excedentiaque figurâ simili ei, quae datis lineis continetur.

Probl. V. Prop. LVI.

Datis duabus rectis lineis sese bifariam secantibus, circa vtramque ipsarum sectiones oppositas describere, ita vt rectae lineae sint coniugatae diametri: & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

APOLLONII
PERGÆI
CONICORVM
LIBER SECVNDVS.

Videantur 12. Lemmata Pappi.

Theorema I. *Propositio* I.



I hyperbolem recta linea ad verticem contingat: & ab ipso ex vtraque parte diametri sumatur æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem; lineæ, quæ à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducuntur, cum sectione non conuenient.

Theor. II. *Prop.* II.

Iisdem manentibus demonstrandum est non esse alteram asymptoton, quæ angulum DCE diuidet.

Theor. III. *Prop.* III.

Si hyperbolem contingat recta linea, cum vtraque asymptoton cōueniet, & ad tactum bifariam secabitur; quadratum verò vtriusque eius portionis æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum per tactum ductam constituitur.

Probl. IV. *Prop.* IV.

Datis duabus rectis lineis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato, describere per punctum coni sectionem, quæ hyperbole appellatur, ita vt datæ lineæ ipsius asymptoti sint. *Vide Lemma Pappi.*

Theor. V. *Prop.* V.

Si parabolæ, vel hyperbolæ diameter lineam quandam bifariam secet: quæ ad terminum diametri contingit sectionem æquidistans est lineæ bifariam sectæ.

Theor. V. *Prop.* VI.

Si ellipsis, vel circuli circumferentiæ diameter lineam quandā non per centrum transeuntem bifariam secet: quę ad terminum diametri contingit sectionem, æquidistans erit bifariam sectæ lineæ.

Theor. VI. *Prop.* VII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam recta linea contin-

gat: & huic æquidistans ducatur in sectione: & bifariam diuidatur: quæ à tactu ad punctum lineam bifariam diuidens iungitur, sectionis diameter erit.

Theor. VII. *Prop.* VIII.

Si hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis, producta ex vtraque parte cum asymptotis conueniet: & lineæ, quę ex ipsa abscissæ inter sectionem, & asymptotos interiiciuntur, æquales erunt.

Theor. VIII. *Prop.* IX.

Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur, in vno tantum puncto sectionem contingit.

Theor. IX. *Prop.* X.

Si recta linea sectionem secans cum vtraque asymptoton conueniat: rectangulum contentum rectis lineis, quæ inter asymptotos & sectionem interiiciuntur, æquale est quartæ parti figuræ factæ ad diametrum, quæ ęquidistantes ipsi ductæ lineæ bifariam diuidit.

Theor. X. *Prop.* XI.

Si vtramque linearum continentium angulum, qui deinceps est angulo hyperbolem continenti, secet recta linea: in vno tãtùm puncto cum sectione conueniet; & rectangulum constans ex iis, quæ interiiciuntur inter lineas angulum continentes, & sectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro, quæ secanti lineæ æquidistans ducitur.

Theor. XI. *Prop.* XII.

Si ab aliquo puncto corũ, quæ sunt in sectione ad asymptotos duæ rectæ lineæ in quibuslibet angulis ducantur: & ab altero puncto in sectione sumpto ducantur aliæ lineę his ipsis æquidistantes: rectangulũ ex æquidistantibus constans æqnale est ei, quæ fit ex iis, quibus illæ æquidistantes ductæ fuerant.

Theor. XII. *Prop.* XIII.

Si in loco asymptotis & sectione terminato, quædam recta ducatur, alteri asymptoton æquidistans: in vno puncto tantùm cum sectione conueniet.

Theor. XIII. *Prop.* XIV.

Asymptoti, & sectio in infinitum productæ ad seipsas propiùs accedunt: & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo.

Ex hoc manifestum est, lineas AB, AC, *ad sectionem accedere propiùs, quàm omnes aliæ asymptoti: & angulum* BAC *minorem esse quolibet angulo, qui aliis eiusmodi lineis continetur.*

Theor. XV. *Prop.* XV.

Oppositarum sectionum asymptoti communes sunt.

Theor. XV. Prop. XVI.

Si in oppositis sectionibus quædam linea recta ducatur, secans vtramque linearum continentium angulum, qui deinceps est angulo sectiones continenti; cum vtraque oppositarum in vno tantùm puncto conueniet: & lineæ, quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos, & sectiones interiiciuntur, æquales erunt.

Theor. XVI. Prop. XVII.

Oppositarum sectionum, quæ coniugatę appellantur, asymptoti communes sunt.

Theor. XXVII. Prop. XXVIII.

Si vni oppositarum sectionum, quę coniugatę dicuntur, occurrat recta linea: & producta ad vtrasque partes extra sectionem cadat: cum vtraque sectionum, quę deinceps sunt, in vno tantùm puncto conueniet.

Theor. XVIII. Prop. XIX.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ducatur recta linea, quamuis ipsarum contingens: cum sectionibus, quæ deinceps sunt, conueniet: & ad tactum bifariam secabitur.

Theor. XIX. Prop. XX.

Si vnam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, recta linea contingat: & per ipsarum centrum ducantur duæ lineæ, vna quidem per tactum, altera verò contingenti æquidistans, quousque occurrat vni earum sectionum, quæ deinceps sunt, recta linea, quæ in occursu sectionem contingit, æquidistans erit lineæ per tactum, & centrum ductæ, quæ verò per tactus & centrum ducentur, oppositarum sectionum diametri erunt.

Theor. XX. Prop. XXI.

Iisdem positis ostendendum est punctum, in quo contingentes lineæ conueniunt, ad vnam asymptoton esse.

Theor. XXI. Prop. XXII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ad quamuis sectionem ducatur recta linea; & huic æquidistans altera ducatur, quæ cum vna ex sectionibus, quæ deinceps sunt, & cũ asymptotis conueniat: rectangulum constans ex portionibus lineæ ductæ inter sectionem, & asymptotos interiectis, quadrato lineæ, quæ ex centro ducitur, æquale erit.

Theor. XXII. Prop. XXIII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ducatur quædam recta linea ad quamuis sectionem: & huic æquidistãs ducatur, quę cũ tribus, quæ deinceps sunt, sectionibus cõueniat,

rectangulum constans ex portionibus lineæ ductæ inter tres sectiones interiectis, duplũ erit quadrati eius lineæ, quæ ex cẽtro ducitur.

Theor. XXIII. *Prop.* XXIV.

Si parabolæ duæ lineæ rectæ occurrant, vtraque in duobus punctis: & nullius ipsarum occursus alterius occursibus contineatur: conuenient inter se se extra sectionem.

Theor. XXIV. *Prop.* XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, vtraque in duobus punctis: nullius autem ipsarum occursus alterius occursibus contineatur conuenient quidem inter se se extra sectionem, sed tamen intra angulum, qui hyperbolem continet.

Theor. XXV. *Prop.* XXVI.

Si in ellipsi, vel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ non transeuntes per centrum se inuicem secent; bifariam se se non secabunt.

Theor. XXVI. *Prop.* XXVII.

Si ellipsim, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant: & si quidem ea, quæ tactus contingit per centrum transeat sectionis: contingentes lineæ sibi ipsis æquidistabunt: sin minus, conuenient inter se se ad easdem centri partes.

Theor. XXVII. *Prop.* XXVIII.

Si in coni sectione, vel circuli circumferentia duas lineas æquidistantes recta linea bifariam secet, diameter erit sectionis.

Theor. XXVIII. *Prop.* XXIX.

Si coni sectionẽ, vel circuli circũferentiã duæ rectæ lineæ contingentes in idem punctum conueniant: & ab eo ad punctum, quod lineam tactus contingentem bifariam secat, alia linea ducatur: sectionis diameter erit.

Theor. XXIX. *Prop.* XXX.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in vnum punctum conueniant; diameter, quæ ab eo puncto ducitur, lineam tactus contingentem bifariam secabit.

Th. XXX. *Prop.* XXXI.

Si vtramque oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingant: & si quidem ea, quæ tactus coniungit, per centrum transeat, contingentes lineæ æquidistantes erunt: sin minus. conuenient inter se se ad easdem partes centri.

Theor. XXX. *Prop.* XXXI.

Si vtrique oppositarum sectionum rectæ lineæ occurrant, ipsas vel in puncto contingentes, vel in duobus secantes; & productæ inter se

conueniant: punctum, in quo conueniunt, erit in angulo, qui deinceps est angulo sectionem continenti.

Theor. XXXII. Prop. XXXIII.

Si vni oppositarum sectionum recta linea occurrens; & producta ex vtraque parte extra sectionem cadat: cum altera sectione non coueniet: sed transibit per tres locos; quorũ vnus quidem est sub angulo sectionẽ cõtinente: duo verò sub iis angulis, qui deinceps sunt.

Theor. XXXXII. Prop. XXXIV.

Si vnam oppositarum sectionum recta linea contingat: & huic æquidistans ducatur in altera sectione: quæ à tactu ad medium lineæ æquidistantis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit.

Theor. XXXIV. Prop. XXXV.

Si diameter in vna oppositarum sectionum rectam lineam bifariam secet; quæ in termino diametri contingit alteram sectionem: lineæ bifariam sectæ erit æquidistans.

Theor. XXXV. Prop. XXXVI.

Si in vtraque oppositarum sectionum rectæ lineæ inter se æquidistantes ducantur: quæ ipsarum medium coniungit, oppositarum sectionum diameter erit.

Theor. XXXVI. Prop. XXXVII.

Si oppositas sectiones linea recta secet, non transiens per centrum: quæ à medio ipsius ad centrum ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta appellatur: transuersa verò diameter, ipsi coniugata est ea, quæ à centro ducitur æquidistans lineæ bifariam sectæ.

Theor. XXXVII. Prop. XXXVIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingant, in vnum punctum conuenientes: quæ ab eo puncto ad medium lineæ tactus coniungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta vocatur: transuersa verò, ipsi coniugata, quæ per centrum ducitur, lineæ tactus coniungenti æquidistans.

Theor. XXXVIII. Prop. XXXIX.

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ in vnum punctum conuenientes: quæ per punctum illud, & per centrum ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam secabit.

Theor. XXXIX. Prop. XL.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes in vnum conueniant: & per punctum, in quo conueniunt, linea ducatur, tactus cõiungenti æquidistans, & sectionibus occurrẽs: quæ ab occursibus ad medium lineæ tactus coniungentes ducuntur, sectiones ipsas contingunt.

Theor. XL. *Prop.* XLI.

Si in oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transenates per centrum, se se bifariam non secabunt.

Theor. XLI. *Prop.* XLII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum: bifariam se se non secabunt.

Theor. XLII. *Prop.* XLIII.

Si vnam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, recta linea in duobus punctis secet: & à centro duæ lineæ ducantur, vna quidem ad medium lineæ secantis, altera verò ipsi æquidistans: erunt hæ oppositarum sectionum coniugatæ diametri.

Probl. II. *Prop.* XLIV.

Data coni sectione diametrum inuenire.

Probl. III. *Prop.* XLV.

Data ellipsi, vel hyperbola centrum inuenire.

Probl. IV. *Prop.* XLVI.

Data coni sectione axem inuenire.

Probl. V. *Prop.* XLVII.

Data hyperbola, vel ellipsi axem inuenire.

Theor. XLIII. *Prop.* XLVIII.

His ita demonstratis reliquum est, vt ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Probl. VI. *Prop.* XLIX.

Data coni sectione, & puncto non intra sectionem dato, ab eo rectam lineam ducere, quæ sectionem contingat.

Probl. VII. *Prop.* L.

Data sectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes sectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Probl. VIII. *Prop.* LI.

Data sectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciet angulum dato angulo acuto æqualem.

Theor. XLIIII. *Prop.* LII.

Si ellipsim recta linea contingat, angulus, quem facit cum diametro per tactum ducta, non est minor angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

Probl. IX. *Prop.* LIII.

Data ellipsi contingentem lineam ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem: oportet autem acutum angulum datum non esse minorem angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

APOLLONII
PERGÆI CONICORVM
LIBER TERTIVS.

Ad Eudemum Pergamenum.

Theor. I. *Prop.* I.

SI coni ſectionem, vel circuli circumferentiam rectæ lineæ contingentes inter ſe conueniant: & per tactus ducantur, diametri, quæ contingentibus occurrant: triangula ad verticem facta ſibi ipſis æqualia erunt. *Videantur initio libri huius Lemmata* 14. *Pappi Alexandrini.*

Theor. II. *Prop.* II.

Iiſdem poſitis, ſi in coni ſectione, vel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum: & per ipſum æquidiſtantes contingentibus vſque ad diametros ducantur: quadrilaterum factum ad vnam contingentium, & ad vnam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum conſtituitur.

Theor. III. *Prop.* III.

Iiſdem poſitis, ſi in coni ſectione, vel circuli circumferentia duo puncta ſumantur; & per ipſa ducantur æquidiſtantes contingentibus vſque ad diametros: quadrilatera, quæ ab ipſis fiunt, in diametris conſtituta, inter ſe æqualia erunt.

Theor. IV. *Prop.* IV.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes inter ſe conueniant: & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes; triangula, quæ ad contingentes conſtituuntur, ſibi ipſi æqualia erunt.

Theor. V. *Prop.* V.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibiipſis occurrant: & in quauis ſectionum aliquod punctum ſumatur, à quo ducantur duæ lineæ, vna quidem contingenti æquidiſtans, altera verò æquidiſtans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur ad diametrum per occurſum ductam, à triangulo, quod eſt ad occurſum contingentium, differt triangulo facto ad contingentem & ad diametrum, quæ per tactum ducta fuerit.

Conſtat

Constat igitur triangulum KFL quadrilatero MGK æquale esse.

Theor. VI. Prop. VI.

Iisdem positis si in vna oppositarum sectionum aliquod punctum sumatur: & ab eo ducantur rectæ lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus, & diametris occurrant: quadrilaterum ab ipsis factum ad vnam contingentium, & ad vnam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum constituitur.

Theor. VII. Prop. VII.

Iisdem positis, si in vtraque sectione aliqua puncta sumantur: & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus, & diametris occurrant: quadrilatera à lineis ductis constituta ad diametros, inter se æqualia erunt.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Iisdem positis pro punctis KL sumantur CD, in quibus diametri cum sectionibus conueniant: & per ipsa contingentibus æquidistantes ducantur. Dico DG quadrilaterum quadrilatero FC; & quadrilaterum XI quadrilatero TO æquale esse.

Theor. IX. Prop. IX.

Iisdem positis, si alterum quidem punctum sit inter diametros, vt X: alterum verò sit idem, quod vnum punctorum CD, vt C: & æquidistantes ducantur. Dico triangulum CEO æquale esse quadrilatero KE: & quadrilaterum LO æquale ipsi LM.

Theor. X. Prop. X.

Iisdem positis, sumantur KL non tamen in punctis, in quibus diametri sectionibus occurrent. Demonstrandum est quadrilaterum LTRX quadrilatero OXKI æquale esse.

Theor. XI. Prop. XI.

Iisdem positis si in quauis sectione punctum sumatur: & ab ipso lineæ æquidistantes ducantur, vna quidem contingenti æquidistans: altera verò æquidistans ei, quæ tactus coniungit, triangulũ, quod ab ipsis fit ad diametrum per occursum contingentium ductam, à triangulo contento linea contingente, & diametro per tactum, differt triangulo, quód ad contingentium occursum constituitur.

Theor. XII. Prop. XII.

Iisdem positis si in vna sectione sumantur duo puncta: & ab vtrisque similiter æquidistantes ducantur: quadrilatera ab ipsis constituta inter se æqualia erunt.

Theor. XIII. Prop. XIII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes sectiones, quæ deinceps sunt, in vnum punctum conueniant, & per tactus diametri ducantur: triangula, quorum communis vertex est sectionem centrum, inter se æqualia erunt.

Theor. XIV. Prop. XIV.

Iisdem positis, si in quauis sectione punctum sumatur, & ab ipso ducantur lineæ æquidistantes contingentibus vsque ad diametros: triangulum, quod ad centrum constituitur, à triangulo circa eundem angulum differt triangulo basim habente lineam contingentem, & verticem sectionum centrum.

Theor. XV. Prop. XV.

Si vnam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes conueniant: & per tactus diametri ducantur: sumatur autem punctum in quauis sectionum coniugatarum: & ab ipso ducantur æquidistantes contingentibus vsque ad diametros: triangulum, quod ab ipsis ad sectionem constituitur, maius est, quàm triangulum, quod ad centrum, triangulo basim habente lineam contingentem, & verticem centrum sectionum.

Theor. XVI. Prop. XVI.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in vnum conueniant; & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea vni contingentium æquidistans, quæ & sectionem & alteram contingentium secet, vt quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, qui interiiciuntur inter sectionem, & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidistantem & tactum interiectæ.

Theor. XVII. Prop. XVII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ cõtingentes in vnum conueniant: sumantur autem in sectione duo quæuis puncta: & ab iis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & sibi ipsis & lineæ occurrant: vt quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter sectionem & linearum occursum ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur. *Vide Lemma Eutocij.*

Theor. XVIII. Prop. XVIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ contingentes in vnum conueniant: sumatur autem in quauis sectione aliquod punctum: & ab eo ducatur linea vni contingentium æquidistans, quæ & sectionem & alteram contingentium secet: vt quadrata contingentium inter se se, ita erit

rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter sectionem & contingentem ad quadratum lineæ inter æquidistantem & tactum interiectæ.

Theor. XIX. *Prop.* XIX.

Si oppositas sectiones duæ rectę lineæ contingentes in vnum conueniant, & ducantur contingentibus æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectioni occurrant: vt quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter sectionem, & linearum occursum, ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis, continetur.

Theor. XX. *Prop.* XX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per occursum ducatur linea tactus coniungenti æquidistans, quæ secet vtramque; sectionem, ducatur autem alia linea æquidistans eidem; sectionesque, & contingentes secans: erit vt rectangulum contentum lineis, quæ inter occursum contingentium & sectiones interiiciuntur ad quadratum lineæ contingentis, ita rectangulum, quod continetur lineis inter sectiones & contingentem interiectis, ad quadratum lineæ ad tactum abscissæ.

Theor. XXI. *Prop.* XXI.

Iisdem positis, si in sectione duo puncta sumantur: & per ipsa ducantur rectæ lineæ: vna quidem contingenti æquidistans, altera verò ęquidistans lineæ tactus coniungenti: quæ & sibiipsis, & sectionibus occurrant: erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter occursum contingentium, & sectiones ad quadratum contingentis, ita rectangulum contentum lineis inter sectiones, & linearum occursum interiectis, ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.

Probl. XXII. *Prop.* XXII.

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ inter se æquidistantes: ducantur autem aliæ lineæ, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant: vna quidem contingenti æquidistans, altera verò æquidistans ei, quæ tactus coniungit: erit vt transuersum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus coniungentem constituitur, ita rectangulum contentum lineis inter sectionem & linearum occursum interiectis ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.

Theor. XXIII. *Prop.* XXIII.

Si in oppositis sectionibus, quę coniugatę appellantur, duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contngentes conueniant in quauis sectione: ducantur autem aliquę linee contingentibus æquidi-

stantes, quę & sibi ipsis, & aliis sectionibus oppositis occurrant: vt quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum lineis, quæ inter sectiones, & occursum interiiciuntur, ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur. *Theor. XXIV. Prop. XXIV.*

Si in oppositis sectionibus, quas coniugatas appellamus, à centro ad sectiones ducantur duæ rectæ lineę, quarum vna quidem sit transuersa diameter, altera verò recta, & ducantur aliæ lineę his diametris ęquidistantes, quę & sibi ipsis & sectionibus occurrant, ita vt occursus sit in loco inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus lineę diametro transuersæ æquidistãtis, vnà cum eo ad quod rectangulum ex portionibus lineæ ęquidistantis rectę diametro proportionem habet eandem, quàm diametri rectę quadratum ad quadratum transuersæ: æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia transuersę diametri constituitur.

Theor. XXV. Prop. XXV.

Iisdem positis, sit linearum ipsis AC, BD æquidistantium occursus in vna sectionum DB, atque in puncto X, vt positum est. Dico rectangulum contentum portionibus lineę, que transuersę diametro ęquidistat, videlicet OXN, maius esse quàm illud, ad quod rectangulum ex portionibus lineę æquidistantis rectæ diametro, hoc est BXM, eandem proportionem habet, quàm rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia transuersæ diametri constituitur. *Theor. XXVI. Prop. XXVI.*

Quod si æquidistantium occursus ad punctum X sit in vna sectionum AC, vt positum est, rectangulum, quod continetur portionibus lineæ æquidistantis transuersæ diametro, hoc est LXF minus erit, quam illud, ad quod rectan gulum portionibus alterius lineæ contentum, hoc est RXG, eandem proportionem habet, quam rectę diametri quadratum ad quadratũ transuersæ: duplo quadrati eius, quod à dimidia transuersæ diametri constituitur.

Theor. XXVII. *Prop.* XXVII.

Si in ellipsi, vel circuli circumferentia coniugatæ diametri ducantur, quarum altera quidem sit recta, altera verò transuersa; & ducantur duę rectę lineę diametris æquidistantes, quæ & sibi & sectioni occurrant; quadrata ex portionibus lineæ æquidistantis transuersæ dametro, quæ inter sectionem, & linearum occursum interiiciuntur; assumentia figuras ex portionibus lineę, quæ rectæ diametro ęquidistat, inter linearum occursum, & sectionem interiectis, similes & similiter descriptas ei, quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transuersę diametri ęqualia erunt.

Th. XXVIII. *Prop.* XXVIII.

Si in oppositis sectionibus, quas coniugatas appellamus; coniugatæ diametri ducantur, vt earum altera recta sit, altera transuersa: & ducãtur duæ rectæ lineæ diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidistantis rectę diametro, quæ inter linearum occursum, & sectiones interiiciuntur, ad quadrata ex portionibus alterius lineæ, quæ transuersæ diametros æquidistat, inrersectionem & occursum linearum interiectis: eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum taansuersæ.

Th. XXIX. *Prop.* XXIX.

Iisdem positis, si linea rectæ diametrò æquidistans secet asymptotos: quadrata ex portionibus ipsius, quæ inter linearum occursum, & asymptotos interiiciuntur, assumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus lineę quę transuersæ diametro æquidistat, inter occursum linearum, & asymptotos interiectis eandem proportionem habent, quàm rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.

Th. XXX. *Prop.* XXX.

Si hyperbolem contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant; & per tactus linea producatur; per occursum verò ducatur linea vni asymptoton æquidistans: sectionemque & lineam contingentem tactus secans: quæ interiicitur inter occursum, & lineam tactus coniungentem à sectione bifariam diuidetur.

Th. XXXI. *Prop.* XXXI.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus linea producatur: per occursum verò ducatur linea asymptoto æquidistans, quæ sectionem & lineam tactus coniungentem secet: linea inter occursum, & eam quæ tactus coniungit, interiecta à sectione bifariam diuidetur.

Theor. XXXII. *Prop.* XXXII.

Si hyperbolæ duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus linea producatur: & per occursum verò contingentium ducatur linea, tactus coniungenti æquidistans; & per punctum quod coniungentes tactus bifariam secat ducatur linea æquidistans alteri asymptoton: quæ inter dictum punctum, & lineam æquidistantem interiicitur, à sectione bifariam diuidetur.

Theor. XXXIII. *Prop.* XXXIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ cõtingentes sibi ipsis occurrant; & per tactus line a producatur: per occursum verò contingẽtiũ

ducatur linea tactus contingenti æquidistans: & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam secat, ducatur linea æquidistans alteri asymptoton, conueniensque cum sectione, & cum linea æquidistante per occursum ducta, quæ inter dictum punctum, & lineam æquidistantem interiicitur; à sectione bifariam diuidetur.

Theor. XXXIV. *Prop.* XXXIV.

Si in vna asymptoton hyperbolæ aliquod punctum sumatur: ab eóque recta linea sectionem contingat: & per tactum ducatur æquidistans asymptoto: quæ per dictum punctum transit, alteri asymptoton æquidistans, à sectione bifariam diuidetur.

Theor. XXXV. *Prop.* XXXV.

Iisdem positis, si à sumpto puncto recta linea ducatur, sectionem in duobus punctis secans: erit vt tota ad eam, quæ extra sumitur, ita inter se se portiones illius, quæ intra sectionem continetur.

Theor. XXXVI. *Prop.* XXXVI.

Iisdem positis, si à puncto ducta linea, neque sectionem in duobus punctis secet, neque æquidistans, sit asymptoto, sed cum opposita sectione conueniat: erit vt tota ad lineã, quæ inter sectionem, & asymptoton ad eam, quæ inter asymptoton & alteram sectionem.

Theor. XXXVII. *Prop.* XXXVII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, vel sectiones oppositas, contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant. & per tactus linea producatur: ab occursu verò contingentium ducatur linea: sectionem in duobus punctis secans: erit vt tota ad eam, quæ extra sumitur, ita portiones inter se se, quæ à linea tactus coniungente fiunt.

Theor. XXXVIII. *Prop.* XXXVIII.

Iisdem positis, si per contingentium occursum ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidistans: & per punctum, quod coniũgentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea secans, & sectionem ipsam in duobus punctis, & lineam æquidistantem per occursum ductam: erit vt tota ad eam, quæ extra sumitur inter sectionem, & lineam æquidistantem, ita portiones inter se se, quæ à linea tactus coniungente efficiuntur.

Theor. XXXIX. *Prop.* XXXIX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus linea producatur: ab occursu verò contingentium ducta linea, & vtramque sectionem, & lineam tactus coniũgentem secet: erit vt tota ad eam, quæ extra sumitur, inter sectionem & coniungentem tactus, ita portiones inter se se, quæ inter sectiones & contingentium occursum interiiciuntur.

Theor. XL. *Prop.* XL.

Iisdem positis, si per occursum contingentium ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidistans: & à puncto quod coniungentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea secans vtramque sectionem, & æquidistantem ei, quæ tactus coniungit: erit vt tota ad eam, quæ extra sumitur inter æquidistantem & sectionẽ, ita portiones inter se se, quæ inter sectiones, & coniungentem tactus interiiciuntur.

Theor. XLI. *Prop.* XLI.

Si parabolem contingentes tres rectæ lineæ inter se conueniant, in eandem proportionem secabuntur.

Theor. XLII. *Prop.* XLII.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus ab extremo diametri ducantur lineæ æquidistantes ei, quæ ordinatim applicata est; & alia quæpiam linea quomodocumque contingens ducatur: abscindet ex ipsis lineas continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

Theor. XLIII. *Prop.* XLIII.

Si hyperbolem recta linea contingat, abscindet ex asymptotis ad sectionis centrum lineas continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis ab altera contingente abscissis ad verticem sectionis, qui est ad axem.

Theor. XLIV. *Prop.* XLIV.

Si hyperbolem, vel oppositas sectiones contingentes duæ rectæ lineæ asymptotis occurrant: quæ ad occursus ducuntur, lineæ tactus coniungenti æquidistantes erunt.

Theor. XLV. *Prop.* XLV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus ab extremo axis lineæ ad rectos angulos ducãtur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ad axem ex vtraque parte: quod in hyperbola quidem, & sectionibus oppositis excedat figura quadrata: in ellipsi verò deficiat: & ducatur linea sectionem cõtingens, occurrénsque eis, quæ sunt ad rectos angulos: lineæ, quæ ab occursibus ducuntur ad puncta ex comparatione facta, angulos rectos ad ea efficient.

Theor. XLVI. *Prop.* XLVI.

Iisdem positis, lineæ coniunctæ æquales facient angulos ad contingentes.

Theor. XLVII. *Prop.* XLVII.

Iisdem positis, linea ab occursu coniunctarum ad tactum ducta, perpendicularis est ad contingentem.

Theor. XLVIII. *Prop.* XLVIII.

Iisdem positis, ostendendum est lineas, quæ à tactu ducũtur, ad pũcta ex comparatione facta, æquales cõtinere angulos ad contingentem.

Theor. XLIX. *Prop.* XLIX.

Iisdem positis, si ab aliquo punctorum ad contingentem perpendicularis agatur, quæ à facto puncto ducuntur ad axis extrema, rectos angulos continebunt.

Theor. L. *Prop.* L.

Iisdem positis, si à sectionis centro ducatur linea contingenti occurrens: æquidistansque lineæ per tactum, & per vnum punctorum ductæ dimidio axis æqualis erit.

Theor. LI. *Prop.* LI.

Si in hyperbola, vel oppositis sectionibus ad axem comparetur rectãgulum æquale quartæ parti figuræ: excedensque figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad quamlibet sectionem rectæ lineæ inclinentur: maior minorem quantitate axis superabit.

Theor. LII. *Prop.* LII.

Si in ellipsi ad maiorem axem ex vtraque parte comparetur rectãgulum æquale quartæ parti figurę, defaciensque figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad sectionem rectę lineæ inclinentur: ipsi axi æquales erunt.

Theor. LIII. *Prop.* LIII.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel sectionibus oppositis ab extremo diametri ducãtur lineæ ordinatim applicatis æquidistantes: & à dictis terminis ad idem sectionis punctum lineæ ductę secent ęquidistantes: rectangulum ex abscissis factum æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

Theor. LIV. *Prop.* LIV.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidistantes: à tactibus verò ad idem sectionis punctum ductæ lineæ æquidistantes secent rectangulum ex abscissis cõstans ad quadratum lineæ tactus coniungentis, proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ab occursu contingentium ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ est intra sectionem, ad reliquæ portionis quadratum: & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

Theor.

Theor. LV. Prop. LV.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per occursum ducantur linea coniungenti tactus æquidistans: per tactus verò ducantur æquidistantes contingentibus: & à tactibus ad idem alterius sectionis punctum ducantur lineę, quæ ęquidistantes secent: rectangulum ex abscissis constans ad quadratum lineæ tactus coniungentis eãdem proportionem habebit, quam rectãgulum ex contingentibus factum ad quadratum lineæ ab occursu ad sectionem ductæ, quæ quidem coniungenti tactus æquidistet.

Theor. LVI. Prop. LVI.

Si vnam oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ cõtingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidistãtes: à tactibus verò ad idem alterius sectionis punctum ducantur lineæ, æquidistantes secent: rectangulum ex abscissis constãs ad quadratũ lineæ tactus coniungẽtis proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ est inter dictum punctum, & alteram sectionem, ad quadratum eius, quæ inter sectionem, & occursum interiicitur; & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

APOLLONII

PERGÆI

CONICORVM

LIBER QVARTVS.

Ad Attalum Præfatio.



EVDEMO Pergameno ad quẽ 3. priores libros miserat mortuo, 4. mittit Attalo, quem docet hoc libro cõtineri ad quot puncta plurima conorum sectiones inter se se, & circuli circumferentiæ occurrere possint, nisi totæ totis congruant. Præterea coni sectio, & circuli circumferentia; & oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad quot puncta plurima occurrant: ad hæc non pauca his similia. Ex his quod primo loco dictum est, Conon Samius

ad Trasidem scribens explicauit, non rectè in demonstrationibus versatus. Itaque Nicoteles Cyrenæus eum leniter reprehendit. De secũdo Nicoteles in libro contra Cononem mẽtionem sic fecit, tanquam quod facilè demonstrari posset. Sed tamen nos, inquit Apollonius, neque ab ipso, neque ab alio quopiam demõstratum inuenimus. Tertium verò, & eiusdem generis alia, ne in mẽtem quidem alicui vnquam venisse comperimus. At quæ diximus ab alijs demonstrata non fuisse, omnia multis, ac variis, nouisque theorematibus indigent, quorum plurima in tribus primis libris, reliqua in hoc exposuimus. Horũ igitur contemplatio non paruam vtilitatem affert, & ad compositiones problematum, & ad determinationes. Nicoteles quidem ob dissensionem, quæ illi cum Conone erat, scribit nihil eorum, quæ à Conone inuenta sunt, ad determinationes pertinere. Quod ille falso affirmat, nam & si omnino absque his determinationes reddere possimus, tamen ex his ipsis nonnulla faciliùs percipiuntur: vel hoc, quòd aliquid multipliciter fiat, vel quotupliciter, vel rursus quod nullo modo fiat: quæ quidem cognitio si antecesserit, ad quæstiones magnam præstat facultatem. Præterea ad definitionũ resolutiones theoremata hæc valde vtilia sunt: quæ etiam si absit vtilitas propter ipsas demonstrationes digna sunt vt recipiantur: multa enim alia in mathematicis disciplinis ob hoc ipsum & non ob aliquod aliud recipere consueuimus.

Theor. I. *Prop.* I.

Si in coni sectione, vel circuli circumferentia aliquod pũctum extra sumatur: atque ab eo ad sectionem ducãtur duæ rectæ lineæ, vna quidẽ contingens, altera verò in duobus pũctis secans: & quam proportionem habet tota linea secãs ad partem sui ipsius, quæ extra sumitur inter pũctum & sectionẽ interiecta in eandem diuidatur, quæ est intra, ita vt rectæ lineæ eiusdẽ rationis ad vnum punctum conueniãt: quæ à tactu ad diuisionem ducitur, occurret sectioni: & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum sectionem continget.

Theor. II. *Prop.* II.

Hæc quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt, at in sola hyperbola, si linea DB sectionem contingat; & DC in punctis E C secet: puncta verò E C contineant tactum ad B: & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum: similiter fiet demonstratio: possumus enim à puncto D aliam ducere contingentem *DA*, & quæ reliqua sunt ad demonstrationem perficere.

Theor. III. Prop. III.

Iisdem existentibus, puncta E C tactum ad B non contineant: sitque punctum *D* intra angulum asymptotis comprehensum, poterimus à puncto *D* alteram contingentem ducere, quæ sit *D A*, & reliqua similiter demonstrare.

Theor. IV. Prop. IV.

Iisdem positis, si occursus E C cõtineant tactum ad B: & punctum *D* sit in angulo, qui deinceps angulo asymptotis comprehenso: linea quæ à tactu ad diuisionem ducitur, occurret oppositæ sectioni: & quæ ab occursu ducitur, eandem sectionem continget.

Theor. V. Prop. V.

Iisdem positis, si punctum *D* sit in vna asymptoton: quæ à puncto B ad F ducitur, eidem asymptoto æquidistabit.

Theor. VI. Prrop. VI.

Si in hyperbola aliquod punctum extra sumatur, à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ: altera quidem contingens, altera verò æquidistãs vni asymptoton: & portio æquidistãtis inter sectionẽ, & punctum interiecta, æqualis sit ei, quæ intra sectionem continetur: linea, quæ à tactu ad factum pũctum ducitur, occurrit sectioni: & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum sectionem cõtinget.

Theor. VII. Prop. VII.

Iisdem positis, sit punctum *D* in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur. *D*ico etiam sic casum euenire.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Iisdem positis, sit punctum *D* in vna asymptoton: & reliqua eadem fiant. *D*ico lineam, quæ à tactu ad externam partem sumptæ ducitur, æquidistantem esse asymptoto, in qua est punctum *D*.

Theor. IX. Prop. IX.

Si ab eodem puncto duæ rectæ lineæ ducantur, quarum vtraque coni sectionem, vel circuli circumferentiam in duobus punctis secet: & quam proportionem habent totæ lineæ ad portiones, quæ extra sumuntur, in eam diuidantur, quæ sunt intra, ita vt partes eiusdem rationis ad idem punctum conueniant: quæ per diuisiones ducitur linea, sectioni in duobus punctis occurret: & quæ ab occursu ad punctum extra sumptum ducuntur, sectionem contingent.

Theor. X. Prop. X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in sola hyperbola; si alia quidem eadem sint, vnius autem rectę lineæ occursus contineãt occursus alterius: & punctum *D* sit intra angulum asymptotis comprehensum: eadem prorsus euenient, quæ dicta sunt, vt in secundo theoremate tradidimus.

Theor. XI. Prop. XI.

Iisdem positis, si vnius lineæ occursus alterius non contineant, & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum: & figura, & demonstratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

Theor. XII. Prop. XII.

Iisdem positis, si occursus vnius lineæ, alterius occursus contineãt: & punctum sumptum sit in angulo deinceps ei, qui asymptotis comprehenditur: linea per diuisiones ducta, si producatur, occurret oppositæ sectioni: & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum D, oppositas sectiones contingent.

Theor. XIII. Prop. XIII.

Iisdem positis, si punctum D sit in vna asymptoton, & reliqua eadem existant: quæ per diuisiones transit linea asymptoto, in qua est punctum, æquidistabit: & producta occurret sectioni: quæ verò ab occursu ad punctum ducitur, sectionem continget.

Theor. XIV. Prop. XIV.

Iisdem positis, si punctum D sit in vna asymptotori: & linea quidem DE sectionem in duobus punctis secet: D G verò alteri asymptoto æquidistans secet in vno tantùm; quod sit G; fiatque vt E D ad DH, ita EK ad KH: & ipsi D G ponatur æqualis G L; quæ per puncta KL transit linea, asymptoto æquidistabit, & sectioni occurret: quæ verò ab occursu ducitur ad D, sectionem continget.

Theor. XV. Prop. XV.

Si in sectionibus oppositis inter duas sectiones sumatur aliquod punctum, & ab ipso duæ lineæ ducantur; altera quidem contingens vnam oppositarum: altera verò vtramque secans: & quam proportionem habet linea inter sectionem, quam non contingit, & punctum interiecta ad lineam; quæ est inter punctum, & alteram sectionem, eandem habeat linea quædam maior ea, quæ inter sectiones interiicitur ad excessum ipsius in eadem recta, & ad eundem terminum cum linea eiusdem rationis: quæ à termino maioris lineæ ad tactum ducitur, occurret sectioni, & quæ ab occursu ducitur ad sumptum punctum, sectionem continget.

Theor. XVI. Prop. XVI.

Iisdem positis, sit punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: & reliqua eadem fiant. Dico lineam à puncto F ad C productam occurrere oppositæ sectioni: & quæ ab occursu ducitur ad D, eandem sectionem contingere.

Theor. XVII. Prop. XVII.

Iisdem positis, sit punctum D in vna asymptoton. Dico lineam, quæ ab F ad C ducitur, asymptoto, in qua est punctum, æquidistare.

Theor. XVIII. Prop. XVIII.

Si in ſectionibus oppoſitis aliquod punctum ſumatur inter duas ſectiones: & ab ipſo duæ lineæ ducantur, vtrâmque ſectionem ſecantes: & quam proportionem habent interiectæ inter vnam ſectionem & punctum ad eas, quæ inter idem punctum, & alteram ſectionem interiiciuntur, eandem habeant lineæ maiores iis, quæ ſunt inter ſectiones oppoſitas ad exceſſus ipſarum: quæ per terminos maiorum linearum tranſeunt, occurrent ſectionibus: & quæ ab occurſibus ad ſumptum punctum ducuntur, ſectiones contingent.

Theor. XIX. Prop. XIX.

Sumatur punctum D in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: ducantúrque rectæ lineæ ſectiones ſecantes: & vt dictum eſt, diuidantur. Dico eam, quæ per KG producitur, occurrere vtrique ſectionum: & quæ ab occurſibus ducuntur ad D ſectiones cõtingere.

Theor. XX. Prop. XX.

Si ſumptum punctum ſit in vna aſymptoton, & reliqua eadem fiant: linea, quæ tranſit per terminos exceſſuum, aſymptoto, in qua eſt punctum, æquidiſtabit: & quæ à puncto ducitur ad occurſum ſectionis, & lineæ per terminos tranſeuntis, ſectionem continget.

Theor. XXI. Prop. XXI.

Sint rurſus oppoſitæ ſectiones AB: ſitque punctum D in vna aſymptoton: & linea quidem DBK in vno tantùm puncto occurrat ſectioni B, alteri aſymptoto æquidiſtans: linea verò CDHG vtríque ſectioni occurrat: & vt CD ad DH, ita CG ad GH. & ipſi DB æqualis ſit BK. Dico lineam, quæ per puncta KG tranſit, occurrere ſectioni: aſymptotóque, in qua eſt punctum D. æquidiſtare: & quæ ab occurſu ad punctum D ducitur ſectionem contingere.

Theor. XXII. Prop. XXII.

Sint ſimiliter oppoſitæ ſectiones, aſymptotíque: & punctum D ſumatur in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: linea verò CDH ſecet vtráſque ſectiones: & DB alteri aſymptoto æquidiſtet: ſítque vt CD ad DH, ita CG ad GH: & ipſi DB æqualis ponatur BK. Dico lineam, quæ per puncta KG tranſit, occurrere vtrique oppoſitarum ſectionum: & quæ ab occurſibus ducuntur ad D ſectiones eaſdem contingere.

Theor. XXIII. Prop. XXIII.

Sint itidem oppoſitæ ſectiones AB: punctúmque D ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: & linea quidem BD ſectionẽ B in vno puncto tantùm ſecet, alteri aſymptoto æquidiſtans: linea verò DA ſimiliter ſectionem A: ſítque DB ipſi BG æqualis: & DA

ipsi AK. Dico lineam, quæ transit per KG, occurrere sectionibus, & quæ ab occursibus ad D ducuntur, sectiones contingere.

Theor. XXIV. *Prop.* XXIV.

Coni sectio coni sectioni, vel circuli circumferentiæ non occurrit ita vt pars quidem eadem sit: pars verò non sit communis.

Theor. XXV. *Prop.* XXV.

Coni sectio coni sectionem vel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quàm quatuor non secat.

Theor. XXVI. *Prop.* XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in vno puncto sese contingant, non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo.

Th. XXVII. *Prop.* XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis sese contingant, in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Theor. XXVIII. *Prop.* XXVIII.

Parabole parabolem non contingit, præterquàm in vnò puncto.

Theor. XXIX. *Prop.* XXIX.

Parabole hyperbolem non contingit in duobus punctis extra ipsam cadens.

Theor. XXX. *Prop.* XXX.

Parabole ellipsim, vel circuli circumferentiam non contingit in duobus punctis intra ipsam cadens.

Theor. XXXI. *Prop.* XXXI.

Hyperbole hyperbolem idem centrum habens in duobus punctis non continget.

Theor. XXXII. *Prop.* XXXII.

Si ellipsis ellipsim, vel circuli circumferentiam, idem centrum habens in duobus punctis contingat: linea coniungens tactus per centrum transibit.

Theor. XXXIII. *Prop.* XXXIII.

Coni sectio, vel circuli circumferentia, coni sectioni, vel circuli circumferentiæ, quæ non ad easdem partes conuexa habeat, ad plura puncta, quàm duo non occurret.

Theor. XXXIV. *Prop.* XXXIV.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia occurrat vni oppositarum sectionum in duobus punctis: & lineæ, quæ inter occursus interiiciuntur, ad easdem partes concaua habeant: producta linea ad occursus alteri oppositarum sectionum non occurret.

Theor. XXXV. *Prop.* XXXV.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia vni oppositarum sectionũ

occurrat: reliquæ ipsarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.

Theor. XXXVI. *Prop.* XXXVI.

Coni sectio, vel circuli circumferentia oppositis sectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

Theor. XXXVII. *Prop.* XXXVII.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia vtramque oppositarum sectionum concaua sui parte contingat, alteri oppositarum non occurret.

Theor. XXXVIII. *Prop.* XXXVIII.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia vtramque oppositarum sectionum contingat in vno puncto; oppositis sectionibus in alio puncto non occurret.

Theor. XXXIX. *Prop.* XXXIX.

Si hyperbole vni oppositarum sectionum in duobus punctis occurrat, conuexa habens è regione sita: quæ sibi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Theor. XL. *Prop.* XL.

Si hyperbole occurrat vtrique oppositarum sectionum: quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum in duobus punctis occurret.

Theor. XLI. *Prop.* XLI.

Si hyperbole vtramque oppositarum sectionum in duobus punctis secet, conuexa habens è regione sita: quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occurret.

Theor. XLII. *Prop.* XLII.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum in quatuor punctis secet, quæ ipsi opponitur sectio, non occurret alteri oppositarum.

Theor. XLIII. *Prop.* XLIII.

Si hyperbole alteri oppositarum in duobus punctis occurrat, concaua habens ad easdem partes: quę ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Theor. XLIV. *Prop.* XLIV.

Si hyperbole vni oppositarũ sectionum occurrat in tribus punctis, quæ ipsi opponitur alteri oppositarum, præterquam in vno puncto, non occurret.

Theor. XLV. *Prop.* XLV.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum contingat, alteram verò secet in duobus punctis: quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occcurret.

Theor. XLVI. *Prop.* XLVI.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum in vno puncto contingat; & secet in duobus punctis: quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Theor. XLVII. *Prop.* XLVII.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum contingens in alio puncto secet: quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret, præterquam in vno puncto.

Theor. XLVIII. *Prop.* XLVIII.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum in vno puncto contingat; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret ad plura puncta, quam duo.

Theor. XLIX. *Prop.* XLIX.

Si hyperbole contingat vtramque oppositarum sectionum: quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Theor. L. *Prop.* L.

Si vtraquè oppositarum sectionum in vno puncto contingat, ad easdem partes concaua habens: in alio puncto non occurret.

Theor. LI. *Prop.* LI.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum contingat in duobus punctis: quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Theor. LII. *Prop.* LII.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum contingat, conuexâ habens è regione sita: quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Theor. LIII. *Prop.* LIII.

Oppositæ sectiones oppositas non secant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Theor. LIIII. *Prop.* LIIII

Si oppositæ sectiones oppositas in vno puncto contingant: non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura, quàm duo.

Theor. LV. *Prop.* LV.

Si sectiones oppositæ oppositas contingant in duobus punctis: in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

PRÆFA-

PRÆFATIO SEREI ANTISNENSIS PHILOSOPHI,

in librum de sectione cylindri.

Serenus Cyro S. D.

CVm videam quam plurimos (amice Cyre) eorum qui in Geometria versantur, arbitrari transuersam cylindri sectionem longè diuersam esse ab ea sectione coni, quæ ellipsis appellatur: non committendum putaui, vt ab errore non auerterē tum eos ipsos, qui ita arbitrantur, tum eos, qui ab his illud ita esse persuaderi possent. Quamquam absurdum omnino videatur Geometras ipsos de problemate geometrico sine demonstratione quicquam affirmare: oratio enim probabilis, & sine vllo artificio à Geometria alienissima est. Itaque quoniam ita sentiunt, nos autem non assentimur, libuit geometricè demonstrare vnam, atque eandem specie sectionem necessariò fieri in vtrisque figuris, in cono, inquam, & cylindro, si modò ratione quadam & non simpliciter secentur. Quemadmodum autem veteres, qui conica tractarunt, non contenti communi intelligentia coni, nempè quod à triangulo rectangulo constitueretur: vniuersaliùs, & artificiosiùs de ipso conscripserunt, non tantùm rectos, sed etiam scalenos conos statuentes: ita & nobis faciendum erit. Nam cùm cylindri sectionem nobis tractandam proposuerimus, non solùm rectum cylindrum, sed etiam scalenum ponentes, quæ ad hanc contemplationem pertinent, latiùs, fusiùsque explicabimus. Et quamquam certò sciam neminem fore, qui facilè admittat non omnem conum rectum esse, communi notione id suadente: tamen contemplationis gratiâ, melius esse iudicaui vniuersaliori definitione ipsum comprehendere: etenim cylindri recti sectio eadem est quæ ellipsis recti coni: sed cylindro vniuersaliùs accepto, sectionem eius omni pariter ellipsi eandem esse necessariò continget: id quod nos in hoc libro probare instituimus. Attendenda autem priùs hæc sunt quæ ad propositam materiam definire oportet.

DEFINITIONES.

I. SI igitur duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſe æquidiſtantes, & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur: & vna circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit; ſuperficies, quæ à circumlata linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur: quæ quidem & in infinitum augeri poteſt: lineâ ipſa deſcribente in infinitum producta.

II. Cylindrus, figurâ, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

III. Cylindri baſis, circuli ipſi.

IV. Axis, recta linea, quę per circulorum centra ducitur.

V. Latus autem cylindri linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri: baſes vtraſque contingit: quam & circumlatam cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

VI. Cylindrorum, recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

VII. Scaleni autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent. Sed & hæc ex Apollonio ſcire oportet.

VIII. Omnis lineæ curuæ in vno plano exiſtentis diameter vocetur recta linea, quæ quidem ducta à linea curua, omnes, quę in ipſa ducuntur, rectæ cuipiam æquidiſtantes bifariam diuidit.

IX. Vertex lineæ, terminus ipſius rectæ, qui eſt ad lineam.

X. Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquæque linearũ æquidiſtantium.

XI. Coniugatæ diametri dicantur, quæ quidem à linea ordinatim ductæ ad coniugatas diametros, ipſas ſimiliter diuidunt.

XII. His igitur poſitis, & tranſuerſis ſectionibus cylindri punctum quod diametrum bifariam diuidit, centrum ſectionis vocetur.

XIII. Quæ à centro ad lineam perducitur, dicatur ea, quæ ex centro.

XIV. Quæ verò per centrum ſectionis tranſit, ęquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, & terminatur ab ipſa linea, ſecunda diameter dicatur. Demonſtrabitur enim lineas omnes in ſectione ductas, quæ quem diametro ęquidiſtant, bifariam ſecare.

XV. Illud etiam determinandum eſt, ſimiles ellipſes eſſe quarũ cõ-

iugatæ diametri ſe ſe ad angulos æquales ſecantes eandem habent proportionem.

Theorema I. Propoſitio I.

SI duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes, duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus ęquidiſtent, & ſint vtræque vtriſque æquales: quę terminos earũ coniungũt rectæ lineæ, & ipſæ æquales, & æquidiſtantes erunt.

Theorema II. *Propoſitio* II.

Si cylindrus plano ſecetur per axem, ſectio parallelogrammum erit.

Theor. III. *Prop.* III.

Si cylindrus plano ſecetur æquidiſtante ei parallelogrammo, quod ſit per axem, ſectio parallelogrammum erit, æquales ipſi angulos habens.

Theor. IV. *Prop.* IV.

Si curuæ lineæ recta ſubtendatur: & quæ ad lineam ad ſubtenſam perpendiculares ducuntur, poſſint æquale, ei quod ipſius ſubtenſæ partibus continetur: dicta linea circuli circumferentia erit.

Theor. V. *Prop.* V.

Si cylindrus plano baſibus æquidiſtante ſecetur, ſectio circulus erit, centrum habens in axe.

Theor. VI. *Prop.* VI.

✠ Si cylindrus ſcalenus plano per axem ſecetur, ad rectos angulos ipſi baſi: ſecetur autem & altero plano, recto ad parallelogrammum per axem, quod faciat communem ſectionem in parallelogrammo rectam lineam, æquales angulos continentem iis, qui ſunt parallelogrammi, non autem ipſius baſibus æquidiſtantem: ſectio circulus erit. Vocetur autem talis ſectio ſubcontrariæ.

Theor. VII. *Prop.* VII.

Cylindro dato, & puncto in ſuperficie ęius: per dictum punctum latus cylindri ducere.

Theor. VIII. *Prop.* VIII.

Si in ſuperficie cylindri duo puncta ſumantur non exiſtentia in latere parallelogrammi per axem: quæ dicta puncta coniungit recta linea intra cylindri ſuperficiem cadet.

Theor. IX. *Prop.* IX.

Si cylindrus plano ſecetur, neque baſibus æquidiſtante, neque ſub contrariè poſito, neque per axem, neque æquidiſtante ei, quod per axem fit parallelogrammo: ſectio neque circulus, neque parallelogrammum erit.

Simul verò & illud demonstratum est rectam lineam, quæ in sectione ipsi F G *æquidistans ducta bifariam diuidit* C D, *diametro basis æqualem esse.*

Theor. X. Prop. X.

Si cylindrus plano per axem secetur: sumatur autem aliquod punctum in eius superficie, quod non sit in latere parallelogrammi per axem: & ab ipso ducatur recta linea æquidistans rectæ cuipiam, quæ in eodem plano existit, in quo cylindri basis, & ad rectos incidit basi parallelogrammi per axem: cadet ea inter parallelogrammũ, & producta vsque ad alteram partem superficiei ab ipso parallelogrammo bifariam secabitur.

Theor. XI. Prop. XI.

Si cylindrus secetur plano, basis planum extra circulum secante: communis autem sectio perpendicularis sit ad basim parallelogrãmi per axem; vel ad eam, quæ in rectum ipsi cõstituitur: rectæ lineæ, quæ à sectione in superficie cylindri à secante plano facta ducuntur; æquidistantes lineę perpendiculari ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quę in rectum ipsi constituitur, in communem sectionem planorum cadent: & productæ vsque ad alteram sectionis partem, à communi planorum superficie bifariam diuidentur: quæ verò perpendicularis est ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quæ ipsi in rectum constituitur, cylindro recto existente, etiam ad communem planorum sectionem, parallelogrammi scilicet per axem, & secantis plani perpendicularis erit: scaleno autem existente cylindro non item, præterquam cum parallelogrammum per axem ad ipsam basim cylindri rectum fuerit.

Theor. XII. Prop. XII.

✠ Si duæ rectæ lineæ similiter secentur, erit vt quadratum primæ ad quadratum secundæ: ita quod fit ex primæ partibus rectangulum ad rectangulum ex partibus secundæ.

Theor. XIII. Prop. XIII.

✠ Si cylindrus plano secetur per axem, & seceturaltero plano basis planum secante, ita vt communis sectio basis, & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur: à sectione autem ad diametrum ducatur linea communi planorum sectioni æquidistans: poterit dicta linea spatium quoddam, ad quod rectangulum diametri sectionis partibus contentum eam proportionem habet, quam diametri sectionis quadratum ad quadratum diametri basis.

Theor. XIV. *Prop.* XIV.

Recta linea, quæ punctum, quod diametrum sectionis bifariam diuidit ordinatim in sectione applicatur, secunda diameter erit.

Theor. XV. *Prop.* XV.

Si cylindrus plano secetur basis planum secante: communis autem sectio plani basis, & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ ipsi in rectum constituitur: quæ à sectione ad diametrum ducitur linea, æquidistans communi planorum sectioni iam dictæ, poterit spatium quoddam, ad quod rectangulum diametri partibus contentum eam proportionem habet, quam diametri sectionis quadratum ad quadratum secundæ diametri: quæ verò à sectione ad secundam diametrum ducitur, æquidistans diametro, poterit spatium, ad quod rectangulum ex secundæ diametri partibus eam habet proportionem, quam quadratum secundæ diametri ad ipsum diametri quadratum.

Theor. XVI. *Prop.* XVI.

Si in cylindri sectione coniugatæ diametri sint, & fiat, vt diameter sectionis ad secundam diametrum, ita secunda diameter aliam quampiam: quę à sectione ad diametrum ordinatim applicata est, poterit spatium, quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam, quę inter ordinatim applicatam, & sectionem interiicitur: & deficiens figura simili ei, quæ diametro ipsa & tertia proportionali continetur

Th. XVII. *Prop.* XVII.

Si in cylindri sectione coniugatæ diametri sint: & fiat vt secunda diameter ad diametrũ, ita diameter ad aliam lineam: quæ à sectione ad secundam diametrum ordinatim applicatur, poterit spatium, quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam, quæ inter ordinatim applicatam, & sectionem interiicitur: & deficiens figura simili ei, quæ secunda diametro, & tertia proportonali inuenta continetur.

Th. XVIII. *Prop.* XVIII.

Si in sectione cylindri rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur, erunt quadrata earum ad spatia contenta lineis, quæ inter ipsas, & terminos transuersi lateris figuræ interiiciuntur vt rectum figuræ latus ad transuersum: inter se se verò, vt spatia, quæ lineis similiter sumptis continentur.

Th. XIX. *Prop.* XIX.

Itaque dico fieri posse, vt conum simul & cylindrum vna eademque ellipsi sectos ostendamus.

Probl. I. Prop. XX.

Cono dato & ellipsi, in eo cylindrum eadem ellipsi coni sectum inuenire.

Probl. II. Prop. XXI.

Cylindro dato & ellipsi, in eo conum eadem ellipsi cylindri sectum inuenire.

Probl. III. Prop. XXII.

Cono dato inuenire cylindrum, & vtrosque eodem plano secare, quod sectiones in vtrisque similes ellipses efficiat.

Probl. IIII. Prop. XXIII.

Cylindro dato inuenire conum, & vtrosque secare eodem plano, quod sectiones faciat in vtrisque ellipses similes.

Theor. XX. Prop. XXIV.

Sit recta linea A B, quæ secetur in punctis *C D*, & non sit A C maior quam *D B*. *D*ico si ad *A C* comparetur spatium æquale quadrato C B, excedens figura quadrata: latus excessus maius quidem esse, quam *C D*: minus verò, quàm C B.

Probl. V. Prop. XXV.

*D*ato cylindro ellipsi secto, conum constituere in eadem basi cylindri, eadémque altitudine: & sectum eodem plano, quod sectionem faciat ellipsim cylindri ellipsi similem.

Probl. VI. Prop. XXVI.

*D*atum cylindrum, vel conum scalenum possumus ex eadem parte infinitè secare duobus planis, non æquidistanter positis, quæ ellipses similes efficiant.

Probl. VII. Prop. XXVII.

*D*atum cylindrum scalenum, vel conum possumus ex oppositis partibus infinitè secare duobus planis, quæ ellipses similes efficiant.

Theor. XXI. Prop. XXVIII.

Ex his manifestum est cõiungationi similium ellipsium, quæ ex eadem parte fit, similem esse coniungationem quandam similium ellipsium ex oppositis partibus; quippe quæ diametros habet ex contraria parte diametris respondentes.

Theor. XXII. Prop. XXIX.

Rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto cylindricam superficiem contingunt ex vtraque parte: omnes in vnius parallelogrammi lateribus tactiones fiunt.

Theor. XXIII. Prop. XXX.

Hoc demonstrato. Sit parallelogrammum A B C *D* : & eius basi *A B* æquidistantes ducantur E F, G H : sumpto autem aliquo puncto

k, non existente in plano parallelogrammi, iungantur, k *E*, k *F*, k *G*, k *H*: quæ productæ occurrant plano cuipiam æquidistanti ipsi A B *C D* in punctis L M N X: & iungantur L N M X. *D*ico lineam M X ipsi L N æquidistantem esse.

Theor. XXIV. *Prop.* XXXI.

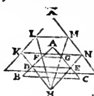
Si extra triangulum punctum sumatur: & ab eo ducatur quædam recta linea triangulum secans: à vertice autem ad basim alia agatur, quæ secet lineam ductam, ita vt quam proportionē habet tota ad partem extra triangulum assumptam, eādem habeat eius, quæ intra triāgulum continetur, maior portio ad minorē quælibet recta linea, quæ ex eodem puncto ducta triangulum secat, ab ea, quæ à vertice ad basim ducitur, in eandem proportionem secatur. Quod si lineæ ab eo puncto in triangulum ductæ secentur in eandem proportionem: recta linea, quæ ipsas secat in triangulo, per trianguli verticem necessariò transibit.

Theor. XXV. *Prop.* XXXII.

Rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto conicam superficiem contingunt ex vtraque parte: omnes in vnius trianguli lateribus tractiones faciunt.

Theor. XXVI. *Prop.* XXXIII.

Hoc demonstrato, sit triangulum ABC, cuius basi DC æquidistātes ducantur DEFG, & sumpto aliquo pūctoH, quod non sit in triāguli plano, iungantur HD, HE, HG, HE; & productæ occurrāt plano alicui, quod plano ABC æquidistet, in punctis KLMN: planum igitur per lineas DEKH ductum secabit etiam planum KLMN: & in eo communem sectionem faciet rectam lineam KN, ipsi DE æquidistātem. Eodem modo & planum ductum per lineas FG, LH faciet rectā lineam LM æquidistantem ipsi FG. Quoniam igitur planum k*HL* æquidistantibus planis ABC, k*LMN* secatur, communes ipsorum sectiones *KL*, *DF* æquidistantes sunt, & eadem ratione æquidistantes MN, GE, ergo productæ KL, M M conueniant inter se se, conueniant in X: & cum duæ lineæ *KX*, *XN* duabus D A, A E æquidistent, angulus ad X, angulo ad A æqualis erit. Rursum cum duæ *XK*, *KN* æquidistent duabus AD, *D E*, erit angulus *XKN* angulo *A D E* æqualis: triangula igitur *XKN*, *ABC* inter se se similia erunt.



Quod si punctum *H* fingamus esse corpus illumināš, & triangulum ABC eius radiis oppositum, siue per se, siue in cono, continget radios, qui ab ipso *H* emittuntur, per triangulum ABC facere triangulum vmbræ *XKN* ipsi ABC simile; & quamquam hæc ad opticam contemplationem pertineant, & ob id à proposita tractatione aliena videantur, tamen perspicuè constat sine iis, quæ hoc loco de coni & cylindri sectione, hoc est de elipsi, & rectis lineis cum contingentibus demonstrata sunt, problema eiusmodi absolui non posse: quare non temerè, sed necessario de his sermonem instituimus.

SERENI LIBER SECVNDVS
DE SECTIONE CONI.

Serenus Cyro S. D.



CVM sectio conorum, optime Cyre, quæ per verticem efficitur, triangula quidem in conis constituat, variam autem, & perpulchram habeat contemplationem: & à nullo eorum, qui ante nos fuerunt, quod sciam, pertractata sit: optimè me facturum existimauir, si locum hunc non inexplicatum relinquere, perscriberemque de his, quæcumque mihi in mentem venerunt: maiorem autem ferè partem eorum, quæ profundiore geometria indigere videntur, arbitror me hoc libro complexum esse: neque enim mirum videri debet, si aliquid quod scribi oporteret, prætermiserim, vtpote qui primus hanc contemplationem aggressus: quamobrem par est, vel te, cum in horum studium incubueris, vel posteriorum aliquem, qui in hæc inciderit, à me impulsum, ea, quæ prætermissa sunt, supplere: sunt tamen nonnulla, quæ consultò præterierim, vel quòd manifesta essent, vel quod ab aliis tractata: siquidem in omni cono sectionem triangulum esse, quando per verticem secatur, cum aliis demonstratum sit nos omisimus, ne aliena nostris inuentis insererentur. Quæ autem in prōptu essent, & quæ vnusquisque per se nullo negotio intelligere posset, non existimaui me scribere oportere, ne legentium animos parum attentos facerem. Sed iam ad id quod propositum est accedamus.

Theor.

Theorema I. *Propositio* I.

SI quatuor rectarum linearum prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: rectangulum contentum prima & quarta maius est eo, quod secunda & tertia continetur.

Theor. II. *Prop.* II.

Si in triangulo orthogonio ab altero angulorum ad vnum latus, quod est circa rectum angulum linea ducatur: habebit ducta linea ad eam, quæ inter ipsam & perpendicularem interiicitur, maiorem proportionem, quàm quæ à principio subtenditur recto angulo ad iam dictum latus.

Theor. III. *Prop.* III.

Si conus rectus planis per verticem secetur, eorum, quæ in sectionibus fiunt trangulorũ, æquales habentia bases inter se æqualia erũt.

Theor. IV. *Prop.* IV.

In conis rectis similia triangula inter se æqualia erunt.

Theor. V. *Prop.* V.

Si conus rectus planus per verticem secetur, & per axem, & extra axem: sitque axis non minor semidiametro basis: eorum, quæ fiunt, triangulorum maximum est illud, quod per axem constituitur.

Theor. VI. *Prop.* VI.

Licet idem & aliter vniuersaliùs demonstrare, ex omnibus simpliciter triangulis, quod maiorem basim habet, illud maius esse.

Theor. VII. *Prop.* VII.

Si in cono recto triangulum per axem maximum sit triangulorum omnium, quæ extra axem constituuntur: axis coni minor erit semidiametro basis.

Probl. I. *Prop.* VIII.

Conum rectum, cuius axis non sit minor semidiametro basis, plano per verticem ducto ita secare, vt faciat triangulum, quod ad triangulum per axem proportionem habeat datam. Oportet autem datam proporionem esse minoris ad maius.

Theor. VIII. *Prop.* IX.

Si planis conus rectus per verticem secetur, & per axem, & extra axem: triangulorũ autem, quæ fiunt extra axem vnum aliquod æquale sit triangulo per axem: axis coni semidiametro basis minor erit.

Theor. IX. *Prop.* X.

Iisdem manentibus demonstrandum est, si rursus planum ducatur

Ss

per verticem conum secans, faciénsque in basi rectam lineam, cuius magnitudo inter bases æqualium triangulorum continetur: triangulum illud vtrisque triangulis æqualibus maius esse.

Probl. II. Prop. XI.

Datum conum rectum, cuius axis sit minor semidiametro basis, plano per verticem ita secare, vt faciat triangulum æquale ei, quod per axem constituitur.

Theor. X. Prop. XII.

Si conus rectus planis per verticem secetur: & in vno eorum triangulorum, quæ fiunt, linea à vertice ad basim perpendicularis ducta æqualis sit dimidiæ basis: erit illud triangulum maius omnibus triangulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur.

Probl. III. Prop. XIII.

Datum conum rectũ, cuius axis sit minor semidiametro basis, plano per verticem ita secare, vt faciat triangulum maius omnibus triãgulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur.

Probl. IV. Prop. XIV.

Datum conum plano per axem ad rectos angulos ipsi basi secare.

Theor. XI. Prop. XV.

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, triangulum in cono factum scalenum erit, cuius maius latus maxima erit linearum omnium, quæ à vertice coni ad basis circumferentiam ducuntur: & minus latus linearum omnium similiter dictarum minima erit: aliarum verò, quæ maximè propinquior est, maior erit, quàm quæ ab ipsa magis distat.

Theor. XII. Prop. XVI.

Si in triangulo à vertice ad punctum, quod basim bifariam diuidit, recta linea ducatur: quadrata ex lateribus facta æqualia erunt quadratis, quæ fiunt ex basis partibus, & duplo quadrati eius lineæ, quæ à vertice ad basim ducta fuerit.

Theor. XIII. Prop. XVII.

Si quatuor linearum prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: & quadratum primæ ad quadratũ secundæ maiorem habebit proportionem, quàm tertiæ quadratũ ad quadratum quartæ. Quod si quadratum primæ ad quadratum secundæ maiorem proportionem habeat, quàm tertiæ quadratum ad quadratum quartæ: & prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Theor. XIV. Prop. XVIII.

Si duæ magnitudines æquales inæqualiter diuidantur: & alterius

partium maior ad minorem proportionē maiorem habeat, quàm partium alterius maior ad minorē, vel æqualis ad æqualem: prædictarū partium maior omniū maxima, minor verò omnium minima erit.

Theor. XV. *Prop.* XIX.

Si duo triangula & bases æquales habeant, & lineas, quæ à vertice ad punctū, quod basim bifariam secat ducuntur: alterius autē maius latus ad minus maiorē proportionem habeat, quàm reliqui maius latus ad minus, vel æquale ad æquale: triangulū illud, cuius maius latus ad minus maiorem habet proportionem, altero minus erit

Theor. XVI. *Prop.* XX.

Si duo triangula inæqualium laterum & bases æquales habeant, & lineas, quæ à vertice ad punctum basim bifariam secans ducuntur: minoris trianguli maius latus ad minus maiorem proportionem habebit quàm maioris maius latus ad minus.

Probl. V. *Prop.* XXI.

Datum conum scalenum plano per verticem ita secare, vt in cono triangulum æquicrure efficiat.

Theor. XVII. *Prop.* XXII.

Triangulorum, quæ in cono scaleno per axem constituuntur, maximum est æquicrure: & minimum, quod est ad rectos angulos basi coni: reliquorum verò maximo propinquius maius est eo, quod plus distat.

Probl. VI. *Prop.* XXIII.

In dato cono scaleno à vertice ad circumferentiam basis lineā ducere, ad quam maxima proportionem datā habeat: oportet autem datam proportionem esse maioris ad minus, & minorem esse ea quā habet maxima linearum, quæ in cono ducuntur, ad minimam.

Probl. VII. *Prop.* XXIV.

Sit datum triangulum scalenum ABC, cuius latus BA maius sit latere A C, & basis B C bifariam in D secetur, ducatúrque A D; sit autē E D perpendicularis ad B C: & æqualis ipsi D A: & sit AF ad eandem BC perpendicularis: oporteátque aliud triangulum constituere maius triangulo ABC, quod habeat lineā ductam à vertice ad punctū basim bifariā secans, vtrique ipsarū DE, DA æqualem: & ad triangulum ABC proportionem eandem habeat, quàm H maior ad G minorem: habeat autem H ad G non maiorem proportionem, quàm DE ad A F.

Probl. VIII. *Prop.* XXV.

Datum conum scalenum secare per axem plano faciente in co triangulum, quod ad minimum triangulorum per axem proportionem datam habeat: oportet autem datam proportionē esse maioris

ad minus, neque maiorem ea, quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum.

Theor. XVIII. *Prop.* XXVI.

Si conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi,& linea,quę à vertice facti trianguli ad baſim perpendicularis ducitur,non minor ſit baſis ſemidiametro: erit triangulum ad rectos angulos baſi maximum omnium, quæ extra axem in cono conſtituuntur,& baſes habent dicti trianguli baſi æquidiſtantes.

Th. XIX. *Prop.* XXVII.

At ſi à puncto A ad C D perpendicularis ducta minor ſit ſemidiametro baſis: non erit triangulum ACD maximum omnium, quæ baſes ipſi CD ęquidiſtantes habent: demonſtratio autem & figura eadem eſt.

Theor. XX. *Prop.* XXVIII.

Si cono ſcaleno planis per verticem ſecto, in baſibus æquidiſtantibus triangula æqui crura fiant: ſitque axis coni non minor ſemidiametro baſis triangulum æqnicrure per axem tranſiens maximum erit omnium ęquicrurium, quæ ex ea parte, ad quam axis inclinat, conſtituuntur.

Theor. XXI. *Prop.* XXIX.

Si in triangulo orthogonio ab angulo recto ad ſubtenſam quædam linea ducatur: habebit ducta ad partem,quę inter ipſam, & vnam continentium angulum rectum interiicitur,maiorem proportionē, quàm reliqua rectum angulum continens ad lineam ſubtenſam.

Theor. XXII. *Prop.* XXX.

Si cono ſcaleno planis per verticem ſecto,in baſibus ęquidiſtantibus æquicruria triangula conſtituantur ex ea parte, ad quam axis inclinat:& dictorum triangulorum vnum aliquod ęquale ſit triangulo æquicruri per axem: recta linea,quæ à vertice ad baſim trianguli perpendicularis ducitur,ipſo axe minor erit.

Theor. XXIII. *Prop.* XXXI.

Si cono ſcaleno per verticem planis ſecto in baſibus æquidiſtantibus æquicruria triangula conſtituantur ex ea parte, ad quam axis inclinat:& dictorum triangulorum vnum aliquod æquale ſit triangulo æquicruri per axem:axis coni ſemidiametro minor erit.

Theor. XXIIII. *Prop* XXXII.

Si cono ſcaleno planis per verticem ſecto, in baſibus æquidiſtantibus triangula ęquicruria conſtituantur ex ea parte, à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem tranſiens non erit omnium eiuſmodi triangulorum minimum.

Theor. xxv. Prop. xxxiii.

Si in eadem basi duo triangula constituãtur: & alterius quidem latus sit ad rectos angulos basi: alterius verò ad angulos obtusos: sitque ambligonij trianguli altitudo non minor altitudine orthogonij: angulus, qui ad orthogonij verticem angulo, qui ad verticem ambligonij maior erit.

Theor. xxvi. Prop. xxxiv.

Iisdem positis, si trianguli orthogonij angulus ad verticem non maior sit eo, qui continetur linea vertices triangulorum coniungente, & latere ambligonij, quod obtusum angulum cum basi efficit: linea in triangulo orthogonio subtensa angulo recto ad eam, quæ est ad rectos angulos basi, minorem habet proportionem, quàm subtensa angulo obtuso in ambligonio ad eam, quæ est ad angulos obtusos.

Theor. xxvii. Prop. xxxv.

Iisdem positis, si in triangulo orthogonio subtensa angulo recto ad eam, quæ est ad rectos angulos basi maiorem proportionem habeat, quàm angulo obtuso subtensa in ambligonio ad eam, quæ est ad angulos obtusos: angulus ad verticem orthogonij maior est angulo, qui linea vertices triangulorum coniungente, & ea, quæ est ad angulos obtusos basi continetur.

Theor. xxviii. Prop. xxxvi.

Si cono scaleno per verticem planis secto, in basibus æquidistantibus triangula æquicruria constituantur ex ea parte, à qua axis declinat: angulum æquicrure per axem transiens omnium eiusmodi triangulorum neque maximum, neque minimum erit.

Theor. xxix. Prop. xxxvii.

In omni cono scaleno, cum triangula per axem potestate infinita sint: lineæ, quæ à vertice coni ad bases dictorum triangulorum perpendiculares ducuntur, omnes in vnius circuli circumferentiam cadunt: quiquidẽ est in eodẽ plano, in quo basis coni, & circa diametrũ interiectam inter centrum basis, & perpendicularem, quæ à vertice coni ad dictum planum ducitur.

Quare constat dictas perpendiculares à puncto sublimi ad circuli circumferentiam cadentes in coni superficie ferri; cuius quidem basis est circulus à casu perpendicularium descriptus, & vertex idem, qui est primi coni vertex.

Probl. ix. Prop. xxxviii.

In cono scaleno dato aliquo triangulo per axem, quod neque maximum sit, neque minimum: inuenire aliud triangulum per axem, quod vnà cum dato, vtrisque maximo & minimo per axem sit æquale.

Theor. XXX. Prop. XXXIX.

Si duorum triangulorum per axem bases abſcindant æquales circumferentias ad diametrum, quæ per lineam perpendicularem ducitur: triangula inter ſe æqualia erunt. Vocentur autem eiuſdẽ ordinis.

Theor. XXXI. Prop. XL.

Triangulorum per axem, quæ eiuſdem ſunt ordinis, & æqualia & inter ſe ſimilia erunt.

Theor. XXXII. Prop. XLI.

Si coni ſcaleni axis æqualis ſit baſis diametro: erit vt maximum triangulorum, quæ per axem conſtituuntur ad minimum, ita minimum ad æquicrure, quod eſt ad rectos angulos baſi.

Theor. XXXIII. Prop. XLII.

Rurſus ſit vt triangulum EAE ad CAD, ita CAD ad HAK. Dico axem BA ſemidiametro baſis æqualem eſſe.

Theor. XXXIV. Prop. XLIII.

Si circulus circulum ſecet per centrum ipſius deſcriptus: & ab altera eorum ſectione ducantur lineæ ſecantes circumferentiam, quæ per centrum trãſit, & ad alterius circuli circumferentiam protrahantur: recta linea inter conuexam alterius circuli circumferentiam, & inter concauam alterius interiecta æqualis eſt lineæ, quæ à communi ſectione lineæ ductæ, & circumferentiæ per centrum, ad alteram communem circulorum ſectiõnem perducitur.

Theor. XXXV. Prop. XLIV.

Si in portione circuli inflectantur rectæ lineæ: maxima quidem erit, quæ ad punctum medium inflectitur: aliarum verò ſemper ipſi propinquior remotiore maior erit.

Theor. XXXVI. Prop. XLV.

Si quatuor rectis lineis inæqualibus exiſtentibus quadrata maximæ, & minimæ æqualia ſint quadratis reliquorum: recta linea conſtans ex maxima & minima minor erit ea, quæ ex reliquis conſtat.

Theor. XXXVII. Prop. XLVI.

Si duæ rectæ inæquales diuidantur: & partium minoris quadrata æqualia ſint quadratis partium maioris: earum omnium maxima quidem erit maior maioris pars, minor verò minima.

Theor. XXXVIII. Prop. XLVII.

Si duæ rectæ lineæ æquales ita diuidantur, vt rectangulum contentum partibus vnius ęquale ſit ei, quod alteriu partibus continetur: erunt vnius partes partibus alterius æquales.

Theor. XXXIX. Prop. XLVIII.

Si conus ſcalenus per axem ſecetur; eorum, quæ fiunt triangulorum

quod maius est maiorem perimetrum habet:& cuius trianguli maior perimeter, illud maius est.

Ex quibus perspicuum est in conis scalenis, maximi quidem triangulorum, quæ fiunt per axem, hoc est æquicruris perimetrum esse maximam, minimi verò hoc est eius, quod est ad rectos angulos basi coni, perimetrum minimam esse; & aliorum semper quod maius est maiorem perimetrum habere, quàm quod minus.

Theor. XL. Prop. XLIX.

Rectorum conorum æqualium, & dissimilium triangula per axem ex contraria parte respondent suis basibus.

Theor. XLI. Prop. L.

Quorum conorum rectorum triangula per axem ex contraria parte respondent suis basibus, ij inter se sunt æquales.

Theor. XLII. Prop. LI.

Si conorum basis ad basim duplam proportionem habeat eius, quam conus ad conum: triangula per axem inter se æqualia erunt.

Th. XLIII. Prop. LII.

Si triangula per axem inter se æqualia sint:& basis ad basim duplam proportionem habebit eius, quam conus habet ad conum.

Theor. XLIV. Prop. LIII.

Recti coni æquealti duplam inter se proportionem habent eius, quàm triangula per axem.

Theor. XLV. Prop. LIV.

Si coni inter se se duplam proportionem habeant eius, quam triangula per axem: ipsi æquealti erunt.

Theor. XLVI. Prop. LV.

Si recti coni ex contraria parte respondeant suis axibus: triangula per axem inter se æqualia erunt.

Theor. XLVII. Prop. LVI.

Si triangula per axem inter se æqualia sint:& coni ex contraria parte suis axibus respondebunt.

Theor. XLVIII. Prop. LVII.

Si coni recti ex contraria parte suis basibus respondeant: triangula per axem inter se triplam proportionem habebunt eius quam basis habet ad basim ex contraria parte.

Theor. XLIX. Prop. LVIII.

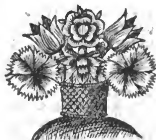
Quorum conorum rectorum triangula per axem inter se triplam proportionem habent eius, quam basis ad basim ex contraria parte coni suis basibus ex contraria parte respondebunt.

Theor. L. Prop. LIX.

✠ Si rectus conus ad conum rectũ duplam proportionem habeat eius, quam basis ad basim: triangulum per axem ad triangulum per axem triplam proportionem habebit, quam trianguli basis ad basim.

Theor. LI. Prop. LX.

Si triangulum per axem ad triangulum per axem triplam proportionem habeat eius, quam trianguli basis ad basim; conus ad conum duplam proportionem habebit, quam coni basis ad basim.



IN

IN CLARISSIMI VIRI

CLAVDII MYDORGII

CONICA:

PRÆFATIO.

ELementa Conica quæ ſequuntur non pendent à præcedentibus Apollonianis, quibus ſimpliciora ſunt, fontéſque detegunt ex quibus occultè hauſit. Primus liber directè probat, quæ Pergæus ſolùm indirectè, & ex abſurdo demonſtrarat: neque ſolùm ad ſolidorum problematum determinationes, & compoſitiones, vt libri Apolloniani, ſed etiam ad experimenta Phyſica collineat; vt hocce primo libro 4. Pergæi libros habeas.

Secundus agit de Conicarum linearum deſcriptione Geometrica in plano, per puncta; dum ad totius operis calcem methodi mechanicæ & organicæ reijciuntur. Tertius & quartus de eiuſdem nominis coni ſectionum inuicem comparatione: quos hactenus editos legimus; reliquos fruſtra ſperaturi, niſi precibus ab autore poſſit eos aliquis extorquere.

Quintus igitur de coni ſectionum portionibus, & de coni portionum ſectionibus. Sextus de datis Conicis, ſiue problematibus coni ſectiones determinantibus. Septimus de adſcriptis, & inſcriptis conicis, ſiue de maximis & minimis ad ſpecularia, & dioptricem ſpectantibus. Octauus denique lineas conicas, & conoideas ſuperficies è propria cuiuſque naturæ, & habitudine ad radium ſiue in opaco, ſiue in diaphano ad inuicem comparat: tandémque præcipua circa reflexum, & refractum myſteria non vulgo cognita deteget, quorum nouâ luce conſtanter ad cuiuſuis propoſiti ſpeculi, aut optatæ lentis diaphanæ fabricam accingaris.

Tt

De nominibus autem sectionum, vnde ortæ sint, facilè iudices ex 11, 12 & 13 prop. l. 1. Apollonij, vbi rectas à singulis sectionibus ad principales diametros ordinatim applicatas expendens, demonstrauit in parabola quidem, ipsarum quadratis æqualia rectangula, latitudines habentia contiguis interceptis diametri portionibus æquales, ad aliquam rectam (quam vocat rectā sectionis diametrū, vel rectum latus, Mydorgius verò parametrum) applicata nec eam excedit, nec ab ea deficit, sed ei conuenit; quod sequente 10 prop. l. 1. demonstratur: ille itaque propter istam applicationem conuenientem, ei parabolæ, vel applicationis nomen indidit.

Cumque vidisset in aliis duabus sectionibus, ordinatim applicatarum quadratis æqualia istiusmodi rectangula ad sectionis parametrum applicata, in hyperbola quidem ipsam excedere; in ellipsi verò ab eadem deficere figura simili, similiterque posita ei quæ à transuersa diametro, & contigua parametro continetur; quæ est 13. prop. l. seq. illis excessus, & defectus nomina fecit. Sed poterat etiam circulo, vt pote coni sectioni, nomen ellipsis vniformis tribuere, cùm suas transuersas diametros, & parametros, & figuras ab ipsis constantes habeat; & instar ellipseos, ordinatarum quadratis æqualia rectangula, latitudines habentia interceptis diametri portionibus æquales, ad contiguas parametros applicata, semper deficiant figura simili, similiterque posita ei quæ à transuersa diametro, & eadem parametro constituitur: de quibus vid. 4. & 5. prop. l. p. A . & 2, 3 & 13 Myd. qui tamen à proprijs coni sectionibus circulum reijcit, in quibus si cum triangulo numeretur, futuræ sint 5 sectiones: neque Eutocij rationem de sectionum nominibus adprobat.

Sunt & alia plurima in illis sectionibus consideranda, verbi gratiâ, in parabola diametros omnes principali diametro, siue ex generatione, & idcirco inuicem æquidistare; in hyperbola, ellipsi, & circuli circumferentia ad inuicem inclinari, & coire, pérque commune sectionis centrum transire: quamobrem in parabola quamcunque rectam diametro æquidistantem, eiusdem parabolæ diametrum esse: in aliis tribus prædictis, quamcunque rectam per sectionis centrum ductam, aut ei occurrentem, & intra sectionem perductam, eiusdem etiam sectionis esse diametrum, vt ad prop. 27. Myd. monet.

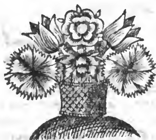
Porrò Vietex analysis praxis nostros Geometras eò perduxit, vt

iam oftendant nullum effe problema quod non foluant; quale, verbi causâ fuerit iftud à Girardo des Argues propofitum, & à viro illuftri, cuius nomine hi Conicorum libri gaudent, vt etiam à noftro Geometra, & ab alijs folutum.

Datâ in plano fectione coni, non circulo, datoque extra idem planum puncto, per quod tranfiens recta linea infinitè producta circumducatur circa coni fectionem datã, donec eò reftituatur vnde moueri cœpit; defcribatque hoc motu fuperficiem quandam. Quæritur an fuperficies illa fit conica, & vtrum planum eam ita fecare poffit, vt fectio fit circuli circumferentia. Quòd fi ita fit, quæritur ipfius plani fecantis pofitio.

Operæ verò fuerit pretium, fi quifque propriâ manu diagrammata è cuiuflibet propofitionis regione pingat, præfertim verò ad 2. librum, in quo plurimæ propofitiones capitalibus litteris fignificant ad illarum intellectum requiri figuras.

Nota verò fequentes conicorum libros ita conceptos & editos, vt nullâ ratione Conicis Apollonianis egeant, folofque fex primos Euclidis libros fupponant: hinc fit vt ab iftorum poffis incipere lectione, eófque poftea cum præcedentibus Apollonij comparare.





CLAVDII MYDORGII PATRICII PARISINI

CONICORVM,

LIBER PRIMVS.

De Elementis Conicis, siue de Coni sectionum ortu & generatione, ac propria cuiusque natura.

DEFINITIONES.

1. SVPERFICIES Conica dicitur, ea quam ducta à manente sublimi puncto per circuli circumferentiam in eodem non existentem plano recta linea interminata, & circa eandem circumferentiam circumducta donec ad idem eiusdem punctum redeat à quo cæpit moueri, describit.

2. Vertex superficiei Conicæ dicitur, manens punctum à quo educta recta linea superficiem conicam describit.

3. Axis superficiei conicæ dicitur, recta linea à vertice conicæ superficiei ad centrum circuli, circa cuius circumferentiam circumducta recta linea eandem superficiem descripsit perducta.

4. Conicæ superficies oppositæ, siue ad verticem existentes, dicuntur, quæ simul eadem recta linea vltra verticem producta, & circa eandem circuli circumferentiam circumducta describit. Ideóque & communem verticem, & axes in directum habent.

5. Conus autem dicitur, solida figura contenta circulo, & conicâ superficie à vertice ad eiusdem circuli circumferentiam interceptâ.

6. Vertex coni idem est qui & superficiei conicæ ipsum conum continentis.

7. Basis coni dicitur, circulus ad cuius circumferentiam educta, & circumducta recta linea superficiem conicam descripsit.

8. Axis coni dicitur idem, qui superficiei conicæ, conum continentis. Recta nempe à vertice coni ad centrum circuli, qui eiusdem est basis, perducta.

9. Oppositi coni, siue ad verticem existentes, dicuntur, qui oppositis superficiebus conicis continentur, ideóque & verticem communem, & axes in directum habet.

10. Conus rectus dicitur, cuius axis ad rectos ipsius basi angulos insistit.

11. Conus scalenus dicitur, cuius axis non ad rectos ipsius basi angulos insistit.

12. Coni sectionem cum Apollonio intelligimus, lineam in coni superficie, quæ est communis plani cuiuspiam conum diuidentis & eiusdem superficiei sectio interminata, aut vbique sibi ipsi continua. Ideóque & in eodem etiam plano existit.

13. Conicam lineam intelligimus, cuiuscunque coni sectionis portionem.

14. Rectas lineas in sectione, aut portione, ductas dicimus, quæ vtrinque in ipsa sectione, aut portione terminatur.

15. Diametrum cuiuscunque coni sectionis, aut portionis, dicimus, quamcunque rectam lineam intra sectionē ductam, quæ binas quascunque rectas lineas in ipsa sectione, aut portione ductas inuicem æquidistantes bifariam diuidit. Quæ & intercepta diameter etiam dicitur.

16. Ordinatam autem ad diametrum, siue ordinatim applicatam intelligimus, vnamquamque linearum in coni sectione, aut portione, ductarum ab eadem diametro bifariam sectarum, aut cuipiam bifariam sectæ æquidistantium.

17. Axem cuiuscunque coni sectionis, aut portionis dicimus, diametrum quæ ordinatim ad ipsam applicatas bifariam, & ad angulos rectos, diuidit. Qui & intra sectionem interceptus axis etiam dicetur.

18. Verticem coni sectionis, aut portionis, dicimus, terminum cuiuscunque diametri qui in ipsa est sectione, aut portione, dicetúrque in axe vertex supremus.

19. Parametrum coni sectionis dicimus, rectam lineam à cuiuslibet coni sectionis, aut portionis, vertice eductam ordinatim ad contiguam diametrum applicatis æquidistantem: cui comparantur, & secundum quam æstimantur, & possunt omnes quæcunque à coni sectione, aut portione, ad eandem diametrum ordinatim applicantur. Quæ & recta iuxta quam possunt ad diametrum à coni sectione, aut portione ordinatim ductæ dicetur. Quæ, si ab axis termino sit educta, recta parameter: sin autem, parameter simpliciter dicetur.

PROPOSITIONES 59.

1. SI conus plano per verticem secetur, sectio erit triangulũ, *idemque contingit si per axem secetur, cùm axis coni per eius verticem transeat.*

2. Si conus plano secetur æquidistante basi, erit facta in superficie coni sectio circuli circumferentia.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

1. SVbcontrariam positionem dicimus, quando bina triangula similia ad communem verticem angulum posita bases habent non parallelas. Ideoque & ipsa triangula dicentur subcontrariè posita. Ideoque etiam bases subcontrariè inuicem positæ.

2. Subcontrariam coni sectionem dicimus, siue conus secetur duobus planis ad idem per axem triangulum rectis, & ab ipso ad verticem abscindentibus bina triangula similia, sed subcontrariè posita, siue conus per axem iam sectus plano ad basim recto, rursus secetur plano ad triangulum per axem recto, & ab ipso ad verticem abscindente triangulum simile, sed subcontrariè positum.

PROPOSITIO III.

SI conus scalenus plano secetur subcontrariè basi, erit facta in superficie coni sectio circuli circumferentia.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. PArabolam dicimus, quamcunque coni sectionem, cuius diameter alterutri crurum trianguli per axem secti coni æquidistat.

2. Hyperbolam dicimus, quamcunque coni sectionem cuius diameter producta alterutri crurum trianguli per axem secti coni infra verticem occurrit.

3. Ellipsim dicimus, quamcunque coni sectionem, cuius diameter vtrique crurum trianguli per axem secti coni infra verticem occurrit, eiusdem basi neque æquidistans, neque subcontrariè posita.

4. Oppositas sectiones dicimus, binas hyperbolas in oppositis superficiebus ab vno eodémque plano non per verticem sectis factas.

5. Transuersam diametrum dicimus, rectam lineam quæ in hyperbola interceptæ cuilibet diametro in directũ est posita, vel in ellipsi ipsa est intercepta diameter continuata, & vtrobique vtroque trianguli per axem secti coni crure intercipitur. Quæ & in oppositis sectionibus, vel ellipsi, veluti & in circuli circumferentia, cùm sit diameter, vtrinque etiam à sectione terminatur. Quæ si intercepto axi sit in directum, aut sit ipse axis continuatur, transuersus etiam axis dicetur.

6. Centrum coni sectionis dicimus, pũctum in quod diametri omnes concurrunt. Quodque transuersam quamcunque diametrum bifariam diuidit.

7. Figuras hyperbolarũ, vel ellipsium, veluti & circuli circunferentiarum, dicimus, parallelogramma sub earumdem sectionum transuersis diametris, & contiguis parametris contenta. Quarum illæ transuersa dicentur latera, hæ coefficientia.

8. Secundam diametrum dicimus, rectam lineam quæ in ellipsi, vel in oppositis sectionibus, veluti & in circuli circumferentia, ordinatim ad aliquam diametrum applicatis æquidistans per centrum ducta, & ab ipso bifariam secta, media proportionalis est inter latera figuræ ad eandem diametrum factæ.

9. Coniugatas diametros dicimus, binas rectas lineas in ellipsi, vel in oppositis sectionibus, veluti & in circuli circumferentia, per centrum ductas, quarũ vtraque diameter est, & rectas lineas alteri æquidistantes vtrinque sectione terminatas bifariam diuidit. Quare si etiam ad angulos rectos, coniugati axes dicentur: & in ellipsi, etiam extremæ diametri.

10. Principalem coni sectionis diametrum, siue diametrum ex generatione, aut ex coni sectione, dicimus, rectam lineam quæ plani trianguli per axem secti cuiuslibet coni & plani secantis, ipsámque in superficie coni sectionem generantis, communis est sectio ipso cono facta. Vnde & ipsi respondens, siue contigua, parameter etiam principalis: & ex ipsis constantes figuræ etiam principales; & coniugatæ diametri principales.

11. Assumptas coni sectionum diametros, aut parametros, dicimus diametros omnes & parametros quæcũque ad principales primò positas, aut ad axes sectionum comparantur. Ideoque & assumptæ figuræ etiam, & assumpta eorumdem latera, & assumptæ coniugatæ diametri nonnunquam occurrent.

12. Vmbilicum parabolæ dicimus, punctum in eiusdem axe intra sectionem signatum, à supremo vertice distans spatio quadrantis rectæ parametri.

13. Vmbilicos hyperbolarum & ellipsium dicimus, puncta inearumdem vniuscuiusque axe signata, ab vnoquoque transuersi axis termino distantia spatio rectæ, cuius quadrato rectangulum æquale quartæ parti figuræ, sub eodem axe transuerso & recta parametro factæ, ipso transuerso axi applicatum in hyperbola quidem excedit, & in ellipsi deficit.

PROPOSITIONES.

4. SI conus plano per axem secetur, secetúrque & alter plano quod basim coni secet secundum rectam lineam quæ ad basin trianguli per axem sit perpendicularis: communis autem plani secantis, & trianguli per axem sectio sit alterutri crurum eiusdem trianguli æquidistans, erit facta in superficie coni sectio parabola: eiusque diameter communis plani secantis & trianguli per axem sectio.

5. Si conus plano per axem secetur, seceturque & altero plano quod basim coni secet secundum lineam rectam quæ sit ad basim trianguli per axem perpendicularis: communis autem placio secantis, & trianguli per axem sectio alterutri crurum eiusdem trianguli vltra verticẽ producto occurrat, erit facta in superficie coni sectio hyperbola, cuius erit diameter communis plani secantis & trianguli per axem sectio.

6. Si conus plano per axem secetur, secetúrque & altero plano quod basim coni, aut eius planum productum, secet secundum rectam lineã quæ ad basim trianguli per axem, aut ad eam quæ ipsi in directum est, sit perpendicularis: communis autem plani secantis, & trianguli per axem sectio vtrique crurum eiusdem trianguli infra verticem occurrat, basi non æquidistans, neque subcontrariè posita: conusque, si opus est, produci intelligatur; erit facta in superficie coni sectio ellipsis, cuius erit diameter communis plani secantis & trianguli per axem sectio.

7. In omni parabolà, si à sectione ad diametrum binæ rectæ lineæ sint ordinatim applicatæ, erunt quadrata ipsarum ad inuicem, vt contiguæ ab ipsis interceptæ ad verticem diametri portiones.

8. In omni hyperbola, vel ellipsi, vt & in circuli circumferentia, si à sectione ad interceptam diametrũ binæ rectæ lineæ ordinatim sint applicatæ; erunt quadrata ipsarum ad inuicem, vt rectangula sub contiguis diametri portionibus ab vtroque transuersæ termino sumptis ad inuicem.

Lemma.

Lemma I. 9. Si ſit quadratum quodlibet, & rhombus quadrato æquilaterus, atque etiàm rectangulum quodcumque, & parallelogrãmum ipſi æquilaterum, rhombóque æquiangulum; vt quadratum ad rectangulum, ita erit rhombus ad parallelogrammum, & conuerſim.

10. In omni parabola, ſi à vertice ſectionis recta ſit ordinatim ad diametrum applicatis ducta æquidiſtans, quæ ſe habeat ad quamlibet interceptam eiúſdem diametri portionem, vt quadratum contiguæ ordinatim applicatæ ad eiuſdem interceptę diametri portionis quadratum, erunt ſingularum omnium ab eadem ſectione ad eandem diametrum ordinatam applicatarum quadratis, vel rhombis, æqualia ſingula rectangula, vel parallelogramma, eidem rectæ à vertice ductæ adiacentia, latitudinéſque aut latera habentia interceptas diametri portiones à vertice.

11. Si in coni ſectione diameter quampiam rectam lineam bifariam ſecet, & omnes ipſi æquidiſtantes in eadem ſectione ductas bifariam quoque ſecabit. *Bifariam autem ſecta erit ad diametrum ordinatim applicata.*

12. Si conus plano per axem ſectus, rurſus alio plano ſecetur ſecundum lineam quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio parabola: quæ erit ratio rectanguli ſub trianguli per axem cruribus ad baſis eiuſdem quadratum, eadem erit & rectæ vtroque ſectionis & coni vertice interceptæ ad contiguam ſectionis parametrum.

13. In omni hyperbola, vel ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, ſi à vertice ſectionis recta ſit ordinatim ad diametrum applicatis ducta æquidiſtans, quæ ſe habeat ad tranſuerſam diametrum, vt cuiuſlibet ordinatim applicatæ quadratum ad rectangulum ſub contiguis diametri portionibus ab vtroque trãſuerſæ termino ſũptis, erũt ſingularum omniũ ab eadẽ ſectione ad eãdem diametrũ ordinatim ductarũ quadratis vel rhombis æqualia ſingula rectangula vel parallelogramma eidem rectæ à vertice ductæ adiacentia, latitudinéſque aut latera habentia interceptas à vertice diametri portiones, & in hyperbola quidem excedentia, in ellipſi autem, veluti & in circuli circumferentia, deficientia figuris ſimilibus ſimilitérque poſitis ei quæ à tranſuerſa diametro, & eadem recta à vertice ducta formatur. *Vide 2. Corollaria.*

15. Si conus plano per axem ſectus rurſus alio plano ſecetur ſecundum lineam quæ ad baſim trianguli per axem, aut ipſi æquidiſtãtem, ſit perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio hyperbola, ſiue ellipſis, cuius diametro parallela acta ſit à vertice coni ad baſim

eiusdem, vbi opus, productam: quæ erit ratio quadrati ductæ parallelæ ad rectangulum sub contiguis basis partibus ab vtroque eiusdem termino sumptis, eadem erit & transuersæ sectionis diametri ad eiusdem contiguam parametrum.

15. Si circulum qui basis est coni recta contingat linea in eodem existens plano, & à vertice coni per contactum recta agatur; planum per vtramque productum superficiem coni continget: eritque contactus in eadem linea à vertice coni ducta.

16. Si conus plano per axem sectus rursus plano quod neque basi æquidistet, aut subcontrariè sit, positum, neque per verticem transeat, secetur secundum lineam quæ ad basim trianguli per axem, aut ipsi æquidistantem, sit perpendicularis, faciátque in superficie sectionem quamcunque; & sumpto quolibet in facta sectione puncto, per ipsum recta agatur, circuli, qui basis est coni, aut ipsi æquidistat, circumferentiam contingens, & in eodem existens plano, siquidem ducta cõtingens basi trianguli per axem æquidistat: quæ à vertice trianguli ducetur contingenti æquidistans productæ sectionis diametro occurret in puncto, à quo ad assumptum in eadem sectione punctum ducta recta linea ipsam sectionem in eodem præassumpto puncto continget.

17. Si à vertice cuiuscunque coni sectionis recta ducatur ordinatim ad diametrum applicatis æquidistans; ipsa sectionem in eodem verticis puncto continget. Quare cuiuscunque sectionis parameter sectionem in vertice contingit, cùm ordinatis æquidistet.

18. Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta sit ordinatim applicata, erunt interceptæ vtrinque à vertice diametri portiones æquales.

19. Si hyperbolem, aut ellipsim, vt & circuli circumferentiam recta contingat productæ diametro occurrens, & à contactu ad diametrum recta sit ordinatim applicata: erunt diametri portiones ab vtroque transuersæ termino ad contingentem sumptæ inuicem, vt eiusdem diametri portiones vtroque eodem respondente termino & ordinatim ducta interceptæ inuicem.

20. Si in parabola à sumpto quolibet in sectione puncto recta ad diametrum ordinatim sit applicata; & interceptæ diametri portioni à vertice æqualis in directum apponatur, recta quæ à facto in producta diametro termino ad assumptum in sectione punctum ducetur, sectionem in eodem assumpto puncto continget.

21. Si parabolem recta contingat productæ diametro occurrens,

quæ à vertice ad ipsam recta ducetur ordinaris æquidistans poterit quadrato, vel rhombo spatium æquale quadranti rectanguli, vel parallelogrammi, sub producta diametro, & contigua parametro.

22. Si in hyperbole, aut ellipsi, vt & in circuli circumferentia à sumpto quolibet in sectione puncto recta ad diametrum ordinatim sit applicata; & quæ fuerit diametri portionum applicata, & vtroque transuersæ termino interceptarum ratio inuicem, eadem sit eiusdem diametri partium ab eodem vtroque respondente termino ad punctum in ea signatum sumptarum inuicem, recta quæ à signato in diametro puncto ad assumptum in sectione punctum ducetur, sectionem in eodem præassumpto puncto continget.

23. Si hyperbolem, aut ellipsim, vt & circuli circumferentiam recta contingat cum diametro conueniens, & à tactu ad diametrum recta ordinetur: erit quadrato dimidiæ transuersæ diametri æquale rectangulum sub interceptis ordinatim ducta & contingente diametri portionibus à centro sumptis, vel subinterceptis, tum ordinatim ducta, & contingente diametri portionibus.

24. Iisdem positis; erit, in dictis sectionibus, rectangulo sub diametri partibus vtroque transuersæ termino & contingente interceptis æquale rectangulum sub eiusdem diametri partibus contingenti contiguis à centro & ordinatim applicata sumptis.

25. Iisdem adhuc positis; erit, in dictis sectionibus, rectangulo sub diametri partibus vtroque transuersæ termino & ordinatim applicata interceptis æquale rectangulum sub eiusdem diametri partibus applicatæ contiguis à centro & contingente sumptis.

26. Si hyperbolem, aut ellipsim, veluti & circuli circumferentiam, recta contingat linea & ab vtroque transuersæ diametri termino rectæ ordinatim applicatis æquidistantes eidem occurrant: quæ ex ipsis à contingente abscindentur portiones, quadranti figuræ ad diametrum factæ æquale continebunt rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum.

27. Si hyperbolem, aut ellipsim, velut & circuli circumferentiam, recta contingat occurrens ei quæ per centrum sectionis ordinatim applicatis ducetur æquidistans, & à tactu recta diametro parallela eidem per centrū ductæ occurrat: erit quadranti figuræ ad diametrū factæ æquale rectang. aut parallelogr. figuræ æquiangulum, sub interceptis per centrum ductæ partibus à diametro factis contentum. *Vide monitum vtilissimum ad sequentium propositionum intellectum.*

28. Si parabolam recta contingat, quæ per tactum diametro, aut

axi, æquidistans intra sectionem ducetur, rectas omnes in sectione ductas contingenti æquidistantes bifariam secabit. *Vide Coroll.*

29. Si hyperbolem, vel ellipsim, vt & circuli circumferentiam recta contingat; quæ per tactum & centrum recta intra sectionem ducetur, rectas omnes in eadem sectione ductas contingenti æquidistantes bifariam secabit. *Vide Coroll.*

30. Si in parabola binæ quælibet rectæ à sectione ad assumptam quamcunque rectam diametro, aut axi parallelam ducantur æquidistantes ei quæ sectionem in eiusdem assumptæ termino contingit, erunt æquidistantium quadrata inuicem, vt contiguæ eiusdem assumptæ portiones, à contactu ad inuicem.

Iisdem positis, si in contingente sumatur recta quæ se habeat ad interceptam à contactu quamcunque rectæ diametro, aut axi, æquidistantis portionem, vt quadratum contiguæ contingenti æquidistantis à sectione ductæ ad ipsius interceptæ quadratum: erunt singulis contingenti æquidistantium rhombis æqualia singula ipsis æquiangula parallelogramma eidem contingenti adiacentia, lateráque habentia interceptas à contactu contiguas æquidistantis diametro portiones. *Vide Coroll.*

32. Si in hyperbola, aut ellipsi, binæ quælibet rectæ à sectione ad assumptam quamcunque rectam per centrum ductam agantur æquidistantes ei quæ sectionem in communi assumptæ rectæ termino contingat: erunt æquidistantium quadrata inuicem, vt rectangula sub contiguis eiusdem assumptæ partibus à dicto termino, & ab altero æqualiter à centro distante sumptis inuicem.

33. Iisdem positis, si vt DI quadratum ad rectangulum ZIE, ita sit sumpta in contingente recta GE ad rectam EZ, erunt contingenti æquidistantium à sectione ad assumptam rectam per centrum ductam applicatarum rhombis singulis æqualia singula æquiangula parallelogramma eidem contingenti adiacentia, lateráque habentia contiguas interceptas à contactu eiusdem assumptæ portiones, & in hyperbola quidem excedentia, at in ellipsi deficientia figuris similibus similiterque positis ei quæ ab assumpta per centrum ducta & contingente formatur. *Vide Coroll.*

34. Si in ellipsi recta diametrum quampiam bifariam diuidens, eiusque contiguæ parametro æquidistans ducatur vtrinque sectione terminata; sectionis erit diameter media inter præassumptas proportione. Et quæ in ipsius alterutro termino contiguæ sectionis parameter sumetur, in continua omnium erit proportione. *Vide Coroll.*

Lemma II. 35. Si communes binorum planorum se inuicem secantium cum aliquo plano sectiones æquidistantes fuerint inuicem; erit & ijsdem æquidistans communis amborum eorumdem planorum sectio.

36. Si circulum qui basis est coni recta contingat in eodem existens plano, & per tactum & coni verticem bina agantur plana, quorum alterum coni superficiem secet secundum lineam à tactu ad basis diametrum perpendicularem, alterum eandem contingat: & sit à quocumque alio secanti æquidistantes plano facta quæcumque in eiusdem coni superficie hyperbola; contingens planum productũ eiusdem hyperbolæ diametro trãsuersæ occurret in sectionis centro.

37. Si circulum qui basis est coni recta cõtingat linea in eodem existens plano: & à tactu ad basis diametrum recta ducatur perpendicularis, per quam & coni verticem planum producatur: & à quolibet alio ipsi æquidistante plano sit facta quæcumque in eiusdem coni superficie hyperbola: communisque ęquidistantis plani & basis coni sectio ad rectam contingentem producatur, quæ à centro hyperbolæ per communem earundem occursum recta quantumcunque producitur linea cum sectione, etiam quantumlibet producta, non coincidet. Vocabiturque sectionis asymptotos.

38. Iisdem positis; quæ à vertice sectionis ad vtramlibet asymptoton recta ducetur linea communi plani secantis & basis coni sectioni æquidistans poterit quadrato, vel rhombo, spatium ęquale quadranti figurę sectionis ad transuersam diametrum factę. *Vide Corollarium.*

39. Si in hyperbola ducta recta linea bifariam secetur, & vtrinque producta cum vtraque asymptoto conueniat; erit quadranti figuræ ad diametrum per bifariæ sectionis punctum ductam factę ęquale vnumquodque rectangulum, aut parallelogrammum figurę æquiangulum, sub partibus sectæ vtrinque à sectione factis contentum. *Vide duo Coroll.*

40. Hyperbola & asymptoti propiùs semper ad seipsas accedent quo longiùs producentur, & ad interuallum tandem peruenient dato quolibet interuallo minus.

41. Si angulum asymptotis contentum quæpiam diuidat linea; producta interceptæ sectioni tandem occurret. *Vide Corollarium & Monitum.*

42. Si coni ad verticem existentes plano per axem secentur; erunt facta triangula ad verticem posita similia, & eorum bases æquidistantes inuicem. *Vide Coroll.*

43. Si coni ad verticem existentes plano secentur non per verticem; erunt factæ in oppositis superficiebus oppositę sectiones hyperbolæ, quarum communis erit transuersa diameter: & vnius parameter alterius parametro æqualis erit & æquidistans. *Vide duo Coroll.*

44. Si ellipsim, aut oppositas sectiones binæ rectæ contingant inuicem occurrentes; quæ ab occursu ad medium lineæ tactus coniungentis recta ducetur linea sectionum erit diameter, diametro, quæ rectæ tactus coniungenti æquidistat, coniugata. *Vide duo Coroll.*

45. Si oppositarum sectionum alteram recta contingat linea; quæ per centrum eidem æquidistans ducetur, sectionum communis erit diameter communi per tactum ductæ diametro coniugata.

46. Si oppositarum sectionum alteram recta contingat linea vtrinque asymptotis terminata; quæ eidem æqualis & æquidistans per centrum ducetur ab ipso bifariam secta, sectionum communis erit secunda diameter.

47. Si parabolem recta contingat linea cum axe producto conueniens; quæ à tactu ad sectionis vmbilicum recta ducetur, æqualis erit axis portioni vmbilico & recta sectionem in eodem præassumpto puncto contingente interceptæ. *Vide duo Coroll.*

48. In omni parabola, recta linea quæ ab vmbilico ad sectionem educetur ordinatim ad axem applicata, interceptę axis portionis erit dupla. Et quæ ab eodem vmbilico ad sectionem aliter educetur, æqualis erit eidem axis portioni vertice & vmbilico interceptæ, vnà cum eiusdem axis portione inter verticem & ordinatim ab eductæ termino applicatam interceptæ.

49. Si hyperbolem, aut ellipsim, recta contingat linea, quæ à tactu ad vtrumque sectionis vmbilicum rectæ ducentur lineæ æquales ad contingentem angulos facient.

50. Si hyperbolem, aut ellipsim recta contingat linea: & ab vtroque vmbilico ad tactum binæ inclinentur lineæ; quæ à centro ad contingentem ducetur alterutri æquidistans, dimidio transuersi axis æqualis erit.

51. Si in hyperbola aut ellipsi ab vtroque vmbilico ad idem sectionis punctum binæ inclinentur rectæ lineæ, in hyperbola maior minorem quantitate transuersi axis superabit: & in ellipsi erunt simul transuerso axi æquales.

52. Data coni sectione, eiusdem diametrum inuenire. *Vide Coroll.*

53. Data quacumque hyperbola, aut ellipsi; eiusdem centrum inuenire.

54. Data coni ſectione, eiuſdem axem inuenire.

55. Data quacumque coni ſectione, & puncto non intra ſectionem dato, ab eodẽ rectam lineã ducere quæ ſectionẽ cõtingat. *Vide Coroll.*

56. Data cuiuſcumque coni ſectionis diametro: contiguam eiuſdem parametrum exhibere.

57. Datæ cuiuſcumque hyperbolæ aſymptotos inuenire.

58. Propoſitarum coni ſectionum vmbilicos inuenire.

59. Cuiuſcunque in cono exhibitæ ſectionis parametrum exhibere.

Primi Libri Finis.



LIBER SECVNDVS

DE GEOMETRICA CONICARVM LINEARVM IN PLANO PER PVNCTA deſcriptione.

PROPOSITIO I.

Si ſit quodlibet triangulum B A C, cuius baſis B C bifariam ſecta ſit in D: à quolibet autem ductæ, &, vbi opus, productæ A D puncto E facta E F parallela D C quæ occurrat A C in F, rectangulo C D, E F æquale fiat quadratum E G: dico punctum G eſſe in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.

2. Si ſit triangulum quodlibet B A C, cuius baſis B C ſecta ſit bifariam in D: ducta autem A D vtrunque ſecta in E, à ſumpto in E D, etiam quantolibet producta, quolibet puncto F, ducatur F G parallela D C quæ occurrat A C in G, fiatque rectangulo E F G æquale quadratum F H: dico punctum H eſſe in eadem recta hyperbola, cuius ſit vertex E.

3. Si ſit triangulum quodlibet B A C, cuius baſis B C ſecta ſit bifariam in D: à quolibet autem in A D puncto E ducta E F parallela D C, quæ occurrat A C in F, rectangulo, D E F æquale ponatur quadratum E G: dico puncta A, G, D, eſſe in eadem certa ellipſi.

4. Circa datam quamcunque diametrum & ordinatam, parabo-

ram in plano per puncta quotlibet describere.

5. Circa datam quamcunque diametrum & ordinatam, hyperbolam specie notam per puncta in plano describere.

6. Circa datam diametrum & ordinatam, ellipsim specie notam per puncta in plano describere.

7. Si sit triangulum quodlibet B A C linea D E basi B C æquidistante sectum, quod rursus linea F G ad basim quomodocumque inclinata, siue etiam perpendiculari, parallelamque D E secante in H, diuidatur: rectæque F G à puncto sectionis H quomodocumque applicetur H I, cuius quadratum sit rectangulo D H E æquale: dico punctum I esse in coni sectione, cuius sit diameter G F, & vertex G.

8. Circa datum diametrum & basim, figuram parabola contentam in plano per puncta describere.

9. Circa datum diametrum & basim, figuram hyperbola specie nota contentam in plano per puncta describere.

10. Circa datam diametrum & basim figuram ellipsi specie nota contentam per puncta in plano describere.

11. Si sit triangulum quodcumque B A C cuius basis BC secta sit bifariam in D: ductæque A D æquidistans & æqualis ab alterutro B, aut C, termino ducatur C E: & sumpto in A D quolibet puncto F, ducatur ipsi B C parallela F G H secans A C in G, & occurrens EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum F I: dico puncta B, A, I, C, in eadem esse parabola.

12. Si sit triangulum quodcumque BAC cuius basis BC bifariam sit secta in D: iunctaque A D & producta versus A quantumlibet in E, ducatur E C: & sumpto in A D quolibet puncto F, ducatur F G parallela D C occurrens EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum F I: dico puncta B, A, I, C, in eadem esse hyperbola specie nota.

13. Si sit triangulum quodcumque B A C, cuius basis B C secta sit bifariam in D: ductaque AD & producta quantumlibet in E, iungatur EC, & producatur: sumptoque in AE quolibet alio puncto F, ducatur FG parallela DC, occurrens AC, vbi opus productæ, in G, & ipsi EC in H: rectanguloque G F H æquale ponatur quadratum F I: dico puncta B, A I, C E, esse in eadem ellipsi specie nota.

14. Circa datum quodcunque triangulum parabolam in plano per puncta describere.

15. Circa datum quodcunque triangulum hyperbolam specie notam

tam in plano puncta describere.

16. Circa datum quodcunque triangulum ellipsim specie notam in plano per puncta describere. *Vide monitum.*

17. Si sit triangulum quodcunque ABC rectangulum ad B: sectæque AC bifariam in D perpendicularis exitetur DE, cui à puncto C ducta CE ipsi AB parallela occurrat in E: seceturque AB bifariam in F: dico punctum E esse in eadem parabola cuius vertex sit E,& vmbilicus A.

18. Si sit triangulum quodcumque ABC non rectangulum ad C: factaque BG æquali BC, secetur GA bifariam in H: & sectæ AC bifariam in E erigatur perpendicularis EF, quæ occurrat lateri BC in E, dico punctum F esse in hyperbola, aut ellipsi, cuius sint vmbilici A, B, & vertex H.

19. Datis, positione, paraboles vmbilico, & vertice; parabolem in eodem plano per puncta describere.

20. Datis, positione, hyperboles vmbilicis, & vertice; hyperbolem in eodem plano per puncta describere.

21. Datis, positione, ellipseos vmbilicis, & alterutro vertice; ellipsim in eodem plano per puncta describere.

22 Si sit data quæcunque recta linea AB bifariam diuisa in F: & sumpto in FA, vel in ipsa producta, quolibet alio puncto I, excitetur perpendicularis IE eiusmodi, vt ducta AE sit æqualis BI: erit punctum E in eadem parabola cuius sit vmbilicus A, & vertex F.

23. Si sit data quæcunque recta linea AB secta non bifariam in H: sitque AH minor quam HB, & ipsi æqualis ponatur HG: sumpto autem in HA, vel in ipsa producta, quolibet puncto E, descriptum centro B, interuallo BE, circuli arcum EF secet in F descriptus centro A, interuallo EG, arcus: erit punctum F in eadem hyperbola cuius sint vmbilici AB, & vertex H.

24. Si sit data recta linea quæcunque AB producta in H: & ipsi AH æqualis in directum apponatur HG: sumptóque quolibet interuallo BE, maiori quidem quàm AH, minori verò quàm BH, describatur circuli arcus EF, quem centro A, interuallo EG, descriptus arcus secet in F: erit punctum E in eadem ellipsi cuius sint vmbilici AB, & vertex H.

25. Datis, positione, paraboles vmbilico, & vertice; parabolem per puncta quotlibet in eodem plano promptè describere.

26. Datis, positione, hyperboles vmbilicis, & vertice; hyperbolem in eodem plano per puncta quotlibet promptè describere.

27. Datis, positione, ellipseos vmbilicis, & vertice alterutro; ellipsim in eodem plano per puncta quotlibet describere.

28. Si sit triangulum quodcumque B A C, eiusque basis B C secta sit bifariam in D: atque in B D, aut D C, vel etiam in ipsis productis, sumatur quodcunque punctum E, à quo ductæ A D parallela educatur E F secans A B, aut A C, si opus est productas, in puncto G: & vt B D ad D E, ita fiat E G ad G F: erit punctum F in eadem parabola quæ per puncta A, B, C, transit.

29. Circa datum quodcunque triangulum parabolam in plano per puncta describere.

30. Circa datum triangulum parabolam in eodem plano per puncta describere.

31. Parabolæ portionem per puncta quotlibet vlterius producere.

32. Data Parabolæ mutilæ hiatum per quotlibet intermedia puncta resarcire.

33. Si sit triangulum quodcunque B A C rectangulum ad B: & à quolibet in A B sumpto puncto D erigatur perpendicularis D E occurrens A C in E, atque à puncto A erigatur perpendicularis A F æqualis A D, & producatur in G, vt sit F G æqualis D E: sumptoque in D B, vel etiam in ipsa producta, quolibet puncto H, erigatur perpendicularis H I occurrens A C in I: & centro A, interuallo A H, descripta circumferentia parallelam ipsi A B à puncto F ductam secet in L: erigatúrque perpendicularis L M, quæ ponatur æqualis H I; erit punctum M in hyperbola, cuius vertex erit G, & dupla F G axis transuersu, ad quem recta parameter se habebit, vt A B quadratum ad B C quadratum.

34. Datis hyperboles axe transuerso, & eiusdem ad rectam parametrum ratione; hyperbolem per puncta quotlibet in plano delineare. *Vide monit.*

35. Si sit triangulum quodcunque A B C rectangulum ad B: sumptoque in *A B* producta quolibet puncto D, ponatur in *B C*, si opus est, producta, ipsi *B D* æqualis *D E* & iunctæ A E æqualis ponatur A F, cui perpendicularis sit *F G* occurrens productæ A C in G: & à puncto D erigatur perpendicularis D H æqualis F G; erit punctum H in hyperbola cuius sit dupla *B C* axis transuersus, ad quem se recta parameter habeat vt *A B* quadratum ad *B C* quadratum.

36. Datis hyperboles axe transuerso, & ratione eiusdem ad rectam parametrum; hyperbolem in plano per puncta quotlibet describere.

37. Si sit triangulum quodcunque *ABC* rectangulum ad *B*: & à quolibet in AC puncto D ducatur DE parallela *AB*, occurrensque *BC* in E: productaque *AB* in *F*, fiat *AF* æqualis *AC*; erit punctum E in ellipsi, cuius dupla AF erit axis maior, minorque duplæ AD æqualis.

38. Datis ellipseos extremis diametris; eandem in plano per puncta quotlibet describere.

39. Iisdemmet datis, ellipsim describere.

40. Si sit triangulum quodcunque *ABC*, cuius basis *BC* secta sit bifariam in D: ductæque AD æquidistans ab alterutro basis termino, vt C, educatur CE occurrens productæ *BA* in E: sumptoque in DC, vel etiam in ipsa producta quolibet puncto F, vt DC ad CF, ita fiat EC ad CG: iunctæque *BG*, productæ vbi opus, occurrat in H ducta à puncto F ipsi AD æquidistans FH; erit punctum H in eadem parabola quæ per puncta *B*, *A*, *C* transit.

41. Circa datum quodcunque triangulum parabolam per puncta describere.

42. Datæ parabolæ mutilæ defectum per intermedia puncta resarcire.

43. Parabolæ portionem descriptam vlterius per puncta producere.

44. Si sit triangulum quotcunque *ABC*: productisque *AB*, *AC* quantumlibet sumatur in *AB* producta punctum quodlibet D, per quod agatur DE parallela *BC*: sumaturque in DE recta *DF*, cuius quadrato plus possit DE quàm *BC*: erit punctum *F* in hyperbola, cuius sit vertex *B*, & dupla *AB* transuersa diameter ad contiguam parametrum se habens vt *AB* quadratum ad *BC* quadratum.

45. Datis hyperboles transuersa diametro, & eiusdem ratione ad contiguam parametrum, in dato angulo; hyperbolem in plano per puncta quotlibet describere. *Vide Monitum.*

46. Datis, positione hyperboles asymptotis, & puncto in sectione, circa asymptotos hyperbolem per puncta describere.

47. Datis positione, asymptotis, & puncto in sectione; hyperbolem per puncta describere.

48. Si sint binæ quælibet inæquales rectæ lineæ *AB* maior, CD minor, bifariam sese & ad rectos in E secantes angulos, in quas cadat recta *FG* æqualis dimidiæ inter vtramque differentiæ, quæ producta in H faciat *FH* æqualem AE, erit punctum H in eadem ellipsi quæ per puncta *B*, *C*, *A*, *D* transit.

49. Datis ellipſeos extremis diametris; ellipſim per puncta quotlibet in plano deſcribere.

50. Si ſit recta quæpiam linea *A B* vtcunque ſecta in *C*: & eductæ quomodocunque *G D* quadratum fiat rectangulo *A C B* æquale; erit punctum D in parabola, cuius erit A vertex, A C diameter, & C B ea iuxta quam poterunt à ſectione ad A C diametrum ordinatim ductæ, ſiue ſectionis parameter.

51. Datis, poſitione, diametro, & contigua parametro, paraboles portionem per puncta quotlibet in plano deſcribere.

52. Si ſit triangulum quodcunque A B C: & à quolibet angulo A oppoſito B C lateri parallela agatur quæcunque A D: ſumptoque in A B, etiam quantolibet producta, quolibet puncto E, ducatur eidem B C parallela E F, quæ ſecet A C in G, & poſſit quadrato bina A D, E G quadrata: erit punctum F in hyperbola cuius vertex erit D, & dupla A D tranſuerſa diameter, ad quem ſe habeat contigua parameter vt A B quadratum ad BC quadratum.

53. Datis hyperboles tranſuerſa diametro, & ratione eiuſdem ad contiguam parametrum, in angulo dato hyperbolem per pūcta quotlibet in plano deſcribere.

54. Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione, hyperbolem per puncta quotlibet in plano deſcribere.

55. Si ſit triangulum quodcunque A B C, cuius latus AB bifariam ſectum ſit in D. iunctæque CD æquidiſtans & æqualis à quolibet in A D, aut DB, puncto E ducatur E F ſecans C B, aut eidem occurrens, in G: & quadratorum E F, F G differentiæ æquale ſumatur quadratum E H: ſi quidem ACB angulus eſt rectus, erit punctum H in circuli circumferentia, cuius erit diameter A B: ſin autem, erit idem punctum H in ellipſi quæ per puncta A, C, B tranſit, cuiuſque tranſuerſa erit diameter *A B*.

56. Circa poſitione datas diametrum & vnam ex ordinatim ad ipſam ductis ellipſim per puncta quotlibet deſcribere.

57. Si ſit triangulum quodcunque ACB, cuius baſis ſecta ſit bifariam in D: ductaque AD ducatur AE æquidiſtans & æqualis DC, & in quotlibet partes æquales diuidatur: perque numerum quadrato numeri partium in A E factarum æqualem diuidatur A D: ſumpta autem A F quotlibet partium ex AE, ſumatur in A D, recta A G quadrato partium A F reſpondens: ductæque F H æquidiſtanti AD occurrat in H ducta GH æquidiſtans AE, erit punctum H in parabola quæ per B, A, C tranſit.

58. Circa positione datas diametrum & basim, figuram parabola contentam per puncta quotlibet in plano describere.

59. Paraboles mutilæ hiatum per puncta quotlibet inter media resarcire.

60. Parabolæ portionem vlterius per puncta quotlibet producere.

61. Si sit recta linea A B bifariam diuisa in C: eductaque quomodocunque recta C D, diuidatur vtraque A C, C B in quotlibet partes æquales: sumptaque AE earumdem quotlibet, educatur EF æquidistans C D: & qualium C D æstimabitur numero quadrato partium in AC, aut *C B*, factarum, Earumdem sumatur pro recta E F numerus planus sub partibus A E, E B factus; erit punctum F in eadem parabola, quæ per A, D, B puncta transit.

62. Circa positione datas diametrum & basim, portionem parabola contentam per puncta quotlibet describere. *Vide Monitum.*

63. Si sit triangulum quodcunque ABC, in cuius alterutro latere, vt B C, bifariam secto in D bina E & F puncta æqualiter à media D sectione remota sumantur, erit vtrumque E & F punctum in eadem hyperbola specie data.

64. Datis, positione, asymptotis, & puncto in sectione; hyperbolem per quotlibet alia puncta describere.

65. Si sit triangulum quodcunque ABC: & in producto vtrolibet eiusdem latere, vt A B, sumatur punctum quodlibet D, à quo ipsi BC parallela agatur D E: sit autem rectangulo ABC æquale rectangulum ADE: erunt puncta E, C in eadem hyperbola specie data.

66. Datis hyperboles transuersa diametro, & eiusdem ad contiguam in dato angulo parametrum ratione, hyperbolem per puncta in plano describere.

67. Datis, positione, asymptotis, & puncto in sectione: hyperbolem per puncta in eodem plano describere. *Vide Monitum.*

68. Si sit data quęcunque coni sectio A E cuius diameter sit AB, & vertex A: producta autem B quantumlibet in G, & sumpto in AB puncto quolibet C, educatur quomodocunque recta CD sectioni occurrens in E, faciénsque rationem CE ad CD eandem ei quæ est CA ad CG: dico punctum D fore in eiusdem nominis sectione cuius sit vertex G, & diameter G B. *Vide Monitum.*

69. Data quacunque in plano coni sectione: quotlibet alias eiusdem nominis sectiones in eodem plano per puncta exhibere. *Vide Monitum.*

Secundi libri finis.



LIBER TERTIVS

DE EIVSDEM NOMINIS CONI SECTIONVM INVICEM COMPARATIONE PRIOR, siue, DE IISDEM CONI-SECTIONIBVS.

DEFINITIONES.

1. SIMILES Coni-sectionum diametros dicimus, cum vnius anguli ab ordinatim ad ipsam ductis facti, æquales sunt alterius angulis qui ab ordinatim ad ipsam ductis fiunt.

2. Coni-sectionem Coni-sectioni aptè superponi dicimus, cum binæ quælibet ipsarum similes diametri ita superponuntur & conueniunt, vt vertices congruant inuicem.

3. Easdem Coni-sectiones dicimus, quæ congruunt omnino & conueniunt altera alteri aptè superposita.

4. Similes conos dicimus, quorum per axem sectorum ad rectos basi angulos triangula sunt similia.

5. Dissimiles dicimus, aut specie differentes, conos, quorum triangula per axem ad basim recta non sunt similia.

PROPOSITIO I.

SI sint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, circa communem diametrum positæ, quas in communi vertice eadem recta contingat linea: & non sit altera alteri eadem; non erit illarum aliud insuper commune punctum.

2. Si sint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, non eædem inuicem, quas circa communem diametrum positas in communi vertice eadem recta contingat linea: & altera alteri occurrat; erunt illarum

bina occursus puncta: sed in nullo alio communi puncto rursus conuenient.

3. Coni sectio sectioni vel circuli circumferentiæ non conueniet ita, vt pars tantum altera eadem sit. *Vide Coroll.*

4. Si binæ parabolæ, vel binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, circa communem diametrum positæ, & eandem rectam lineam communi vertice contingentes, inuicem rursus conueniant: parabolæ quidem, veluti & circulorum circumferentiæ, in vno præter verticem communi puncto: at hyperbolæ, vel ellipses, etiam in tribus; erit altera alteri parabola, vel hyperbola, aut ellipsis, veluti & circuli circumferentia, eadem.

5. Si sint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, & vtrobique à sectione ad diametrum recta ordinatim ducta, fuerint tam ductæ vtriusque quam interceptæ ab ipsis diametrorum portiones ad verticem æquales: atque in binis parabolis æqualis etiam vtrobique angulus applicata, & diametro contentus; erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem.

6. Si sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses: & binis vtrobique rectis à sectione ad diametrum ordinatim applicatis, fuerint vnius applicatæ, & interceptæ ab ipsis diametri portiones ad verticem, alterius applicatis & interceptis, singulæ singulis, æquales, & sub æqualibus etiam vtrobique angulis coniunctæ; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, eadem.

7. Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, æquales habeant diametros transuersas, & vtrobique à sectione easdem recta ordinatim applicata, fuerint tam applicatæ inuicem, quam interceptæ ab ipsis diametrorum portiones ad verticem etiam inuicem æquales: atque æqualis angulus vtrobique applicata & diametro contentus; erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, eadem.

8. Si binæ Parabola, vt & binæ circulorum circumferentiæ, parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad contiguas diametros applicatas; erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem. *Vide Coroll.*

9. Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, æquales habeant diametros transuersas, & ad ipsas in æqualibus vtrobique angulis applicatas parametros etiam æquales, erit altera alteri hyperbola, siue ellipsis, eadem.

10. Si binæ Coni sectiones eædem sint inuicem; quæ sub æqualibus vtrobique angulis applicabuntur Parametri, æquales erunt inuicem, & transuersæ item diametri inuicem.

11. Si propositi cuiuslibet trianguli internum verticis angulum, aut producto alterutro vltra verticem crure, externum binæ rectæ subtendant, ita vt ad communem verticalem angulum bina constituant similia triangula: & rectis eiusmodi communi angulo subtensis parallelæ à trianguli vertice ad basim cadant; erunt sub interceptis sectæ, aut productæ basis partibus à dictis parallelis facta rectangula inuicem, vt parallelarum quadrata inuicem.

12. Si Conus iam plano per axem sectus ad rectos basi angulos, rursus secetur duobus planis ad triangulum per axem rectis, formantibúsque in superficie binas hyperbolas, quarum productæ diametri constituant ad externum eiusdem per axem trianguli verticalem angulum bina triangula similia & æqualia; erit factarum huiusmodi binarum hyperbolarum altera alteri eadem. *Vide Coroll. & Monitum.*

13. Si Conus iam plano sectus per axem ad rectos basi angulos, rursus secetur duobus planis ad triangulum per axem rectis, formantibúsque in superficiei binas Ellipses, quarum transuersæ diametri cōstituant ad internum eiusdem per axem trianguli verticalem angulū bina triangula similia, & æqualia, erit factarum huiusmodi binarum ellipsium altera alteri, eadem. *Vide Coroll.*

14. Si oppositi Coni plano secentur non per verticem; erit factarum in vtraque superficie oppositarum hyperbolarum altera alteri eadem.

15. Si propositi cuiuslibet triãguli basis bis sectâ, aut vtrinque productâ, eadem sit vtrobique quadrati rectæ à vertice ductæ ratio ad triangulum sub conterminis sectæ aut productæ basis partibus, erunt ad verticem siue internè vtrinque resecti, siue externè additi vtrinque anguli inuicem æquales.

16. Si Conus plano iam sectus per axem ad rectos basi angulos, rursus duobus planis secetur ad triangulum per axem rectis, formantibúsque in superficie Coni binas easdem inuicem siue hyperbolas, siue ellipses, erunt factarum huiusmodi sectionum transuersæ diametri ad angulum verticis eiusdem trianguli, siue externum, siue internum, subcontrariè inuicem positę. *Vide Coroll.*

17. Si Conus iam plano per axem sectus ad rectos basi angulos, secetur rursus alio plano ad triangulum per axem recto, formante in superficie sectionem quæ sit hyperbolæ vel ellipsis: diameter autem sectionis

ctionis bisecanti angulum verticis eiusdem trianguli non sit æquidistans, neque perpendicularis, erit factæ in superficie sectioni altera in eadem superficie sectio eadem & subcontrariè posita.

18. Si Conus iam plano sectus per axẽ ad rectos basi angulos, rursus secetur alio plano ad triangulum per axem recto, formante in superficie sectionem quæ sit hyperbole: diameter autem sectionis bisecanti angulum verticis eiusdem trianguli sit æquidistans; erit facta eiusmodi hyperbola singularis sectio: nec alteri hyperbolæ in eadem superficie subcontrariè erit posita. *Vide Coroll.*

19. Cuicunque in cuiuslibet Coni recti superficie sectæ ellipsi, altera in eadem superficie ellipsis eadem est, & subcontrariè posita.

20. Si Conus scalenus plano iam sectus per axẽ ad rectos basi angulos, rursus secetur plano ad triangulum per axem recto, formante in superficie sectionem quæ sit ellipsis: diameter autem sectionis bisecanti angulum verticis eiusdem trianguli sit perpendicularis; erit facta huiusmodi ellipsis singularis sectio: nec alteri in eadem superficie subcontrariè erit posita. *Vide duo Coroll.*

21. Si Conus binis æquidistantibus planis ad easdem verticis partes secetur, non erit factarum in superficie binarum sectionum altera alteri eadem. *Vide Corollarium.*

22. Si sint bina triangula isoscelia, quorum bases sint in eadẽ ratione sectæ & vtrobique à sectionis puncto ad crus alterutrum rectâ alteri ductâ parallelâ, eadem sit vtrobique rectanguli sub basis partibus ad quadratum parallelæ ratio, erit alterum alteri triangulum simile.

23. Si sint bina triangula isoscelia, quorum bases sint ita sectæ, vt ductâ vtrobique à sectionis puncto ad crus alterutrum alteri parallela, eadem sit vtrobique ratio rectanguli sub basis partibus ad quadratum parallelæ: non sit autem basis partium similiter sumptarum inuicem eadem vtrobique ratio; non erit alterum alteri triangulũ simile.

24. Si sint bina triangula isoscelia, quorum bases sint similiter sectæ, aut productæ: & sit vtrobique eadem ratio rectanguli sub segmentis basis, aut sub base producta & eius exteriori parte, ad quadratum ductæ à vertice ad sectionis punctum, aut productæ terminum; erit alterum alteri triangulum simile.

25. Si sint bina triangula Isoscelia, quorum bases sint aut vtraque secta, aut vtraque producta, ita vt sit eadem vtrobique rectanguli sub segmentis basis, aut sub base producta & eius exteriori parte, ad quadratum ductę à vertice ad sectionis punctum, aut productę terminum ratio: non sit autem eadem vtrobique basis partium inuicem ratio;

non erit alterum alteri triangulum simile.

26. Cuilibet cuiuscunque Coni sectioni alterius cuiuspiam dissimilis coni sectio aliqua eadem est. *Vide Coroll.*

27. Si à vertice cuiuscunque trianguli rectæ lineæ quotlibet ad basim ducantur; minor erit ratio quadrati eius quæ angulum bifariam diuidet ad rectangulum sub segmentis basis ab ipsa factis, quàm quadrati cuiusuis aliæ ad rectangulum sub sibi conterminis basis segmentis.

28 Non cuilibet cuiuscunque Coni hyperbolæ, alterius cuiuslibet coni hyperbola aliqua eadem est. *Vide Coroll.*

29. Datam rectam bifariam sectam iterum secare, vt rectangulum sub inæqualibus totius segmentis ad quadratum inter segmenti datam teneat rationem.

30. Data hyperbola; conum exhibere cuius sit sectio singularis.

31. Data hyperbola; conum exhibere cuius sit è binis iisdem & sub contrarijs sectionibus vna.

32. Si recta linea AB, & ad ipsam perpendicularis *CD*: sitque maior C D ad C B ratio, quàm A C ad C D; iunctis A D, B D, dico angulum A D B esse acutum. *Vide Coroll. & Monitum.*

33. Si Conus plano secetur quod vtrique crurũ trianguli per axem infra eiusdem verticem occurrat, basi neque æquidistans, neque subcontrariè positum, sectio circuli circumferentia non erit. *Vide duo Corollaria.*

34. Data ellipsi; Conum exhibere cuius sit sectio singularis.

35. Data ellipsi; Conum exhibere cuius sit è binis ijsdem & subcontrariis sectionibus vna,

36. A vertice Trianguli cuiuslibet ad eiusdem basim ducere rectam cuius quadratum ad rectangulum sub segmentis basis ab ipsa factis contentum datam teneat rationem.

37. A dati cuiuslibet trianguli vertice ad basim productam ducere rectam cuius quadratum ad rectangulum sub base producta, & eius exteriori parte comprehensum datam teneat rationem.

38. Si à vertice cuiuscunque trianguli ad basim productam recta agatur quæ possit rectangulum sub conterminis basi partibus contentum; fiet exterior verticalis angulus interiori opposito ab basim æqualis: at verò si rectæ à vertice ductæ quadratum prædicto rectangulo sit maius; erit verticalis exterior angulus opposito ab basim interno angulo minor: & recta cuius quadratum minus erit maiorem semper externum verticalem constituet angulum. *Vide duo Corollaria.*

39. Dato cono; exhibere in eius superficie parabolem datæ eandem.

40. Dato cono, exhibere in eius superficie hyperbolam datæ eandem.

41. Dato cono, exhibere in eius superficie datæ ellipsi eandem.

42. Dato cono, exhibere in eius superficie datæ circuli circumferentiæ eandem circumferentiam.

43. Si recta linea parabolem altero contingens termino, altero cum axe conueniens, bifariam secetur, quæ per sectionis punctum ipsi perpendicularis ducetur, paraboles vmbilico occurret.

44. Si parabolem recta contingat linea, quæ per sectionis vmbilicum eidem ducetur æquidistans, abscindet à diametro per contactum ducta rectam intra sectionem æqualem quadranti contiguæ parametri.

45. Datis, positione, duabus rectis lineis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera sit terminata, conum exhibere, & in eius superficie sectionem quæ sit parabole, cuius datarum altera sit diameter, altera terminata parameter, & vertex connexionis punctum, cuiusque ordinatæ ad eandem diametrum in eodem dato angulo applicentur.

46. Datis positione duabus rectis lineis in dato angulo non recto inuicem iunctis, quarum altera sit terminata, in eadem producta punctum inuenire, à quo ad circumferentiam semicirculi super ipsa descripti recta ducatur linea alteri datarum parallela, cuius quadratum ad rectangulum sub productæ partibus puncto inuento & eodem circumferentia interceptis datam teneat rationem.

47. Si angulum ab hyperboles asymptotis contentum recta quæpiam subtendens linea bifariam secetur, ordinatim ad diametrum per bifariæ sectionis punctum ductam applicatis erit æquidistans.

48. Datis positione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera sit vltra connexionē producta, Conum exhibere, & in eius superficie sectionem quæ sit hyperbole, cuius datæ primùm lineæ sint altera transuersa diameter, altera terminata parameter, & vertex connexionis punctum, atque producta diameter ad quam ordinatæ in eodem dato angulo applicentur.

49. Datis positione duabus rectis lineis in dato quocunque angulo non recto inuicem iunctis, quarum altera terminata circuli sit diameter, inuenire in eiusdem circuli circumferentia punctum à quo ad

eandem diametrum actu recta ducatur alteri datarum parallela, cuius quadratum ad rectangulum sub diametri partibus ab ipsa factis datam teneat rationem.

50. Datis positione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis: conum exhibere, & in eius superficie sectionem quæ sit ellipsis, cuius vertex sit punctum ad angulum, & datarum linearum altera parameter, altera contigua transuersa diameter, ad quam ordinatæ in eodem dato angulo applicentur. *Vide Monitum.*

51. Dato cono: datisque positione duabus rectis lineis in dato angulo inuicem coniunctis quarum altera sit terminata: exhibere conum dato similem, & in eius superficie parabolam, cuius datarum altera sit diameter, altera terminata parameter, & vertex punctum quod est ad angulum, itavt ordinatæ ad eandem diametrum in eodem dato angulo applicentur.

52. Dato cono datisque positione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera sit ad partes anguli producta, exhibere conum dato similem, & in eius superficie hyperbolam cuius datæ primum lineæ sint altera transuersa diameter, altera contigua parameter, vertexque punctum quod est ad angulum, & producta diameter ad quam ordinatæ in eodem dato angulo applicentur.

53. Dato cono: datisque positione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis: exhibere conum dato similem, & in eius superficie ellipsim cuius vertex sit punctum ad angulum, & datarum linearum altera parameter, altera transuersa diameter contigua, ad quam ordinatæ in dato eodem angulo applicentur.

54. Si binæ parabolæ æquales habeant axis portiones vertice & vmbilico interceptas, erit altera alteri eadem.

55. Si in binis parabolis vtrobique recta à sectione ad vmbilicum inclinentur sub æqualibus cum axe angulis, & ad easdem sectionis partes: sitque vnius inclinata alteri inclinatæ æqualis, erit altera alteri parabola eadem.

56. Si binæ hyperbolæ æqualibus asymptoton angulis contineantur: & recta à centro vnius ad sectionem ducta æqualis sit rectæ à cẽtro alterius ad sectionem ductæ asymptoton angulum similiter diuidenti, erit altera alteri hyperbola eadem. *Vide Monitum.*

57. In omni parabola, cuicunque diametro contigua parameter

rectam parametrum superat quadrupla axis portione intercepta eiusdem vertice & ordinatim ab assumptæ diametri vertice applicata.

58. In omni parabola, binarum inæqualium parametrorum maior semper remotiori ab axe diametro contigua est, minoremque superat quadrupla propioris diametri portione intercepta eiusdem vertice & perpendiculari ad ipsam à remotioris vertice ducta. *Vide Coroll.*

59. Si sint binæ parabolæ, & vtrobique recta sectionem contingat æqualis ei iuxta quam possunt à sectione ad diametrum per contactum ductam ordinatim applicatæ: sintque tam contingentes inuicem, quam anguli ab ipsis cum contiguis diametris facti etiam inuicem inæquales: quadranti autem excessus quo maior contingens minorem superat æquali sumptâ diametri minori contingenti contiguæ portione à vertice, indidem educta perpendicularis sectioni occurrat in puncto à quo ducta contingens cum contigua diametro æqualem faciat angulum ei qui in altera sectione à diametro, & contingente continetur; erit altera alteri parabola eadem.

60. In omni hyperbola, aut ellipsi, si ad expositam quamcunque diametrum à supremo vertice recta ordinatim applicetur, à cuius termino vsque ad axem eidem diametro perpendicularis excitetur; quæ erit ratio rectanguli sub eiusdem diametri partibus vtroque transuersæ termino & ordinatim ductâ interceptis ad eductæ perpendicularis quadratum, eadem erit & transuersi axis ad rectam sectionis parametrum.

61. Si sint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, & vtrobique rectâ à supremo vertice ad expositam quamcunque diametrum ordinatim ductâ, eadem sit vtrobique ratio rectanguli sub diametri partibus vtroque transuersæ termino & applicatâ interceptis ad contiguæ vsque ad axem eductæ eidem diametro perpendicularis quadratum: sitque etiam recta huius parameter alterius rectæ parametro æqualis; erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, eadem.

62. In omni parabola, si ab eodem sectionis puncto ad quamlibet diametrum binæ rectæ quomodocunque inclinentur; vt erunt ipsarum quadrata inuicem, ita erunt diametrorum quæ ipsis æquidistantes bifariam diuident contiguæ parametri inuicem.

53. Si sint binæ parabolæ, & vtrobique ad expositam quamcunque diametrum recta ducatur ordinatim applicata: atque ab alterutrius ductæ puncto quolibet ad diametrum recta ducatur æqualem

faciens angulum ei qui in altera sectione ducta, & diametro continetur: sit autem quadratum rectæ ordinatim applicatæ ad quadratum conterminæ ductæ, vt contigua eidem diametro parameter ad contiguam alteri diametro parametrum; erit altera alteri parabola eadem.

64. Si sint binæ parabolæ, & vtrobique à sectione ad expositam quamcunque diametrum recta sit ordinatim applicata, itavt sint interceptæ diametrorum portiones à vertice æquales inuicem: & ab vtriuslibet applicatæ termino in sectione recta alteri æqualis ad diametrum aptata æqualem faciat angulum ei qui in altera sectione ordinatim ducta & diametro continetur: erit altera alteri parabola eadem.

65. In omni hyperbola aut ellipsi, si ab axis puncto quolibet ad expositam quamcumque diametrum binæ rectæ ducantur, altera ordinatim applicata, altera axi perpendicularis: atque ab ordinatim applicatæ termino recta ad axem educatur eidem diametro perpendicularis; quæ erit ratio rectanguli sub diametri partibus ordinatim applicatæ contiguis à centro, & perpendiculari ab axe educta sumptis ad conterminæ perpendicularis quadratum, eadem erit & transuersi sectionis axis ad rectam parametrum.

66. Si sint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, æquales habentes rectas parametros, & vtrobique à quolibet in axe puncto ad assumptam quamcumque diametrum binæ rectæ agantur, altera ad eamdem ordinatim applicata, altera axi perpendicularis: atque etiam vtrobique ordinatim applicatæ contermina ad axem educatur assumptæ diametro perpendicularis: sit autem eadem rectanguli sub vnius diametri partibus ordinatim applicatæ contiguis à centro & perpendiculari ab axe educta sumptis ad conterminæ perpendicularis quadratum ratio, quæ rectanguli sub alterius diametri partibus, similiter sumptis ad conterminæ eductæ perpendicularis quadratum; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis eadem.

67. Data coni sectione, inuenire eiusdem diametrum ad quam ordinatim ductæ in dato angulo applicentur.

68. Si binarum parabolarum parametri sint inuicem æquales, non sint autem sub æqualibus vtrobique angulis ad contiguas diametros applicatæ; non erit altera alteri parabola eadem.

69. Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, transuersas diametros inuicem æquales habeant, & contiguas parametros etiam inuicem æquales: non sint autem æquales anguli qui vtrobique transuersa

diametro & contigua parametro continentur; non erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, eadem.

70. Si bina plana se inuicem non ad rectos secent angulos; quæ ab aliquo in eorum alterutro puncto ad communem amborum sectionem recta ducetur linea, cum contermina recta in altero plano, educta ad eandem communem sectionem perpendiculari rectos non constituit angulos.

71. Iisdem manentibus, si ab eodem præassumpto puncto ad eandem communem planorum sectionem plures rectæ agantur; quæ ipsarum maior erit, maiorem cum contermina in altero plano ducta perpendiculari efficiet angulum: & binæ inuicem æquales, æquales constituent angulos.

72. Si conus Scalenus plano sectus per axem non ad rectos basi angulos, rursus secetur duobus non æquidistantibus planis formantibus in superficie binas parabolas: sintque communes cum base coni sectiones ad basim trianguli per axem perpendiculares: atque etiam rectæ vtriusque sectionis & eiusdem trianguli vertice interceptæ æquales inuicem; si quidem triangulum isosceles est, erit binarum eiusmodi parabolarum altera alteri eadem: at si Scalenum est, non erit altera alteri sectio eadem.

73. Si conus scalenus plano per axem sectus non ad rectos basi angulos rursus duobus planis secetur quæ faciant communes cum base, aut ipsi æquidistante plano, sectiones ad trianguli per axem facti basim, aut ad ipsi æquidistantem, perpendiculares: & transuersæ sectionum in superficie factarum diametri æquales sint, & subcontrarie inuicem positæ, siue ad externum verticalem trianguli per axem angulum, si sint hyperbolæ, siue ad internum, si sint ellipses, si quidem triangulum per axem isosceles est, erit factarum eiusmodi binarum hyperbolarum, aut ellipsium, altera alteri eadem: at si triangulum per axem isosceles non est, neque dictarum sectionum altera alteri eadem erit. *Vide Monitum.*

74. Si conus scalenus plano per axem quomodocunque sectus rursus secetur secundum binas in eiusdem base rectas ad basim trianguli per axem perpendiculares, duobus æquidistantibus planis formantibus in superficie binas hyperbolas, quarum transuersæ diametri sint æquales inuicem; erit factarum huiusmodi hyperbolarum altera alteri eadem.

Tertij libri Finis.

LIBER QVARTVS
DE EIVSDEM NOMINIS CONI-SECTIONVM INVICEM COMPARATIONE POSTERIOR.
siue,
DE SIMILIBVS CONI-SECTIONIBVS.

DEFINITIONES.

I. SIMILES diametrorum portiones dicimus, quæ vtrobique à vertice sumptæ, & eodem ordine, in iisdem rationibus sunt ad inuicem.

2. Similes Coni-Sectiones dicimus, in quibus similes omnes similium diametrorum portiones vtrobique in iisdem sunt rationibus ad conterminas rectas à sectione ordinatim applicatas. *Vide Monitum.*

PROPOSITIO I.

OMnes parabolæ inuicem, veluti & circulorum circumferentiæ omnes inuicem, similes sunt.

2. Si sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, & vtrobique à sectione ad expositam diametrum binæ rectę ordinatim sint applicatę: sit autem ordinatim applicatarum ad inuicem, & ad conterminas diametri portiones à vertice abscissas eadem vtrobique ratio: atque etiã anguli vnius applicatis & diametro contentis sint æquales; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, similis.

3. Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, similes sint; habebunt figurarum ad similes diametros factarum latera inuicem in eadem ratione.

4. Si in binis hyperbolis, vel binis ellipsibus, ad expositas similes transuersas diametros contiguæ parametri eandem vtrobique teneant rationem, erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis similis. *Vide tria Coroll.*

5. Si sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, & recta vtrobique à sectione

ſectionẽ ad expoſitam diametrum ordinatim applicata, eadem ſit vtrobique ratio applicatæ ad tranſuerſam diametrum, & ad abſciſſam eiuſdem portionem à vertice: atque etiam angulus vnius applicata, & diametro contentus æqualis ſit angulo alterius ſimiliter contento, erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.

6. Si ſint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, & vtrobique recta ſectionem contingens expoſitæ diametro occurrat, atque à contactus puncta recta ad eandem diametrum ordinatim applicatâ, eadẽ vtrobique ſit ratio applicatæ ad diametri portiones ab ipſa & contingente ad verticem abſciſſas: atque etiam angulus vnius ordinatim ductâ & diametro contentus æqualis alterius angulo ſimiliter contento, erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis ſimilis. *Vide Monitum*.

7. In omni Parabola, vel ellipſi, maior erit ſemper tranſuerſi axis ratio ad rectam parametrum ipſo minorem, quàm aſſumptæ cuiuſlibet tranſuerſæ diametri ad ſuam contiguam parametrum Et contra, minor erit ſemper ratio tranſuerſi axis ad rectam parametrum ipſo maiorum, quam tranſuerſæ cuiuſlibet diametri ad ſibi contiguam parametrum.

8. Si recta linea terminata producatur, aut ſecetur itavt ſectæ partes fiant inuicem inæquales, & à productę termino, aut ſectionis puncto, eidem perpendicularis erigatur, à cuius ſumptis binis punctis ad primò poſitæ lineæ vtrumque terminum rectæ agantur lineæ; maior erit à citimo puncto ductarum quadrati maioris ad quadratum minoris ratio, quàm ductarum à remotiore puncto ſimiliter ſumptarum quadrati ad quadratum ratio.

9. Si, vt cuiuſlibet trianguli ad verticem non rectanguli crurum quadrata ad inuicem, ita ſunt reſpondentes baſis partes à perpendiculari à vertice ducta factæ, erunt baſis partes inuicem æquales, ſin autem; erunt & baſis partes inæquales inuicem. *Vide Corollar*.

10. In omni parabola, aut ellipſi, tranſuerſam axem habente recta parametro maiorem, maior ſemper erit tranſuerſæ cuiuſlibet diametri eidem axi propioris ad ſuam contiguam parametrum ratio, quàm remotioris cuiuſlibet ad ſuam. Et ſi tranſuerſus axis minor ſit recta parametro, etiam & tranſuerſæ diametri eidem axi propioris ad ſuam contiguam parametrum ratio minor erit quàm remotioris ad ſuam.

11. In omni parabola, aut ellipſi, maior eſt ratio tranſuerſæ diametri axi propioris ad ſuam minorem contiguam parametrum, quàm remotioris cuiuſlibet ad ſuam. Et contra, minor eſt tranſuerſæ diameteri axi propioris ad ſuam maiorem parametrũ contiguam ratio, quàm remotioris ad ſuam. *Vide Monitum*.

12. In omni hyperbola transuersum axem habente rectæ parametro æqualem, erunt & omnes transuersæ diametri suis contiguis parametris æquales.

13. Si in hyperbola, assumpta quælibet transuersa diameter contiguæ sibi parametro sit æqualis, erunt & eiusdem transuersæ omnes diametri contiguis suis parametris æquales.

14. In omni hyperbola, veluti & in omni parabola, binarum diametrorum illa axi propior erit ad quam ordinatæ sub maiore acuto angulo applicabuntur. *Vide Coroll.*

15. In omni ellipsi, quæ à maioris axis terminis ad idem sectionis punctum binæ ducentur rectæ lineæ, angulum continebũt recto maiorem: maximúsque omnium is erit qui ad mediam sectionem fiet: eique propior semper remotiore maior erit, quæ autem à minoris axis terminis ducentur, minorem recto facient angulum: minimusque omnium ad mediam fiet sectionem: & ei propior remotiore semper minor erit. *Vide Coroll.*

16. In omni ellipsi, binarum diametrorum illa maior axi propior erit, ad quam ordinatæ sub minore obtuso angulo applicabuntur: & minori axi illa erit propior, ad quam ordinatæ sub maiore acuto angulo ducentur. *Vide Coroll.*

17. Si sint binæ hyperbolæ, & vtrobique assumptæ cuilibet transuersæ diametro contigua parameter sit æqualis, erit altera alteri hyperbola similis. *Vide Coroll.*

18. Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, figurarum latera in eadem ad inuicem ratione habeant vtrobique, sed non æqualiter vtrobique inuicem inclinata, neque si sint hyperbolæ, inuicem æqualia, non erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, similis. *Vide Coroll. & Monitum*

19. Si sint bina triangula ad verticem æquiangula, & rectâ vtrobique à vertice ad mediam basim ductâ, sint vnius anguli ad mediam basim facti singuli singulis alterius triãguli angulis ad mediam basim factis æquales, erit alterum alteri triangulum simile.

20. Si binæ hyperbolæ æqualibus asymptoton angulis contineantur: erit altera alteri hyperbola similis.

21. Si binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, interceptas vtrobique axis portiones vtroque vmbilico & vertice in eadem inuicem ratione habuerint, erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis similis.

22. Si binorum similium triangulorum bina homologa latera ponantur hyperbolarũ aut ellipsium axes vtrisque vmbilicis intercepti, & vtrobique angulus parassumpto lateri oppositus à sectionis linea

vel diuidi illigatur, vel tangi; erit binarum huiusmodi hyperbolarum, vel ellipsium, altera alteri similis.

23. Si in binis hyperbolis, aut binis ellipsibus, eadem fuerit vtroque rectę parametri ad axis partem vertice & homologo vmbilico interceptam ratio, erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, similis. *Vide Monitum.*

24. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, binæ contingant lineæ inuicem occurrentes, & à quolibet in sectione puncto rectæ contingentibus æquidistantes ducantur donec diametris per tactus ductis occurrant; erunt vtrobique triangula à diametris & contingentibus facta inuicem æqualia; atque etiam quadrilatera vtrobique inter sectionem & diametrum constituta triangulis reciprocè ab æquidistantibus factis æqualia.

25. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, binæ contingant lineæ inuicem occurentes, & à binis quibuslibet in sectione pũctis ad vtrasque diametros per tactus ductas rectæ contingentibus æquidistantes vtrobique ducantur, erunt vtrobique ab æquidistantibus ad diametrum constituta quadrilatera inuicem æqualia.

26. Si in coni sectione, vel circuli circumferentia, binæ rectæ inuicem se se secantes ducantur, vt erunt contingentium ipsis æquidistantium, vtrobique à tactu ad communẽ occursum sumptarum, quadrata inuicem: ita erunt sub respondentium intra sectionem ductarum segmentis rectangula inuicem.

27. Si in coni sectione, veluti & in circuli circumferentia, binæ rectæ æquidistantes inuicem ducantur, quas secet recta aliqua etiam in sectione ducta, erunt sub æquidistantium segmentis facta rectangula inuicem, vt respondentia sub secantis segmentis rectangula inuicem. *Vide Coroll. & Monit.*

28. Si in parabola binæ æquidistãtes rectæ ducantur quas secet ducta ab aliquo in sectione puncto recta diametro ęquidistans, erunt sub æquidistantium segmentis facta rectangula inuicem, veluti portiones rectæ ad ipsas ductæ à sectione similiter sumptæ inuicem. *Vide Cor.*

29. Si in parabola recta quæpiam ducatur ad quam à duobus in sectione punctis binæ rectæ ducantur diametro æquidistãtes; erunt sub segmentis in primùm ducta factis rectangula inuicem, velupti ipsæ æquidistantes similiter sumptæ inuicem.

30. Si in parabola binæ æquidistantes rectæ ducantur ad quas singulas à binis quibuslibet in sectione punctis singulæ ducantur lineæ diametro æquidistantes, erunt sub segmentis æquidistantium facta rectangula inuicem, veluti rectæ à sectione ad ipsas ductæ inuicem.

31. Si in parabola binæ rectæ æquidistantes inuicem ducantur quas secet recta aliqua etiam intra sectionem ducta, erunt sub æquidistantium segmentis facta rectangula inuicem, vt respondentia sub secantis segmentis rectangula inuicem.

31. Si in hyperbola, velut & in ellipsi, atque in circuli circumferentia binæ rectæ æquidistantes inuicem ducantur, quas secet ducta ab aliquo in sectione puncto recta diametro easdem bifariam diuidēti æquidistans, & ad oppositam sectionem perducta, vt erunt rectangula sub æquidistantium segmentis facta inuicem, ita erunt rectangula sub æquidistantis diametro partibus vtrâque sectarum æquidistantiū, & vtroque in sectione termino interceptis, similiter sumpta inuicem. *Vide tria Coroll.*

33. Si sint binæ coni sectiones, & vtrobique quina in sectione puncta notata: sint autem vnius puncta ad inuicem similiter posita alterius punctis ad inuicem; erit altera alteri sectio similis. *Vide Coroll.*

34. Datis in plano quinque punctis, quæ totidē notatis in plano aliquo vmbræ diurnæ terminis sint similiter posita; per eadē conuenientem coni sectionem describere, quæ diurnum solis parallelum repræsentet: ideoque & lineatæ super eodem plano ab vmbræ acumine coni sectionis similis sit. *Vide Monit.*

35. Si in hyperbola recta quæpiā ducatur alterutri asymptoto æquidistans, binasque rectas quascunque æquidistantes in sectione ductas diuidens; erunt rectangula sub æquidistantium partibus vtrinque sectione terminatis inuicem, veluti rectę asymptoto ęquidistantis partes à sectione sumptæ inuicem.

36. Si in hyperbola recta quæpiam ducatur binas rectas æquidistātes in sectione ductas ita diuidens, vt eadem sit rectangulorum sub æquidistantium partibus vtrinque sectione terminatis ad inuicem ratio, quę respondentium ductę rectę partium à sectione sumptarum ad inuicem; erit recta eiusmodi ducta alterutri sectionis asymptoto æquidistans.

37. Si sint binę hyperbolę, & à sumpto quolibet in vtraque sectione puncto binę rectę ducantur quę binas quascunque rectas ęquidistantes in sectione ductas ita diuidant, vt eadem sit vtrobique binorū quorumlibet rectangulorum sub æquidistantium segmentis ad easdē partes factis ad inuicem ratio, quæ intersegmētorum ad inuicem: atque etiam angulus abs ductis vnius contētus æqualis angulo alterius ductis contento; erit altera alteri hyperbola similis.

38. Si conus binis æquidistantibus, aut inuicem subcontrariè positis planis secetur non per verticem, erit factarum in superficie coni

ſectionum altera alteri ſimilis. *Vide Coroll. & Monitum.*

39. Dato cono; in eiuſdem ſuperficie datæ hyperbolæ, aut ellipſi, ſimilem in data diametrorum ratione hyperbolam, aut ellipſim, exhibere.

40. Data hyperbola, aut ellipſi; conum exhibere, & in eiuſdem ſuperficie ſectionem eidem datæ hyperbolæ, aut ellipſi ſimilem in data diametrorum ratione.

Quarti libri finis.



CONTRACTA PAPPI COLLATIO,

Libri tertij Propoſitiones 58.

NON omnia quidem hic habes quæ demonſtrauit Pappus, ſed ea ſolùm quæ faciliùs poſſint abſque diagrammatibus intelligi; cuius duo primi libri cùm hactenus minimè prodierint, tertio, quo Cratiſtam appellat, problema definit, in quo aliquid faciendum & conſtruendum proponitur: & diſcutit quod aliquis propoſuerat, nempe datis duabus rectis lineis duas medias proportionales in continua analogia per planorum contemplationem inuenire. Quibus diſcuſſis, prop.4. notat problematum tria genera, ἐπίπεδα, στερεὰ, γραμμικά, plana, ſolida, linearia: quorum prima per rectas lineas, & circuli circumferentiam, in plano genitas, ſoluuntur; ſecunda requirunt vnam, aut plures coni ſectiones, atque adeo ſolidarum figurarum ſuperficiem ſupponunt: tertia denique lineas quaſdam mixtas requirunt, putà helices, quadratrices, conchoides, ciſſoides, & id genus alias.

Porrò varios modos explicat, quibus problemata ſolida inſtrumentorum ope perficiantur, quale eſt Eratoſthenis Meſolabum, & Nicomedis, atque Heronis, cuius catapultica, mechanicaque laudat, methodus, ipſéque poſtea modum inueniendi cubum alterius cubi non ſolùm duplum, ſed in quacumque proportione tradit.

Deinde tres in ſemicirculo medietates reperit, & definit medietatem arithmeticam, geometricam, & harmonicam, hiſque poſitis tres ſimul medietates in minimis rectis lineis quinque, vſque ad prop.16. demonſtrat.

Poſtea decem analogias à veteribus propoſitas deſcribit, & vſque ad

prop.27. demonſtrat, in qua per numeros, tabellâ propoſitâ, idem fere repetit: cúmque nonnullis medietatibus in futurum egeamus; operæpretium fuerit hic illas explicare.

1. Medietas Arithmetica dicitur, quando tribus exiſtentibus terminis, medius vnum extremorum pari exceſſu ſuperat, & ab alio ſuperatur, vt fit in his tribus numeris 3, 6, 9; vel his 1, 2, 3.

2. Geometrica, quæ propriè dicitur analogia, cùm vt medius terminus ad vnum extremorum, ita reliquus ad medium, vt patet in 3, 6, 12, vel 1, 2, 4.

3. Harmonica, cùm medius terminus eadem parte ſuperat vnum extremorum, & à reliquo ſuperatur, vt contingit his numeris, 2, 3, 6.

4. Harmonicæ contraria, cùm tertius terminus ad primum, ita primi exceſſus ad exceſſum ſecundi, vt fit in his, 6.5.2.

5. Cùm vt tertius terminus ad ſecundum, ita primi exceſſus ad ſecundi exceſſum, quæ dicitur geometricæ contraria, vt in his numeris 5. 4. 2.

6. Cùm vt ſecundus terminus ad primum, ita primi exceſſus ad exceſſum ſecundi, vt in 6.4.1. cernitur, quæ & alio modo geometricæ dicitur contraria.

7. Cùm tertius exceſſus ad primum, ita ſecundus terminus ad tertium. 7.4. 3.

8. Cùm tertius exceſſus ad primum, vt primus terminus ad ſecundum. 6. 4. 3.

9. Cùm tertius exceſſus ad primum, ita primus terminus ad tertium. 4. 3. 2.

10. Cùm tertius exceſſus ad ſecundum, ita ſecundus terminus ad tertium. 3.2.1.

Quædam propoſitiones l. 3. Pappi.

29. IN omni triangulo, præterquam in æquilatero, & æquicruri baſim latere minorem habente, fieri poteſt, vt in baſi intra conſtituantur duæ rectæ lineæ æquales ijs, quæ ſunt extra, ſimul ſumptæ.

30. Quod ſi triangulum æquilaterum ſit, vel æquicrure, quod baſim habeat latere minorẽ, dico fieri non poſſe, vt intra ipſum conſtituantur rectæ lineæ æquales ijs quæ ſunt extra; ſed intra minores erunt.

31. In quibus triangulis intra conſtituuntur rectæ lineæ æquales iis quæ ſunt extra, in his & maiores intra conſtitui poſſunt ſimul ſumptę.

32. Et cùm hoc admirabile videatur iis qui geometricę ignari ſunt, admirabilius erit non ſolùm vtramque vtrique ęqualem eſſe, vel ma-

iorem, ſed etiam ſingulas earum quæ intra conſtituuntur, ſingulis earum quæ extra, & æquales & maiores eſſe poſſe, quod oſtenditur.

34. Multò autem admirabilius videbitur, ſi rectæ lineæ, quæ in baſi intra triangulum conſtituuntur, non ſolùm æquales, vel maiores ſint lateribus continentibus, ſed etiam ad ea datam habeant proportionem.

35. Non ſolùm autem in trianguli baſi rectæ lineæ intra conſtituuntur, vtræque ſimul maiores iis quæ ſunt extra, ſed etiam in quadrilatero duæ tribus maiores, & tres item maiores iis tribus, & ſimiliter in alijs, quæ plura habeat latera, poſſunt quotquot intra conſtitui maiores quotquot ijs quæ ſunt extra.

36. Fieri autem poteſt, vt & quæ intra continentur, quotquot iis quæ extra ſunt, ſimul ſumptæ omnes ſint æquales. Ex quibus etiam ſequitur dato ſpatio parallelogrammæ fieri poſſe, vt alterum parallelogrammum inueniatur, quod ſit propoſita pars dati parallelogrammi; vnumquodque autem latus vniuſcuiuſque lateris ſit multiplex ſecundum datos numeros.

41. Triangulo dato minus triangulum inuenitur habens vnumquodque latere maiores.

42. Quodque admirabilius, triangulum datur quod ſit pars dati trianguli, & vnumquodque latus vniuſcuiuſque lateris multiplex ſit ſecundum datos numeros, vt priùs in parallelogrammo dictum eſt. *Has autem duas propoſitiones diagrammatibus l. 4. Veritatis ſcientiarum cap. 10. explicaui.* Cæterùm in data ſphæra deinceps polizedra deſcribit, nempè pyramidem, cubum, octaedrum, icoſaedrum & dodecaedrum, de quibus in elementis.

Libri quarti Propoſitiones 43.

Hocce libro multa de triangulo, & de circulis intra duas circumferentias inſcriptis demonſtrat, & prop. 18. meminit theorematis de helice, ſeu linea ſpirali in plano deſcribenda Cononis Hannii Geometræ, quam Archimedes demonſtrauit: Pappus verò prop. 21. probat figuram contentam linea ſpirali, & recta quæ eſt in principio circulationis eſſe tertiam partem circuli ipſam comprehendentis; vide ſis etiam prop. 22. in qua cubos eandem inter ſe rationem, quam duo ſpolia, ſeruare demonſtratur.

Prop. 23. conchoidem Nicomedis; prop. 25. & ſequentibus Dinoſtrati & Nicomi quadratum perſequitur, & 30. rurſus de triplici problematū genere plano, ſolido, & lineari agit, aſſirmatque à Demetrio

Alexandrino multa reperta, quæ linearia loca ſpectant, vt & à Philone Tyaceo circa implicationes πλεκτοειδῶν, vbi & mirabilem Menelai lineam commemorat, & peccare Geometrã ait qui problema planum per conica vel linearia, hoc eſt ex improprio genere ſoluit, quale notat in 5 conicorum Apollonij, & libro de ſpiralibus Archimedis, vbi aſſumpta ſolida inclinatio in circulo, quod abſque vllo ſolido fieri poterat quodque iam factum à Vitellione l. 1. prop. 128.

Ex prop. 31. Datum angulum rectilineum prop. 32. & 33. tripartitò ſecat. & 34. pr. datæ circumferentiæ tertiam partem abſcindit, ſine inclinatione per ſolidum. Prop. 35. Datum angulum, vel datam circumferentiam in data proportione ſecare demonſtrat non eſſe problema ſolidum, vt præcedens, ſed lineare: vnde concludit prop. 36. à duobus circulis inæqualibus æquales circumferẽtias abſcindi poſſe. Prop. 37. triangulum æquicrure conſtruit, cuius vterque angulorum qui ad baſim, habeat ad reliquum proportionem datam: vnde infert Prop. 38. in circulo deſcribi poſſe polygonum æquilaterum & æquiãgulum quotuis laterum. Prop. 39. facilè cognoſci quâ ratione circulus inueniatur, cuius circumferentia rectæ lineæ datæ ſit æqualis, ſed quadraticis ope: idque in ratione data Prop. 40. 41. angulos incommenſurabiles inueniri poſſe.

Prop. 42. reſolutionem ordinat inclinationis, quam Archimedes lib. 16. aſſumpſit, & 43. ſeu vltimâ deprehendit quando punctum poſitione contingit parabolam.

Libri quinti Propoſitiones 57.

APum induſtriam in melle cõficiendo ſuſpicit, & explicat, quarũ faui ſeu κηρία ſunt hexagona, quare figuras inter ſe cohærentes, lateráque communia habẽtes ad tres rectilineas & ordinatas, hoc eſt æquilateras, & æquiangulas, redigit; quippe ſola triangula æquilatera, quadrata, & hexagona abſque alijs figuris diſſimilibus, poſſunt appoſita ſibi ipſis latera habere communia, & locum circa idem punctum replere, vt conſtat ex ſex triangulis æquilateris, quæ 6 angulos habẽt, quorum vnuſquiſque eſt duarum tertiarum recti; ex 4 quadratis per 4 angulos rectos, & ex tribus hexagonis, & eorum tribus angulis, quorum vnuſquiſque rectum, & tertiam recti partem continet. Ex his autem tribus apes hexagonum vti capaciorem, elegerunt, quippe æquali materiâ in conſtructionem vniuſcuiuſque inſumpta, hexagonum mellis capit amplius.

Figurarum enim planarum, quæ cùm æquilateræ, & æquiangulæ ſint,

ſint, ambitum æqualem habent, ea ſemper, & maior eſt quæ ex pluribus conſtat angulis, & circulus æquali ipſis ambitu comprehenſus, eſt omnium maximus. De niue hexagona tractatum peculiarem Keplerus edidit.

Prima prop. demonſtrat polygonorum ordinatorum angulos numero inæquales, ambitum verò æqualem habentium, illud quod ex pluribus angulis conſtat, ſemper etiam maius eſſe.

2. Circulum quóuis polygono maiorem, cùm etiam æqualium ſunt ambituum.

3. Rectangulum, quod circuli ambitu, & ea quæ ex cētro continetur, circuli duplum eſſe, idque independenter ab Archimede. Deinceps verò demonſtrat iſoperimetrarum figurarum multos angulos, & latera numero æqualia habentium, æquilateram & æquiangulam eſſe maximam.

5. Iſoper. triangulorum & eandem baſim habentiū ęquicrure maximum eſſe, & quod ad ęquicrure magis accedit, ſemper maius eſſe: maximam etiam ait circuli portionem, inter eas quę habuerint æqualem circumferentiam, eſſe ſemicirculum, quod 17 prop. demonſtrat.

14. Circulorum circumferentias inter ſe eſſe vt diametros. 13. ſimiles circulorum proportiones ad inuicem eſſe vt baſium quadrata, & circumferentias ipſarum inter ſe, vt baſes.

17. Prop. multa de mundi figura ſphærica legas, vt omnium figurarum ſolidarum æqualem ſuperficiem habentium, ſphæram eſſe maximam: poſtea confert alia ſolida ordinata cum ſphæra, præſertim verò quinque figuras æqualibus & ſimilibus planis contentas, quæ ſolæ angulos ſolidos æquales habent, videlicet tetraëdrum, hexaëdrum, octoedrum, duodecaedrū, & icoſaedrum: licet etiā Archimedes alia numero tredecim inuenerit æquilateris, & æquiangulateris polygonis, non tamen ſimilibus, contenta. Omitto pręclaras propoſitiones, quę nequeūt abſque figuris intelligi, vſque ad 28, quę docet, omnis portionis ſphærę curuam ſuperficiem æqualem eſſe circulo, cuius ſemidiameter eſt æqualis ei, quæ ex polo ipſius portionis.

35. Omnis ſphæra æqualis eſt cono, cuius baſis quidem eſt ſuperficies ſphæræ, altitudo verò eiuſdem ſemidiameter.

36. Sphærâ datâ, & datâ proportione, ſuperficiem ſphæræ plano ita ſecare, vt portionum ſuperficies inter ſe proportionem habeant eandem datæ proportioni: *Vnde concludit*

37. Cylindrum, cuius baſis æqualis ſit maximo in ſphæra circulo, & altitudo æqualis diametro ſphæræ, ipſius ſphærę ſeſquialteram eſſe; & eius ſuperficiem ſuperficiei itidem ſphæræ ſeſquialteram.

38 In omni triangulo æquilatero, quadratum quod ab vno latere fit, maius eiusdem est, quàm duplum dicti trianguli, minus verò quam quadruplum.

39. Quæ à centro sphæræ ad planum octaedri perpendicularis ducitur, potestate tertia pars est semidiametri sphæræ.

42. Si recta proportionaliter secetur, quod fit à tota ad id quod quinquies fit à minori portione maiorem proportionem habet, quàm quatuor ad tria: multáque persequitur ad hanc diuisionem attinentia vsque ad 47. prop. quâ demonstrat hexagoni latere proportionaliter secto, maiorem portionem esse decagoni latus; & 49. duodecim pẽtagona maiora 20. triangulis in eodem circulo descriptis.

Prop. 52. & deinceps ostendit icosaedrum maximum esse, & pyramidem omnium minimam; & tandem vltima 57. concludit nullum aliud polyedrum inueniri præter quinque prædicta, quod æqualibus, & similibus æquilateris polygonis contineatur.

Libri sexti Propositiones 61.

Locum astronomicum aggreditur hocce libro, quod non sit semper verum theorema secundum l. 3. sphæric. Theodosij, videlicet oportere vnumquemque duorum maximorum circulorum ab eo, qui per polos sphæræ transit ad rectos angulos secari. Itemque prætermissum esse in 2. Theorem. Phęnom. Euclidis, quoties Zodiacus circulus bis ad horizontem fit rectus: & in 4. Theor. lib. de diebus & noctibus Theodosium falsò exponi; & alia quę postmodum explicat.

1. Propositio. Si in sphærę superficie tres maximorum circulorũ circumferentiæ se mutuò secent, quarum vnaquæque sit circulo minor, duæ reliquæ maiores erunt, quomodocumque sumptæ.

2. Si in vno latere trianguli sphærici duę circulorum maximorũ circumferentiæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores erunt. Quibus, & nonnullis alijs præmissis quintũ theorema l. 3. sphæric. Theodosij aliter demonstrat. Sed & prop. 27. maximè laudat Autolycũ; & duas integras paginas Theorematibus plurimis characteribus constantes legendas proponit. Porro 28. & 29. pr. omissa à Theodosio supplet, & 31. ostendit, ex ijs quæ infinitè augẽtur, & infinitè minuuntur, esse quasdam magnitudines, quæ omni propositâ magnitudine maiores fiant, & rursus minores, quæ videlicet in problematibus indeterminatis efficiuntur. Prop. 32. de iis quæ infinitè augentur, sed non infinitè minuuntur: 33. de ijs quæ solùm infinitè minuuntur, & 34. de ijs agit, quibus neutrum conuenit. Quibus posi-

tis demonstrat 35. prop. zodiaci velocitatem diminutam, nunquam velocitate solis minorem esse; sed quamcunque circumferentiam zodiaci solem in maiori tempore pertransire, quàm ipsa oriatur, vel rursus occidat.

Ad 38. prop. ostendit sex quæ Aristarchus statuit lib. de magnitudinibus & distantijs solis, & lunæ. Vbi etiam iuxta Ptolomæum, & Hipparchum magnitudines diametrorum solis & lunæ, & illorum à terra distantias refert. Cæterùm omnes prop. vt pote diagrammatibus egentes omitto, vt sequentem admirabilem peruideas.

54. Prop. Circulo positione dato & dato puncto, in plano circuli intra circumferentiam ipsius, visui locum inuenire, à quo circulus ellipsis videatur, centrum habens intra circumferentiam datum.

55. Notat in 2. Theor. Phænomenon Euclid. prætermitti demonstrationem huius. Si polus horizontis sit intra tropicos, vel in aliquo ipsorum, quoties zodiacus rectus fiat ad horizontem in vna conuersione: Nempe si fuerit in aliquo tropicorum semel zodiacum rectum esse ad horizontem in vna conuersione, bis autem, si fuerit inter tropicos, prop. 56. in qua etiam 12. Euclidis theorema discutit, & Hipparchum, ac Menelaum laudat.

57. & 58. Prop. agit de ortu & occasu cancri, & capricorni, leonis & virginis, & 12. signorũ; & prop. 59. inuenit horizontes habitationum. Denique quod est prætermissum in 12. & 13. theoremate sic explicat.

61. Prop. Circumferentiarum quæ sunt in semicirculo post cancrum, quælibet in maiori tempore oritur quàm occidit. Earum verò quæ in reliquo semicirculo post capricornum quælibet in maiori tempore occidit quàm oritur.

Libri septimi Propositiones 238.

DE loco resoluto filium Hermodorum alloquitur, quem vocat ἀναλυόμενον, qui sit vtilis ad inuenienda proposita problemata. Resolutio dicitur via à quæsito tanquam concesso, per ea quæ deinceps consequuntur ad aliquod concessum in compositione: quod enim quæritur, vt iam factum supponentes, quod ex hoc contingat, consideramus, & rursus illius antecedens, donec ita progredientes incidamus in aliquod iam cognitum, vel quod sit è numero principiorum: est igitur hæc ἀνάλυσις, vt σύνθεσις, seu compositio, quæ per conuersionem illud factum ponit, quod postremum in resolutione sumitur, ordinando ea antecedentia, quæ illic erant consequentia, quorum mutuâ compositione factâ ad quæsiti finem peruenitur.

Libros autem loco resoluto seruientes enumerat: datorum Euclidis librum vnum; Apollonij duos de proportionis sectione: duos de spatij sectione; duos tactionum, tres porismatum Euclidis: duos inclinationum; duosque locorum planorum Apollonij, vt & conicorũ octo. Quinque locorum solidorum Aristei: duos locorum ad superficiem Euclidis: duos Eratosthenis de medietatibus, adeout sint libri 31. Cum autem isti libri fere restituti sint, vel habeantur, illorum propositiones accipe, easque primùm quæ ad data pertinent.

Data Euclidis.



EVCLIDIS DATA,

E' GRÆCO A CLARISSIMO, ET VNDEQVAQVE DOCTISSIMO VIRO CLAVDIO HARDY conuerſa.

DEFINITIONES 12.

1. DATA magnitudine dicuntur ſpatia, lineæ, anguliſque, quibus æqualia poſſumus inuenire. Datum, hypotheſis, ordinatum, porimum, poriſton, effabile, cognitũ idem ferè ſignificant. Datum eſt, cui æquale poſſumus inuenire. Hypotheſis eſt, quod à proponente conceditur. Ordinatum ſiue determinatum quod pluribus modis eſſe nequit. Porimum, quod conſtrui poteſt. Aporon, cuius factio nondum inuenta. Poriſticon, factibile, quod fieri poſſe non dubitamus, licet eius factio ignoretur. Effabile, quod numero rationali poteſt exprimi. Cognitum, quod numero rationali poſſumus exprimere.

2. Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem inuenire.

3. Rectilineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum & ſinguli anguli dati ſunt, & laterum rationes ad inuicem datæ ſunt. *Quare figurarum ſpecie datarum dantur quoque anguli, laterúmque rationes.*

4. Poſitione dari dicuntur puncta, lineæ & anguli, quæ eundẽ ſemper ſitum obtinent. Puncta non aliter dantur quàm poſitione: *ſed anguli poſitione dati, dantur etiam magnitudine, quamuis linea recta poſitione data, non ideo dentur magnitudine.*

5. Circulus magnitudine dari dicitur, cuius ea quæ ex centro datur magnitudine.

6. Poſitione & magnitudine dari dicitur circulus, cuius datur centrum poſitione, & ea quæ ex centro magnitudine, omnis circulus poſitione datus, datur quoque magnitudine, ſed non contrà.

7. Circuli ſegmenta magnitudine dari dicũtur, in quibus dati ſunt anguli magnitudine, atque ſegmentorum baſes.

8. Positione & magnitudine dari dicuntur circuli segmēta, in quibus anguli magnitudine dati sunt, & segmentorum bases positione & magnitudine.

9. Magnitudo magnitudine maior est, datâ, quando ablata data, reliqua eidem æqualis est.

10. Magnitudo magnitudine minor est, datâ, quando adiuncta data, tota eidem æqualis est.

11. Magnitudo magnitudine maior est, datâ, quàm in ratione quādo ablatâ datâ reliqua ad eandem habet rationem datam.

12. Magnitudo magnitudine minor est datâ, quàm in ratione, quādo adiunctâ datâ, tota ad eandem rationem habet datam.

PROPOSITIONES 95.

1. DAtarum magnitudinum, ad inuicem ratio data est.

2. Si data magnitudo, ad aliam aliquam magnitudinem habeat rationem datam, datur etiam hæc alia magnitudine.

3. Si quotlibet datæ magnitudines componantur, etiam ea dabitur quæ ex his componitur magnitudo.

4. Si à data magnitudine data magnitudo auferatur, etiam eà dabitur quæ reliqua est magnitudo.

5. Si magnitudo ad sui ipsius aliquam partem habeat rationem datam, etiam ad reliquam habebit rationem datam.

6. Si componantur duæ magnitudines habentes ad inuicem rationem datam, & quæ ex his componitur magnitudo, habebit ad vtrámque rationem datam.

7. Si data magnitudo datâ ratione secetur, vtrúmque segmentorum datum est.

8. Quæ ad idem rationem habet datam, habebunt ad inuicem rationem datam.

9. Si duæ pluresve magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, habeant autem illæ magnitudines ad alias quasdam magnitudine rationes datas, & si non easdem', illæ aliæ magnitudines etiam ad inuicem habebunt rationes datas.

10. Si magnitudo magnitudine maior fuerit, datâ, quàm in ratione, & simul vtraque, illâ eâdem A magnitudine maior est, data, quàm in ratione; sin autem simul vtraque magnitudo, eadem magnitudine A maior fuerit, datâ, quàm in ratione, & reliqua illa eadem A maior sit, datá, quàm in ratione, aut reliqua B data est, cum consequente C, ad quam habet altera magnitudo A rationem datam. Per dictiones *il-*

sà eâdem A, quæ & altera magnitudo dicitur, intelligitur consequens rationis propositæ, B reliqua, est excessus quo antecedens vnà cum data excedit consequens rationis propositæ. *C cum consequente*, &c. est excessus quo consequens rationis propositæ superat antecedens eiusdem rationis propositæ.

11. Si magnitudo magnitudine maior sit, datâ, quàm in ratione, eadem simul vtraque maior erit, datâ, quàm in ratione. Et si eadem simul vtraque maior sit, data, quàm in ratione, eadem reliquâ magnitudine maior erit, datâ, quàm in ratione.

12. Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem cum secunda data sit, secunda quoque cum tertia data sit, aut prima tertiæ æqualis est, aut altera alterâ maior datâ.

13. Si fuerint tres magnitudines, & earum primæ ad secundum habeat rationem datam, secunda autem tertiâ maior sit, datâ, quàm in ratione, prima quoque maior erit tertiâ, datâ, quàm in ratione.

14. Si duæ magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, vtrique autem illarum adiiciatur data magnitudo; totæ ad inuicem aut habebant rationem datam, aut altera alterâ maior erit, datâ, quàm in ratione.

15. Si duæ magnitudines habeant ad inuicem rationem datam, & ab vtraque earum auferatur magnitudo; reliquæ magnitudines ad inuicem habebunt aut rationem datam, aut altera alterâ maior erit, datâ, quàm in ratione.

16. Si duæ magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, & ab vna quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem ipsarum adiiciatur data magnitudo, tota residuâ magnitudine maior erit, datâ, quàm in ratione.

17. Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem secundâ maior sit, datâ, quàm in ratione, tertia quoque eadem secunda maior sit, datâ, quàm in ratione, prima ad tertiam, aut rationem habebit datam, alterâ maior erit, data, quàm in ratione.

18. Si fuerint tres magnitudines, atque ex his vna vtráque reliquarum maior sit, data, quam in ratione, reliquæ duæ aut datam rationem habebunt ad inuicem, aut alterâ altera maior erit, data, quàm in ratione.

19. Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo secunda magnitudine maior sit, data, quàm in ratione, sit quoque secunda maior tertia, data, quàm in ratione; prima magnitudo, tertia magnitudine, maior erit, data, quam in ratione.

20. Si datæ fuerint duæ magnitudines,& auferantur ab ipsis magnitudines habentes ad inuicem rationem datam,residuæ magnitudines aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera altera maior erit, data, quam in ratione.

21. Si fuerint duæ magnitudines datæ, & adiiciantur ipsis aliæ magnitudines,habentes ad inuicem rationem datam,totæ aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera altera minor erit, data,quàm in ratione.

22. Si duæ magnitudines,ad aliam aliquam magnitudinē habeant rationem datam,& simul vtraque ad eandem habebit rationē datam.

23. Si totum ad totum habeat rationem datam, habeant autem & partes ad partes rationes datas, modò non easdem,habebunt omnia ad omnia rationes datas.

24. Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, prima autem ad tertiam habeat rationem datam, & ad secundam habebit rationē datā.

25. Si duæ rectæ positione datæ, se mutuò inuicem secuerint,punctum in quo se inuicem secant, positione datum est.

26. Si lineæ rectæ extremitate positione datæ sint, recta positione, & magnitudine data est.

27. Si datæ rectæ lineæ positione & magnitudine data fuerit vna extremitas, & altera extremitas data erit.

28. Si per datum punctum contra datam positione rectam agatur recta linea, acta recta positione data est.

29. Si ad positione datam rectam, datúmque in ea punctum agatur recta linea,quæ facit angulum datū,acta linea positione data est.

30. Si à dato puncto, in datam positione rectam agatur recta linea, quæ facit angulum datum, acta linea positione data est.

31. Si à dato puncto in datam positione rectam data magnitudine recta ducatur; positione quoque data erit.

32. Si in datas positione parallelas rectas agatur recta linea quæ faciat angulos datos, alia recta magnitudine data est.

33. Si in datas positione parallelas rectas agatur magnitudine data recta, faciet angulos datos.

34. Si in datas positione parallelas rectas à dato puncto agatur linea recta, secabitur data ratione.

35. Si à dato puncto in datam positione rectam agatur recta linea, secetúrque datâ ratione, agatur autem per punctum sectionis, contra datam positione rectam, recta linea,acta linea positione data est.

36. Si à dato puncto in datam positione rectam lineam agatur recta linea, adijciatur autem ipsi aliqua recta quæ ad illam habeat rationē datam,

datam, per extremitatem adiectæ lineæ agatur contra datam positione rectam linea recta: acta linea positione data est.

37. Si in datas positione parallelas rectas agatur recta, quæ secetur ratione datá, agatur autem per sectionis punctũ contra datas positione rectas linea recta: acta recta positione data est.

38. Si in datas positione parallelas rectas agatur recta, quę ad illam quæ acta est habeat rationẽ datam, per extremitatem autem adiectæ agatur contra datas positione parallelas recta; recta est data positione.

39. Si trianguli singula latera magnitudine data sint, triangulum specie datum est.

40. Si trianguli singuli anguli magnitudine dati sint, triangulum specie datum est.

41. Si triangulus vnum angulum datum habeat, circa datum autem angulum duo latera ad inuicem habeant rationem datam triangulus specie datus est.

42. Si trianguli latera ad inuicem habeant rationem datam, triangulum specie datum est.

43. Si trianguli rectanguli circa vnum acutorum angulorum latera ad inuicem habeant rationem datam, triangulum specie datũ est.

44. Si triangulus habeat vnum angulum datum, circa alium autem angulum latera ad inuicem habeant rationem datam, & pateat species tertij anguli, triangulus specie datus est.

45. Si triangulus datus vnum angulum habeat, circa datum autem angulum latera simul vtraque, tanquam vnum ad reliquum latus rationem habeant datam, triangulus specie datus est.

46. Si triangulus datus vnum angulum habeat, circa alium autẽ angulum latera, simul vtraque tanquam vnum, habeant ad reliquum rationem datam, triangulus specie datus est.

47 Data rectilinea specie, in data specie triangula diuiduntur.

48. Si ab eadem recta describantur trianguli dati specie, habebũt ad inuicem rationem datam.

49. Si ab eadem recta duo rectilinea quælibet data specie describantur, habebunt ad inuicem rationem datam.

50. Si duæ rectæ ad inuicem habeant rationem datam, & ab illis similia, similitérque descripta rectilinea, habebunt ad inuicem rationem datam.

51. Si duæ rectæ habeant ad inuicem rationem datam, & ab illis rectilinea quæcunque specie data describantur, habebunt ad inuicem rationem datam.

52. Si à data magnitudine recta, data figura specie describatur, descripta figura magnitudine data est.

53. Si duæ figuræ specie datæ fuerint, & vnum latus vnius ad vnum latus alterius habuerit rationem datam, reliqua quoque latera ad reliqua latera habebunt rationes datas.

54. Si duæ figuræ datæ specie, ad inuicem habuerint rationem datam, etiam eorum latera ad inuicem habebunt rationem datam.

55. Si spatium magnitudine, & specie datum fuerit, eius latera magnitudine data erunt.

56. Si duo æquiangula parallelogramma habuerint ad inuicem rationem datam, est vt primi latus ad secundi latus, ita reliquum secundi latus ad eam, ad quam alterum primi latus habet rationem datam, quam habet parallelogrammum ad parallelogrammum.

57. Si datum spatium ad datam rectam applicatum fuerit in angulo dato, datur altitudo applicationis.

58. Si datum ad datam rectam applicetur, deficiens data specie figura, latitudines defectus datæ sunt.

59. Si datum ad datam rectam applicetur, excedens data specie figura, latitudines excessus datæ sunt.

60. Si datum specie & magnitudine parallelogrãmum dato gnomone augeatur vel minuatur, latitudines gnominis datæ sunt.

61. Si ad datæ specie figuræ vnum latus applicetur parallelogrammum spatium, in angulo dato, habeat autem data figura ad parallelogr. rationem datam, parallelogr. specie datum est.

62. Si duæ rectæ ad inuicem habeant rationem datam, & ab vna quidem data specie figura descripta sit, ab altera autem spatium parallelogr. in angulo dato, habeat autem figura ad parallelogr. rationem datam, parallelogrammum specie datum est.

63. Si triangulum specie datum sit, quod ab vnoquoque laterum describitur quadratum, ad triangulum habebit rationem datam.

*64. Si triangulus angulum obtusum datum habeat; illud spatium quo latus obtusum angulũ subtendens, magis potest quàm latera obtusum angulum ambientia, ad triangulum habebit rationem datam.

65. Si triangulum angulum acutum datum habeat, illud spatium quo latus angulum acutum subtẽdens, minus potest quàm latera angulum acutum ambientia, habebit ad triangulum rationem datam.

66. Si triangulus habuerit angulum datum, quod sub rectis datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum, habebit ad triangulum rationem datam.

67. Si triangulus habuerit datum angulum, illud spatium quo duo

datum angulum comprehendentia latera, tanquã vna recta, plus possunt quàm quadratum à reliquo latere, ad triangulum habebit rationem datam.

68. Si duo parallelogramma æquiangula habeãt ad inuicem rationem datam, & vnum latus ad vnum latus habeat rationem datam, & reliquum latus ad reliquum latus rationem datam habebit.

69. Si duo parallelogramma datos angulos habeant, & ad inuicem rationem datam, habeat autem & vnum latus ad vnum latus rationẽ datam, & reliquum latus ad reliquum latus habebit rationem datam.

70. Si duorum parallelogrammorum circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, datos tamen, latera ad inuicem habeant rationem datam, & ipsa parallelogramma habebunt ad inuicem rationem datam.

71. Si duorum triangulorũ circa æquales angulos, aut circa inæq. quidem, datos tamen, latera ad inuicem habeant rationem datam, & ipsa triangula habebunt ad inuicem rationem datam.

72. Si duorum triangulorũ & bases fuerint in ratione data, & actæ ab angulis ad bases quæ faciant angulos æquales, aut inæquales quidem, sed datos habeant, ad inuicem rationem datam, & ipsa triangula ad inuicem habebunt rationem datam.

73. Si duorum parallelogr. circa angulos æquales, aut circa inæq. sed datos, latera ad inuicem ita se habeãt, vt sit quemadmodum primi latus ad secundi latus, ita reliquum secundi latus ad aliam aliquã rectam, habeat autem & reliquum primi latus ad eandem rectam rationem datam, & ipsa parallelogr. habebunt ad inuicem rationẽ datã.

74. Si duo parallelogr. datam rat. habeant, aut in æqual. angulis, aut in inæq quidem, sed datis, erit vt primi latus ad secundi latus, ita alterum secundi latus ad eam ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

75. Si duo triangula ad inuicem habeant rat. dat. aut in ang. æqual. aut inæq. sed datis, erit vt primi latus, ad secundi latus, ita alterum secundi latus ad eam rectam ad quam reliquum primi latus habet rat. datam.

76. Si à trianguli dati specie vertice, linea perpendicularis agatur ad basim, acta linea ad basim habebit rationem datam.

77. Si datæ duæ figuræ specie ad inu. habeant rat. dat. & quodlibet latus vnius harũ figurarũ ad quodlibet latus alterius habebit rat. dat.

78. Si data figura specie habeat ad aliquod rectangulum rationem datam, habeat autem & vnum latus ad vnum latus rat. dat. rectangulum specie datum est.

79. Si duo triang. vnum angulum vni angulo æqualem habeant, ab æqual. autem angulis ad bases perpendiculares agantur, sitque vt primi triang. basis ad perpendicularem, ita & alterius trianguli basis ad perpend. illa triangula æquiangula sunt.

80. Si triangulus datus vnum angulum habuerit, quod autem sub lateribus datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habeat ad quadratum reliqui lateris rationem datam, triangulum specie datum est.

81. Si tres rectæ proportionales, tribus rectis proportionalibus, extremas habuerint in ratione data, medias quoque habebunt in ratione data. Et si extrema ad extremam, & media ad mediā habeat rationem datam, & reliqua ad reliquam habebit rationem datam.

82. Si 4. rectæ proport. fuerint, erit vt prima ad eā ad quam secunda rationem habet datam, ita tertia ad eam ad quam quarta rationem habet datam.

83. Si 4. rectæ ita ad inuicem se habeant, vt tribus ex ijs quibuscumque sumptis, & quarta ipsis proportionali accepta, ad quàm reliquæ è 4. rectis rat. habeant datam, erit vt quarta ad tertiam, ita secunda ad eam ad quam habet prima rationem datam.

84. Si 2. rectæ datum spatium comprehendunt in angulo dato, sit autem altera, altera maior data; etiam vna quæque ipsarum data erit.

85. Si 2. rectæ d. s. comp. in an. d. sit autem simul vtraque data, & earum quoque vnaquæque data erit.

86. Si 2. rect. d. s. com. in an. d. quadratum autem vnius quadrato alterius maius sit dato, quàm in ratione, & vtraque ipsarum dat. erit.

87. Si 2. rect. d. s. c. in a. d. possit autem altera altera maius dato, earum vtraque data erit.

88. Si in circulum mag. datum acta sit recta quæ segmentum auferat, quod datum angulum comprehendat, acta recta mag. data est.

89. Si in circulum mag. datum, data magnitudine recta acta fuerint, auferet segmentum, quod angulum datum comprehendet.

90. Si in circuli positione dati circumferentia datum fuerit punctum, ab eo autem puncto ad circumferentiam circuli inflexa fuerit recta, quæ datum angulum efficiat, inflexæ rectæ altera extremitas data est.

91. Si à dato puncto acta recta fuerit, quæ datum positione circulū contingat, acta linea positione, & magnitudine data est.

92. Si extra circulum posit. d. accipiatur aliquod punctū, á dato autem puncto in circulū producatur quædā recta, d. est id quod sub acta linea, & ea quæ inter pūctū & conuexā peripheriā cōprehēditur rect.

93. Si intra datum positione circulum sumatur aliquod datum punctum, per punctum autem agatur in circulum aliqua recta, quod sub segmentis actæ rectæ comprehenditur rectangulum datum est.

94. Si in circulum magnit. datum acta recta quæ segmentum auferat quod datum angulum comprehendat, angulus autem qui in segmento consistit bifariam secetur, simul vtraque rectarum quæ angulum datum comprehendunt, ad lineam quæ angulum bifariam secat, habebit rationem datam: & quod sub simul vtrisque quæ datum angulum comprehendunt rectis, & infernè abscissâ ab ea quæ angulum in circumferentia datum bifariam secat, rectangulum datum erit.

95. Si in circuli positione dati diametro sumatur punctum, à puncto autem in circulum producatur quædam recta, & agatur à sectione ad rectos angulos in productam rectam linea, per punctum autem in quo linea quæ ad rectos angulos consistit occurrit circumferentiæ circuli, agatur parallela productæ rectæ, datum est illud punctum, in quo parallela occurrit ipsi diametro, & quod sub parallelis lineis comprehenditur rectangulum datum est.

PAPPVS DE DATIS EVCLIDIS.

PRimus liber Datorum theoremata 90 continet, quorum primum vniuersè in magnitudinibus diagramma esse 23. 24 verò est in rectilineis proportionalibus sine positione; & quæ deinceps sequuntur 14, sunt in rectis lineis positione datis. Quæ sequuntur, decem in triangulis specie datis sine positione. Sequentia sex in parallelogrammis, & applicationibus spatiorum specie datorum. Quæ deinceps, quinque primum quidem in lineis; 4 verò in spatiis triangulis, quòd differentiæ quadratorum laterum ad ipsa triangula spatia proportionem habeant datam. Sequentia 7 vsque ad 73, in duobus parallelogrammis, quòd ob positiones in angulis proportionem inter se datam habeant; quorum aliqua similes habent epilogos in duabus triangulis.

In sequentibus 6 diagrammatibus vsque ad 79, duo quidem sunt in triangulis; quattuor verò in pluribus rectis lineis proportionalibus. Quæ deinceps tria, in duabus rectis lineis proportionalibus, quæ datum spatium continent. At quæ in omnibus octo, vsque ad 90, in circulis ostenduntur, vel magnitudine tantùm datis, vel etiam positione, nimirum rectis lineis per datum punctum ductis.

DE PROPORTIONIS SECTIONE.

QVam vnica propositione subdiuisa complectitur; quem tractatum tribus problematibus complexus est Snellius.

1. Datis duabus rectis annuentibus per datum extra ipsas punctum rectam educere, quæ ad earum concursum intercipiat segmenta in ratione imperata.

2. Per datum extra punctum rectam ducere, quæ ad duos terminos in rectis parallelis datos intercipiat segmenta in ratione data.

3. Datis duabus rectis annuentibus per datum extra ipsas punctum rectam ducere, quæ ab expositis ad duos datos in iisdem terminos intercipiat segmenta in ratione imperata.

DE SPATII SECTIONE.

AGgreditur postea spatij sectionem, quam similiter Snellius 4 Problem. ita restituit.

1. Datis duabus rectis per datum in alterutra punctum rectam educere, quæ ad datos in expositis terminos absumat segmenta datum spatium comprehendentia.

2. Datis duabus rectis per datum punctum educere rectam, quæ ad earum concursum intercipiat segmenta datum spatium comprehendentia. Vnde concluditur quî triangulum per rectam, à puncto extra, vel intra triangulum dato, eductam diuidatur in data ratione.

3. A datis duabus parallelis recta per punctum quod in neutra earum sit acta, ad datos in ipsis terminos absumere segmenta datum spatium comprehendentia.

4. Datis duabus rectis annuentibus per punctum extra ipsas datum rectam ducere, quæ ad datos in ipsis terminos absumat segmenta datum spatium comprehendentia.

DE DETERMINATA SECTIONE.

HVnc præterea tractatum idem Snellius 4 problematibus sequentibus complectitur.

1. Datam rectam infinitam vnico puncto secare, vt è rectis ad data duo puncta absumptis, vnius quadratum; ad rectangulum sub reliqua, & data externa comprehensum rationem habeat datam.

2. Datam rectam infinitam vnico puncto secare, vt è rectis ad data

tria puncta absumptis quod sub vna ipsarum, & data externa, ad id quod sub duabus reliquis comprehenditur rationem habeat datam.

3. Datam rectam infinitam vnico puncto secare, vt è rectis ad data in ipsa tria puncta absumptis, rectangulum sub duabus comprehensum, ad reliquæ quadratum rationem habeat datam.

4. Datam rectam infinitam vno puncto secare, vt è rectis ad data in ipsa 4 puncta absumptis, rectangulum sub duabus optatis comprehensum, ad rectangulum sub reliquis rationem habeat datam.

DE TACTIONIBVS, seu περὶ ἐπαφῶν.

SExdecim Problematibus tractatum hunc Vieta comprehendit in Apollonio Gallo, sed cùm in planis substiterit, illum ad Sphærica Problemata Clarissimus Fermatius 15 Problematibus extendit, quæ Vietæis subiungemus.

Problema 1. Per data duo puncta circulum magnitudine datum describere.

2. Datis 2 rectis, circulum magnitudice datum describere, qui datas rectas contingat.

3. Datis 2 circulis, tertium magnitudine datum describere, qui datos circulos contingat.

4. Dato puncto, & rectâ circulum magnitudine datum describere, qui per datum punctum transiens datam rectam contingat.

5. Dato puncto & circulo, alterum circulum magnitudine datum describere, qui per datum punctum transiens circulum datum contingat.

6. Datis positione recta & circulo, alterum circulum magnitudine datum describere, qui datam rectam, ac datum circulum contingat.

7. Datis 3 punctis in eadem recta non existentibus per eadem circulum describere.

8. Datis 2 punctis & recta, per data puncta circulum describere, quem data recta contingat.

9. Datis 3 rectis, non parallelis, describere circulum, quem harum vnaquæque contingat. Sequitur Lemma, per datum punctum ducere rectam secantem duas datas ad angulos æquales.

10. Datis 2 rectis, & puncto, per datum punctum circulum describere, quem datæ 2 rectæ contingant.

11. Dato circulo, & duabus rectis describere circulum, quem datus circulus, & datæ 2 rectæ contingant. Ante duodecimum Problema, tria Lemmata præmittit. Primum: Si duo circuli se mutuò se-

cent, à puncto autem sectionis ducatur per centrum vnius circulorum recta, ea non transibit per circuli centrum. 2. Si 2 circuli se mutuò secent, à puncto autem sectionis ducatur recta vtrumque circulum secans, erunt dissimilia circulorum segmenta. 3. Si per crura trianguli agatur recta basi parallela, itaut duo constituantur sub eodem vertice similia triangula, qui circa triangulum vnum describetur circulus, tangetur in vertice communi à circulo qui circa triangulum alterum describetur.

12. Datis puncto, recta, & circulo, per datum punctum describere circulum, quem data recta, & datus circulus contingant.

13. Datis 2 circulis, & recta, describere tertium circulum, quem duo dati, & data recta contingant.

14. Datis 2 punctis, & circulo, per data 2 puncta circulum describere, qui datum circulum contingant.

15. Datis 2 circulis, & puncto, per datum punctum circulum describere, quem duo dati circuli contingant.

16. Datis tribus circulis, describere quartum, quem illi contingant.

DE TACTIONIBVS SPHÆRICIS. PROBLEM. 15.

1. Datis 4 punctis, sphæram inuenire, quæ per data puncta transeat.

2. Datis 3 punctis, & plano, inuenire sphæram, quæ per data puncta transeat, & planum datum contingat.

3. Datis 3 punctis, & sphæra, inuenire sphæram, quæ per data puncta transeat, & sphæram datam contingat.

4. Datis 4 planis, inuenire sphæram, quæ data plana contingat.

5 Datis 3 planis, & puncto, inuenire sphæram, quæ per datum punctum transeat, & plana data contingat.

6. Datis 3 planis, & sphæra inuenire sphæram, quæ datam sphæram, & datá plana contingat.

7. Datis 2 punctis, & 2 planis, inuenire sphæram, quæ per data puncta transeat, & data plana contingat.

Ante 8. Prop. 5 Lemmata præmittuntur, lectione digna.

8. Datis 2 punctis, plano, & sphæra, inuenire sphæram, quæ per data puncta transeat, & sphæram ac planum datum contingat.

9. Datis 2 punctis, & 2 sphæris, inuenire sphæram, quæ per data 2 puncta transeat, & sphæras datas contingat.

10. Dato puncto, 2 planis, & sphæra, inuenire sphæram, quæ per datum punctum transeat, & sphæram, ac data plana contingat.

11. Dato

11. Dato puncto, plano, & 2 sphæris, inuenire sphæram, quæ per datum punctum transeat, & planum, ac sphæras datas contingat.

12. Dato puncto, & 3. sphæris, inuenire sphæram, quæ per datum punctum transeat, & sphæras datas contingat.

13. Datis 2 planis, & 2 sphæris, inuenire sphæram, quæ data plana, & sphæras contingat.

14. Datis 3 sphæris, & plano, inuenire sphæram, quæ sphæras, & datum planum contingat.

15. Datis 4 sphæris, inuenire sphæram, quæ datas contingat.

DE PORISMATIBVS EVCLIDIS.

PRædictis libris ordine subiicit Pappus Euclidis Porismata, 3 inquit, voluminibus contenta, quod vocat opus artificiosissimum, & perutile ad resolutionem obscuriorum problematum. Porisma verò facit medium inter theorema & problema, quòd proponatur ad inuentionem propositi.

Porrò testatur tribus illis libris contineri Lemmata 38, & 101 Theoremata, quæ nullus (quòd sciam) hactenus restituisse videatur variȩ tractatus istius prop. apud Pappũ pagina 161. Huius autem tractatus Restitutio Clarissimi Domini Fermatij postulat opem, qui 2 sequentes de locis planis libros adeò fœliciter redintegrauit.

DE LOCIS PLANIS.

DIuidit Pappus locos in ἐφεκτικοὺς, qui in seipsis consistunt, quo sensu locus puncti, lineȩ, superficiei, & solidi, est punctum, linea, superficies & solidum. Alij sunt διεξοδικοὶ se extra se extendentes vt cum locus puncti est linea, lineæ superficies, &c. Qui verò sunt in resoluto loco, alij positione dati, ἑκτικοὶ alij plani dicti & solidi, & lineares: διεξοδικοὶ sunt punctorũ; & ad superficies: ἀναστροφικοὶ punctorum; διεξοδικοὶ linearum; lineares ex ijs qui sunt ad superficies demonstrantur.

Porrò dicuntur plani loci, quicunque sunt rectæ lineæ, vel circuli. Solidi, qui conorum sectiones lineares, qui ad reliquas pertinent lineas, quales sunt cissoides, &c. Supersunt loci ab Eratosthene inscripti, ad medietates. Vnde constat quæ nobis desint, & quantum ope Geometricâ lineares, & alios locos suscitante egeamus: quod enim ad planos attinet, Cl. Fermatius illos restituit, & Pappi sequentem propositionem in pluribus obscuram & corruptam ita emendauit, vt eam in plures propositiones digesserit; sic igitur Pappus.

Si duæ lineæ agantur, vel ab vno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter se datam proportionem habentes, vel datum comprehẽdentes spatium; contingat autem terminus vnius locum planum positione datum, & alterius terminus locum planum positione datum continget: interdum quidem eiusd. generis, interdum verò diuersum, & interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo.

LIBRI PRIMI. PROPOSITIONES 15.

1 SI à dato puncto in rectam lineam duæ lineę agantur datam habentes proportionem, & terminus vnius contingat locum positione datum, hoc est aut rectam, aut circumferentiam circuli posit. datam, alterius terminus continget rectam, aut circuli circumferen. positione datam.

2. Si à dato puncto ducantur in directum duæ rectæ, datum continentes spatium, contingat autem terminus vnius locum planum positione datum, tanget pariter & terminus alterius.

3. Si à dato puncto ducantur 2. lineæ datum angulum continentes, & datam habentes proportionem, contingat autem terminus vnius locum planum positione datum, continget & terminus alterius.

4. Si à dato puncto ducantur 2 lineæ datum angul. conting. & datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus vnius locum planum positione datum, continget & terminus alterius.

5. Si à 2 punctis datis 2 lineæ parallelæ agantur, rationem habentes datam, contingat autem terminus vnius locum planum positione datum, continget & terminus alterius.

6. Si à 2 punctis datis 2 parallelæ agantur, datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus vnius locum planum positione datum continget & terminus alterius.

7. Si 2 lineæ agantur à datis 2 punctis, datum continentes angulum, & datam habente proportionem, contingat autem terminus vnius locum pl. p. d. conting. & terminus alterius.

8. Si à 2 punctis datis ducantur 2 lineæ, datum angulum, & datum spatium, continentes contingat autem term. vn. l. posi. d. cont. & term. alt. *Hic quidem nouus ordo propos. incipit, sed malim numeros persequi*: sit igitur.

9. Si rectæ lineæ positione datæ vnus terminus datus sit, & alter circumferentiam concauam positione datam continget.

10 Si à 2 punctis datis inflectantur rectæ datum angulum continentes, commune ipsorum punctum continget circumferentiam concauam positione datam.

11. Si trianguli spatij magnitudine dati basis positione & magnitudine data sit, vertex ipsius rectam positione datam continget.

12. Si rectæ magnit. datæ, & cuipiam positioni datæ æquidistantis vnus terminus contingat rectam positione datam, & alius terminus rectam positione datam continget.

13. Si à puncto quodam ad posit. datas 2 rectas parall. vel inter se conuenientes ducatur rectæ in dato angulo, vel datam habentes propor. vel quarum vna simul cum ea ad quam altera propor. habet datã, data fuerit, continget punctum rectam pos. datam.

14. Si sint quotcunque rectæ pos. datæ, atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis, sit autem quod datâ lineâ, & ductâ continetur, vnà cum contento datâ lineâ, & alterâ ductâ æquale ei, quod datâ & aliâ ductâ, & reliquâ continetur, punctum rectam pos. datam continget.

15. Si ab aliquo puncto ad pos. datas parallelas ducantur rectæ in datis angulis; quæ ad puncta in ipsis data abscindet rectam proport. habentes datam, punctum continget positione datam rectam.

LIBRI 2. PROPOSITIONES 8.

1. SI à datis punctis rectæ inflectantur, & sint quæ ab ipsis fiunt dato spatio differentia, punctum rectas positione datas continget.

2. Si à 2. p. inflectantur rectæ, & sint in proportione data, punctum continget rectam, vel circunferentiam.

3. Si sit positione data recta, & in ipsa datum punctum, à quo ducatur quædam recta terminata, à termino autem ipsius ducatur & ad positionem, & sit quod fit à ductâ, æquale ei quod à data & abscissa, vel & ad datum punctum, vel ad alterum datum in linea data positione, terminus ipsius circumferentiam positione datam continget.

4. Si à 2. punctis datis rectæ inflectantur, & sit quod ab vna efficitur, eo quod ab altera dato maior quàm in proportione, punctum posit. datum circumferentiam continget.

5. Si à quotcunque datis punctis ad vnum punctum inflectantur rectæ, & sint species quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales

punctum continget positione datam circumferentiam. Vbi 2 lemmatibus præmissis propositiones generalissimas bipartitur & demonstrat.

6. Si à 2 punctis datis inflectantur rectæ, & à puncto ad positione ductam lineam abscissa à recta positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis æquales ei, quod à data & abscissa continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget.

7. Si in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur quædam recta, & in ipsa punctum extrà sumatur, sit autem quod fit à linea ducta vsque ad punctum intra datum æquale ei quod à tota & extra sumpta vel soli, vel vnà cum eo quod duabus quæ intra circulum portionibus continetur punctum extra sumptum positione datam rectam continget.

8. Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur, quæ sunt ad vtrasque partes dati puncti, contingent positione eandem datam circumferentiam. Omitto locos ad superficiem, cuius Isagogem vir idem Cl. amicis communem fecit, & alia quæ vtinam ab eo tandem impetremus.

INCLINATIONVM PERGÆI A GHETALDO RESTITVTARVM

PROPOSITIONES 4.

1. IN dato circulo aptare rectam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.

2. Dato semicirculo & recta sit ipsius basi perpendicularis, inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat.

3. Rhombo dato, & vno latere producto, aptare sub angulo exteriori rectam magnitudine datam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

4. Rhombo dato, & duobus lateribus productis, aptare sub angulo

nteriori, rectam magnitudine datam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

His autem omnibus non ægrè feret Lector, si verbo librum acutum de sectionibus angularium subiunxerimus.



ANGVLARIVM SECTIONVM DOCTRINÆ

PROPOSITIONES XI.

1. SI fuerint triangula rectangula, quorum primi angulus acutus differat ab acuto secundi per acutum tertij, & sit excessus penes primum, latera tertij recipiunt hanc similitudinem.

Hypothenusa, sit similis rectangulo sub hypothenusis primi & secundi.

Perpendiculum, simile rectangulo sub perpendiculo secundi & base primi.

Basis rectangulo sub basibus primi & secundi, plus rectangulo sub perpendiculis eorundem. *Est autem perpendiculum, latus cui acutus angulus subtenditur, basis verò quæ reliquum è recto subtendit.*

2. Si fuerint tria triangula rectangula, quorum primi angulus acutus adiunctus acuto secundi, æquet acutum tertij, latera tertij recipiunt hanc similitudinem.

Hypothenusa, sit similis rectangulo sub hypothenusis primi & secundi.

Perpendiculum, simile rectangulo sub perpendiculo, & base secundi, plus rectangulo sub perpendiculo primi, & base primi.

Basis, rectangulo sub basibus primi & secundi, minus rectangulo sub perpendiculis eorundem.

3. Si fuerint triangula rectangula quotcunque, & horum secundi angulus acutus sit duplus ad acutum primi, tertij triplus, quarti quadruplus & eo continuò naturali progressu; primi autem trianguli perpendiculum statuatur prima proportionalium, basis eiusdem secunda, eaque series continuetur.

In secundo erit basis ad perpendiculum, vt tertia minus prima, ad secundam bis.

In tertio, vt quarta minus secunda ter, ad tertiam ter, minus prima.

In quarto, vt quinta minus tertia sexies, plus prima, ad quartam quater, minus secunda quater.

In quinto, vt sexta minus quarta decies, plus secunda quinquies, ad quintam quinquies, minus tertia decies plus prima.

Et ita in infinitum, distributis successiuè in duas partes proportionalibus, secundum earum seriem, vtrobique primum adfirmatis, deinde negatis, & sumptis multiplicibus, vt ordo graduum in artificiosa genesi potestatum, quibus eæ addicuntur, exigit. *Vide duas tabellas, quibus Theorema potest in infinitum continuari.*

4. Si à termino diametri sumantur in circulo circumferentiæ quotcunque æquales, & ab altera extremitate educantur rectæ ad sumptarum circumferentiarum æqualium terminos, erit, vt semidiameter ad rectam à iam dicta extremitate eductam diametro proximam, ita quælibet intermedia, ad summam duarum in eadem semiperipheria sibi vtrinque proximarum. At si educta sit minor subtensâ vnius æqualium partium, erit in prædicta ratione ad differentiam duarum sibi vtrinque proximarum.

5. Si in circumferentia circuli sumantur duo arcus continui inter se æquales, recta ab extremitate diametri ad communem illorum terminum ducta, erit ad aggregatum vel differentiam rectarum ab eadem extremitate diametri ad reliquos æqualium arcuum terminos ductarum, vt semidiameter ad subtensam complementi ad semicirculum vnius æqualium arcuum.

6. Si à termino diametri sumantur in circuló circumferentiæ quotcunque æquales, & ab altera extremitate educantur rectæ ad sumptarum circumferentiarum æqualium terminos, eductæ fiunt bases triangulorum, quorum communis hypothenusa est diameter; ac basis quidem diametro proximior intelligitur basis anguli simpli, succedens dupli, & eo continuo ordine: constituatur autem series linearum rectarum continuè proportionalium, quarum prima sit æqualis semidiametro, secunda basi anguli simpli, is reliquarum basium ordine succedentium erit progressus.

Tertia, continuè proportionalium, minùs prima bis, erit æqualis basi anguli dupli.

Quarta, minus secunda ter, basi anguli tripli.

Quinta, minus tertia quater, plus prima bis, basi anguli quadrupli.

Et ita in infinitum, vt per loca proportionalium imparia noua affectio succedat affirmatæ negata, negatæ affirmata, & proportiona-

les illæ ſint ſemper alternæ, & multiplices quidem, in prima adfectione, per vnitatis crementum: in ſecunda per numeros triangulos, in tertia per numeros pyramidales; in quarta per numeros triangulo-triangulos; in quinta per numeros triangulo-pyramidales: non quidem ab vnitate vt in poteſtatum geneſi, ſed à binario ſuum ducentes incrementum.

7. Si à termino diametri ſumantur in peripheria circuli partes quotcunque æquales, & ab eiuſdem diametri extremitate educantur rectæ ad ſingula ſectionum puncta: erit vt ſemidiameter ad ſubtenſam partium æqualium vni, ita reliquarum quælibet ab alterutro diametri termino educta, præter diametrum, aut diametro proximam, ad differentiam duarum à reliquo eiuſdem termino eductarum ad ſectiones ſibi vtrinque proximas. At ita diameter ipſa cùm in ſectionem æqualem incidit, vel cùm non incidit, ei proxima in ſectionem incidens, ad ſummam duarum ab altero diametri termino, ad proximas vtrinque ſectiones eductarum.

8. Si fuerint triangula rectangula æqualia hypothenuſæ, quorum primi angulus acutus ſit in ſubmultipla ratione ad angulos acutos ſuccedentium ordine triangulorum, ad acutum videlicet ſecundi ſubduplus, tertij ſubtriplus, quarti ſubquadruplus, & eo continuò ordine: conſtituatur autem ſeries rectarum continuè proportionalium, quarum prima ſit æqualis ſemihypothenuſæ, ſecunda perpendiculo anguli primi, inter ſuccedentes continuè proportionales & ſuccedentium triangulorum baſes, ac perpendicula, hæc erit æqualitas.

Prima bis, minus tertiâ continuè proportionalium, erit æqualis baſi trianguli ſecundi.

Secunda ter minus quarta, perpendiculo trianguli tertij.

Prima bis minus tertia quater, plus quinta baſi trianguli quarti.

Secunda quinquies, minus quarta quinquies, plus ſextâ, perpendiculo trianguli quinti.

Et ita in infinitum, inuerſo eo qui in quinto Theoremate expoſitus eſt ordine.

9. Si à puncto in peripheria circuli, ſumantur ſegmenta quotcunque æqualia, & ab eodem ad ſingula ſectionum puncta rectæ educantur; erit vt minima ad ſibi proximam, ita reliquarum quæuis à minima deinceps, ad ſummam duarum ſibi vtrinque proximarum.

10. Si à puncto in circuli circumferentia ſumantur partes quotcumque æquales, & ab eodem educantur rectæ ſumptarum circum-

ferentiarum æqualium terminos: constituatur autem series rectarum continuè proportionalium, quarum prima sit æqualis minimæ ductæ, secunda à minima secundæ; is reliquarum eductarum ordine succedentium erit progressus.

Tertia continuè proportionalium, minus primâ, erit æqualis tertiæ.

Quarta, minus secundâ bis, quartæ.

Quinta, minus tertiâ ter, plus primâ, quintæ. Et ita in infinitum, secundum numeros in quinto Theoremate expressos. Vide tabulam.

11. Si secetur semicircumferentia in partes quotcunque æquales, & ab altero diametri termino educantur rectæ ad quælibet sectionum puncta; est vt minima educta ad diametrum, ita composita ex diametro, minima & maxima, ad compositam ex omnibus eductis duplam.

IN HOC AVTEM LIBRO SEPTIMO Pappi sunt Propositiones 238.

POst tractatus omnes præcedentes quædam circa Propositiones 238. quas Pappus hocce libro tradit aduertenda sunt, nempe primâ Propositione secari rectam in data ratione; alias verò Propositiones non posse absque diagrammatibus facilè intelligi, nisi quis magna verborum ambage vtatur. A 22. Prop. agit de sectione determinata, de qua fusè loquitur Propos. 64. à qua librum inclinationum incipit, vt librum tactionum à Prop. 96. A Propos. 129. de porismatibus agit. Dehinc vsque ad Prop. 235. multa circa 8 conicorum libros aduertit: & à 235. Prop. de loco ad superficiem agit. Vide præclaram parabolæ proprietatem Prop. 238.

LIBRI OCTAVI PROPOSITIONES 22.

POst 24. Propositiones agit de quinque viribus, huncque librum ad filium Hermodorum mittit, in cuius Præfatione notat ex Herone mechanico duas esse partes mechanicæ, rationalem ex Geometria, Arithmetica, Astronomia, Physicisque rationibus constantem, & manuariam mannũ opera egentem, atque adeo ex æraria, tectonica, pictura constantem. Artémque manganorum, pondera machinis in altum tollentem, & sagittas catapultis emittentem. μιχανικοῖς permittit.

Omitto

Omitto πνευματικὰ, & hydraulica, de quibus fusè, dictum est, vt aduertas Carpo teste librum de Sphæropœia, seu sphæræ constructione ab Archimede scriptum. Porrò tractatum de graui & leui Pappus omittit, quod de iis egerit Ptolomæus in mechanicis, sed non extant. Hanc autem imprimis affert definitionem.

Centrum grauitatis vniuscuiusque corporis est punctum quoddam intra positum, à quo si graue dependens mente concipiatur, dum fertur quiescit, & seruat eam, quam in principio habebat, positionem, neque in ipsa latione circumuertitur. Vbi Commandinus obseruat non sufficere si corpus graue bis plano imponatur, sed tertio imponendum, vt grauitatis centrum appareat. Cùm autem sequentes propositiones diagrammata supponant, eas minimè refero, quarum sexta docet quî recta ita secetur, vt minor pars sit minoris potestate tripla. Octauâ, quomodo planum inclinetur, vt ipsius inclinatio vergat in vnum punctum plani non inclinati, seu horizonti æquidistantis, in parallelogrammo, & inclinatio sit in angulo dato.

Nonâ, dato pondere à data potentia dato in plano horizonti parallelo, & altero plano inclinato, quod ad subiectum planum datum angulum efficiat, quomodo inueniatur potentia, à qua pondus in plano inclinato ducatur. Vbi eum errasse dictum est libr. Mechan. Prop. 13. Coroll. 5. Decima, datum pondus data potentia moueri ad quod refertur Archimedeum, da mihi vbi consistam, & terram commouebo: huius propositionis factam ait constructionem libro βαρύλκοι, sumpto lemmate quod demonstrauit in mechanicis, in quibus etiam de quinque viribus differit, nempe cuneo vecte, cochlea, polyspasto, & axe; nam libro περὶ τῶν ζυγῶν de rotulis datâ potentiæ mouentibus; libro inscripto βαρύλκοι de tympanis dentatis, quorum diametri ad axis diametrum existentes vt 5 ad 1, moueant pondus mille talentorum, cum potentia 5 talentorum fuerit, sed de Glossocomo dictum est 11 mechan. prop. & de trochleis, & polyspastis 9 & 10.

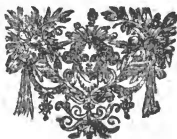
Prop. 15 Pappus dato circulo sublimi, non tamen in plano ad subiectum planum recto, inuenit communem sectionem vtrorumque planorum, & eorundem inclinationem.

Decimasextâ, tribuit minimam lineam inter sphæræ superficiem, & subiectum planum interiectam.

Decimaseptima, sphærâ posita, & puncto extra ipsam dato, inuenit punctum, in quo recta à dato puncto ad centrum sphæræ ducta circumferentiam secat.

Decima octauâ 2 punctis extra superficiem sphæræ datis, dat puncta, in quibus recta, data puncta contingens, sphæræ superficiem secat.

19. In dato circulo 7. hexagona deſcribit, vnum circa idem, quod eſt circuli centrum; reliqua 6 à medij lateribus, quæ oppoſita latera habent ad circuli circumferentiam aptata.
21. Vt velocitas tympani A, ad velocitatem tympani B, ita dentium B multitudo ad multitudinem dentium A.
22. Circulorum circumferentiæ ſunt vt eorum diametri.
23. Docet quomodo tympano dato tympanum aliud adhibeatur, & tympani diameter inueniatur.
24. Conſtruit cochleam, helicem habens obliquam dentibus tympani dati congruentem. Vbi de quinque viribus agit, & de iis quæ in ſolo ducuntur, vel in altum trahuntur: de quibus cum partim tract. præcedente mechan. tum poſtea ſecuturo, fuſe ſatis dixerimus, 8 Pappi libris finem apponamus.





MECHANICORVM LIBRI I.

PRÆFATIO.



MECHANICE est ars, seu facultas quæ naturali materia, & demonstrationibus vtitur, consulitque hominum necessitati, & vtilitati, ac ipsam naturam imitatur, vt pictura; vel iuuat, vt medicina: vel superat, vel decipit, quæ quidem effectus mirabiles producit, vt constat ex cochlea, de qua Guido Vbaldus 4. libros conscripsit, per quam aqua non ob aliam rationem ascendit, nisi quia descendit; & ex machinis vi quarum fultus Archimedes dicebat, δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν; siue βαρουλκῷ vteretur, quod Heroni tribuunt: siue ἑλικτικῷ illud instrumentum, quod vocamus cochleam, aut helicem infinitam, inuenerit; siue trispastò, & polyspasto illa miranda præstiterit, quæ passim de eo circumferuntur, siue quinque vires simul iunxerit, vt refert Iambographus Pisida, vectem nempe, trochleam, axem in peritrochio, cuneum, & cochleam, quibus Archimedis problema, τῇ δοθείσῃ δυνάμει τὸ δοθὲν βάρος κινῆσαι. Quod non minus mirabile cuipiam videatur, quàm illud Geometricum, mixtum angulum acuto quolibet maiorem, & minorem, non tamen æqualem dari posse; vel lineas in infinitum productas, propiusque inuicem semper accedentes nunquam posse concurrere, vt constat ex asymptotis cum hyperbole, & linea connoide cum recta linea, &c. Hos igitur Mechanicorum libros accipe, (mi THEOTIME) qui omnia ferè theoremata ad rotundam machinam reducentes, hoc axiomate nituntur: *Rotunda machina est mouentissima, & quo maior, eo mouentior*; quo ad illam diuinam sphæram spe erigamur, cuius centrum vbique, circumferentia nullibi esse dicitur; & quæ tempus ab æuo.

Ire iubet, stabilisque manens dat cuncta moueri.

DE GRAVITATIS
ET VNIVERSI CENTRO.
LIBER PRIMVS.

QVemadmodum præcedentes rerum Geometricarum tractatus, (mi THEOTIME) à materia sensibili, vt methaphysica ab omni, & physica à singulari, abstraxerunt, ita libri mechanici genus omne materiæ inuoluunt, & artefacta tam in genere, quàm in specie, & in particulari considerant, quæ cum maxime à centro grauitatis, magnitudinis, &c. pendeant, de eo priùs agamus; iuxta ea quæ à Commandino, Guid. Vbaldo, Valerio, & alijs tradita sunt.

PRIMA PARS CONTINENS
DEFINITIONES, ET EA QVÆ
spectant ad centrum vniuersi.

DEFINITIONES.

I. GRauitas est virtus corporis grauis, qua deorsum nititur & mouetur; quæ videtur oriri ex appetitu, quem habet graue ad sui conseruationem: nisi quis malit descensum corporum grauium fieri à qualitate attractiua terræ siue magneticâ, siue qualibet alia.

II. Leuitas est virtus corporis leuis, qua sursum nititur & tendit; si tamen aliqua leuitas, & non potiùs minor solùm grauitas detur in rerum natura.

III. Centrum grauitatis vniuscuiusque corporis est punctum illud intrà, extráve positum, circa quod vndique partes æqualium momentorum consistunt, ita vt si per tale centrum ducatur planum figuram quomodocumque secans, semper in partes æquiponderantes ipsum diuidat. *Aliter.* Est punctum illud, à quo si corpus suspendatur, quiescit, & eam pòotionem seruat, quam in principio habuit, quantumcumque moueatur, & circumferatur. Centrum verò grauitatis est vel linearum,

vel figurarum, vel solidorum.

IV. Centrum leuitatis est punctum, secundùm quod leuia rectà à centro sursum feruntur. Vtrumque verò tam grauitatis, quàm leuitatis centrum, dicitur naturæ, quando corpora naturali impetu feruntur; violentiæ verò, quando impetu impresso mouentur, hoc est qualitate, seu virtute aduentitia, qua in aliquam partem proiiciuntur.

✠ V. Centrum magnitudinis est punctum ab omnibus extremitatibus corporis distans æqualiter, quale est centrum circuli, & sphæræ; quod etiam est centrum magnitudinis omnium figurarum regularium circulo inscriptarum, vel circumscriptarum. Ac in magnitudinibus irregularibus est punctum, per quod diuisa magnitudo relinquit duas partes æquales magnitudinis.

✠ VI. Centrum figuræ est punctum, à quo semidiametri exeunt: vel per quod transeunt diametri, vt circuli centrum, & ellipsis.

✠ VII. Centrum vniuersi est punctum illud, ad quod omnia grauia rectis lineis feruntur: estque centrum omnium grauium: quod quidem vulgò assumitur, sed demonstrari nequit; cum probabile sit esse peculiare centrum grauitatis in quolibet systemate particulari vniuersi, seu in omnibus maioribus corporibus: nihil igitur temerè asserendum de centro vniuersi; quo tamen supposito, vtpote nostris experientiis arridente, sit.

VIII. Linea directionis, seu diameter grauitatis pendula, hoc est horizonti perpendicularis, est linea ducta à centro proprio vniuscuiusque grauis ad centrum vniuersi, quæ totuplex est, quotuplex est corpus graue extra centrum, & per quam vt motus directricem graue descendit, nisi impediatur: in quolibet autem illius puncto graue æquiponderare supponitur.

IX. Grauitatis corporeæ diameter, est recta infinita per grauitatis centrum acta, sicut diameter magnitudinis est linea recta ducta per centrum magnitudinis.

X. Grauitatis planum diametrale est quæcumque recta superficies per grauitatis centrum transiens: Quibus addi poterunt definitiones Commandini, quas affert libro de centro grauitatis solidorum, quem sequentibus propositionibus subiungemus.

DE CENTRO VNIVERSI.

PROPOSITIONES.

I.

✠ SVpponamus omnia grauia mundi medium appetere, & rectis lineis ad illud ferri naturaliter, id enim ab omnibus ferè conceditur, quod tamen nondum demonstratum est: quis enim nouit, num siderum partes auulsæ grauitent, & ad suum astrum, velut lapides in altum sublati ad terram, redeant; & an lapides, lunæ, verbi gratiâ, quàm terræ propinquiores, ad terram, aut ad lunam descensuri sint.

II.

Si centrum terræ est centrum vniuersi, distamus à centro mundi 1145 leucas, quarum vnaquæque 15000 pedes regios habet: quandoquidem diameter globi terreni est 2290 leucarum, maximúsque propterea illius circulus 7200 leucarum, iuxta ea quæ demonstrauit Archimedes, nempe diametrum sphæræ esse ad eius circumferentiam vt 7 ad 22 proximè.

III.

✠ Si solis centrum sit centrum vniuersi, statim plus, statim minus à medio mundi distamus; semidiametris nempe terrenis 1101. hyeme, cùm sol sit perigæus; æstate verò 1182, quando est apogæus: itaque nobis hyeme vicinior erit 81 semidiametris terrenis: *De quibus in sphæricis dictum est:* deinceps verò quædam proponentur, quæ ex centro terreni globi pendent.

IV.

Tametsi lineæ ductæ à centro terræ ad eius circumferentiam magis semper à se ipsis recedant, quo magis distant à centro, attamen illarum partes inter pedem & altitudinem montium quantumuis sublimium interceptæ pro parallelis sumi possunt: ideóque non plures domus ædificari, arbores plantari, aut homines stare possunt supra montem, quàm super planam superficiem, cui mons innititur, quamuis montis superficies plani superficie quadruplo fuerit amplior.

V.

Ob maiorem capitis hominis 6 pedes alti, quàm pedum à centro terræ distantiam, caput hominis terram circumies 4 ferè leucis superaret spatium à pedibus confectum; *vt pagina 873 libri de veritate scientiarum*

ostensum est. Quæ tamen maioris spatij differentia non est sensibilis in itinere vnius leucæ.

VI.

Vas in pede montis positum, vel in alio inferiori loco, plus aquæ, vel alterius humidi continet, quam in vertice montis, vel in alio superiori loco, idque ob maiorem portionem circuli à centro terræ per labra vasis inferioris, quàm vasis superioris ducti: verùm illud quo inferius excedit superius, sensibile non est.

VII.

✠ Nullus stare potest, nisi linea perpendicularis, seu directionis per illius pedes transeat: hinc fit vt homo sedens, cuius quietem, vel sessionem Aristoteles qu. 30. mechanicorum in rectum angulum refert, non possit surgere, donec acutum angulum caput, vel corpus cum cruribus efficiat, & caput cum pedibus in eadem directionis linea statuatur.

VIII.

Si centrum terræ sit centrum vniuersi, hoc centrum pluribus modis reperiri potest, duobus verò præsertim; primo, si duo longissima fila à se distantia à vertice turris vsque ad centrum descenderint, hæc enim eo magis ad se inuicem accedent, quo propiùs accesserint ad centrum: tot autem erunt partes à centro terræ vsque ad verticem turris æquales vni filo, quot erunt partes æquales excessui maioris distantiæ filorum supra minorem eorundem distantiam. Secundo, ab eleuatione data poli procedendo ad aliam maiorem, aut minorem vno gradu eleuationem; enimuero differentia vnius gradus dabit 20 leucas, quæ per 360 gradus multiplicatæ exhibent 7200 leucas pro circunferentia, ex qua nota semidiameter, atque adeò centrum terræ, seu vniuersi facilè concluditur: hic autem modus est primo præferendus, cum in primo excessus prædictus sit insensibilis: vt pag. 875. libri de veritate scientiarum demonstratum est.

IX.

Si centrum terræ est centrum vniuersi, & terra ingenti pondere, qualis est exercitus, in vna parte posito, mutet locum descendendo, vel ascendendo, centrum vniuersi mobile est. Viderint astronomi num motus liberationis, siue trepidationis, qui in cœlis obseruatus est in motum terræ referri possit. At verò definire quantū pondus sit necessarium vt terra locum mutet, videtur difficile; quod tamen facile erit, si bilancium, vel librarum rationes sequamur.

X.

Si grauitas corporum oritur ex maiori densitate partium, an centrum terræ corporum densissimum? quam densitatem soli tribuunt, qui

ſtatuunt illum pro centro vniuerſi, huic enim tantumdem materiæ, quantum reliquis mundi corporibus tribuunt: quæ penitus incerta ſunt.

SECVNDA PARS.

DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

CVm animaduertiſſet Commandinus Archimedem de centro planorum, libro κέντρα βάρων ἐπιπέδων, quem ſupra dedimus, copioſiſſime, & acutiſſime ſcripſiſſe, nullum autem egiſſe de centro grauitatis ſolidorum, nec enim extat Maurolyci liber quem de hac materia compoſuiſſe dicitur; librum verò de iis quæ vehuntur in aqua, quem Latine reddiderat, huius centri cognitione indigere, tractatum ſequentem edidit, cui tres Lucæ Valerij de eadem materia libros ob rationes ſuo loco explicandas ſubiungemus: ſint igitur

DEFINITIONES.

I. PRima definitio docet quid ſit centrum grauitatis, quæ nobis fuit inferiùs tertia.

✠ II. Priſmatis, cylindri, & portionis cylindri axis eſt recta linea, quæ oppoſitorum planorum centra grauitatis coniungit.

✠ III. Pyramidis, coni & portionis coni axis eſt linea, quæ à vertice ad centrum grauitatis baſis perducitur.

✠ IV. Si pyramis conus, portio coni, vel conoidis ſecetur plano baſi æquidiſtante, pars, quæ eſt ad baſin, fruſtum pyramidis, coni, portionis coni, vel conoidis dicetur: quorum plana æquidiſtantia, quæ opponuntur, ſimilia ſunt, & inæqualia: axes verò ſunt axium figurarum partes, quæ in ipſis comprehenduntur.

Poſtulata.

✠ I. Solidarum figurarum ſimilium centra grauitatis ſimiliter ſunt poſita.

✠ II. Solidis figuris ſimilibus, & æqualibus, inter ſe aptatis, centra quoque grauitatis inter ſe aptata erunt.

Propoſitiones

Propositiones & Theoremata.

I.

✠ Omnis figuræ rectilineæ in circulo descriptæ, quæ æqualibus lateribus, & angulis continetur, centrum grauitatis est idem, quod circuli centrum.

II.

Omnis figuræ rectilineæ in ellipsi descriptæ, centrum grauitatis est idem quod ellipsis centrum.

III.

✠ Cuiuslibet portionis circuli, & ellipsis, quæ dimidia non sit maior, centrum grauitatis in portionis diametro consistit.

IV.

In circulo & ellipsi idem est figuræ, & grauitatis centrum. *Vnde sequitur portionis circuli, vel ellipsis, quæ dimidia maior sit, centrum grauitatis in diametro quoque ipsius consistere.*

V.

✠ Si prisma secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio erit figura æqualis & similis ei, quæ est oppositorum planorum, centrum grauitatis in axe habens. *Hinc constat cuiuslibet prismatis axem, parallelogrammorum lateribus, quæ ab oppositis planis ducuntur, æquidistare.*

VI.

✠ Cuiuslibet prismatis centrum grauitatis est in plano, quod oppositis planis æquidistans reliquorum planorum latera bifariam diuidit.

VII.

✠ Cuiuslibet cylindri, & cylindri portionis centrum grauitatis est in plano, quod basibus æquidistans, parallelogrammi per axem latera bifariam secat.

VIII.

✠ Cuiuslibet prismatis, & cylindri, vel cylindri portionis grauitatis centrum in medio ipsius axis consistit.

IX.

✠ Si pyramis secetur plano basi æquidistante, sectio erit figura similis ei, quæ est basis, centrum grauitatis in axe habens.

X. *Problema I.*

Data qualibet pyramide, fieri potest, vt figura solida in ipsa inscribatur, & altera circumscribatur ex prismatibus æqualem altitudinem habentibus, ita vt circumscripta inscriptam excedat magnitudine, quæ minor sit quacumque solida magnitudine proposita.

XI. *Problema 2.*

Dato cono, fieri poteſt, vt figura ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem habentibus altitudinem, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam, magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

XII. *Problema 3.*

Data coni portione, poteſt ſolida quædam figura inſcribi, & altera circumſcribi ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus, itavt circumſcripta inſcriptam exuperet, magnitudine quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita.

XIII. *Probl. 4.*

Data ſphæræ portione, quæ dimidia ſphæra maior non ſit, poteſt ſolida quædam portio inſcribi, & altera circumſcribi ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ita vt circumſcripta inſcriptam excedat, magnitudine, quæ ſolida propoſita magnitudine ſit minor.

XIV.

Cuiuslibet pyramidis, & coni, vel coni portionis, centrum grauitatis in axe conſiſtit.

XV.

Cuiuslibet portionis ſphæræ, vel ſphæroidis, quæ dimidia maior non ſit: itemque cuiuslibet portionis conoidis, vel abſciſſæ plano ad axem recto, vel non recto, centrum grauitatis in axe conſiſtit.

XVI.

In ſphæra, & ſphæroide idem eſt grauitatis, & figuræ centrum: *& per conſequens portionis ſphæræ, vel ſphæroidis centrum grauitatis in axe conſiſtit.*

XVII.

Cuiuslibet pyramidis triangularem baſim habentis grauitatis centrum eſt in puncto, in quo ipſius axes conueniunt.

XVIII.

Si ſolidum parallelepipedum ſecetur plano baſibus æquidiſtante: erit ſolidum ad ſolidum, ſicut altitudo ad altitudinem, vel ſicut axis ad axem.

XIX.

Solida parallelepipeda in eadem baſi, vel in æqualibus baſibus conſtituta eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines: & ſi axes ipſorum cum baſibus æquales angulos contineant, eam quoque quam axes proportionem habebunt.

Ex quibus patet priſmata omnia, & pyramides, quæ triangulares baſes

habent, siue in eisdem, siue in æqualibus basibus constituantur, eandem proportionem habere quam altitudines: & si axes cum basibus æquales angulos contineant, similiter eandem quam axes, habere proportionem: sunt enim solida parallelepipeda prismatum triangulares bases habentium dupla: & pyramidum sextupla.

XX.

Prismata omnia, & pyramides quæ in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur, eam inter se proportionem habent quam altitudines: & si axes cum basibus faciunt angulos æquales, eam etiam, quam axes habent proportionem.

XXI.

Prismata omnia, & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

Hinc constat prismata omnia, & pyramides, in quibus axes cum basibus æquales angulos continent, proportionem habere compositam ex basium proportione, & proportione axium; demonstratum est enim axes inter se eandem proportionem habere, quam ipsa altitudines.

XXII.

Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, vel coni portionis axis à centro grauitatis ita diuiditur, vt pars, quæ terminatur ad verticem reliquæ partis, quæ ad basim sit tripla.

XXIII. *Probl. 5.*

Quodlibet frustum à pyramide, quæ triangularem basim habeat, abscissum, diuiditur in tres pyramides proportionales, in ea proportione, quæ est lateris maioris basis ad latus minoris ipsi respondens.

XXIV.

Quodlibet frustum pyramidis, vel coni, vel coni portionis, plano basi æquidistanti ita secare, vt sectio sit proportionalis inter maiorem, & minorem basim.

XXV.

Quodlibet frustum pyramidis, vel coni, vel coni portionis ad pyramidem, vel conum, vel coni portionem, cuius basis eadem est, & æqualis altitudo, eandem proportionem habet, quàm vtræque bases, maior & minor simul sumptæ vnà cum ea, quæ inter ipsas sit proportionalis, ad basim maiorem.

XXVI.

✠ Cuiuslibet frusti à pyramide, vel cono, vel coni portione abscissi, centrũ grauitatis est in axe, ita vt eo primùm in duas portiones diuiso, portio superior, quæ minorem basim attingit, ad portionem reliquam eam habeat proportionem, quam duplum lateris, vel diametri maioris

basis vnà cum latere, vel diametro minoris, ipsi respondente, habet ad duplum lateris, vel diametri minoris basis vnà cum latere, vel diametro maioris: deinde à puncto diuisionis quarta parte superioris portionis in ipsa sumpta: & rursus ab inferioris portionis termino, qui est ad basim maiorem, sumpta quarta parte totius axis: centrum sit in linea, quæ his finibus continetur, atque in eo lineæ puncto, quo sic diuiditur, vt tota linea ad partem propinquiorem minori basi, eandem proportionem habeat, quam frustum ad pyramidem, vel conum, vel coni portionem, cuius basis sit eadem, quæ basis maior, & altitudo frusti altitudini æqualis.

XXVII. *Probl. 6.*

Omnium solidorum in sphæra descriptorum, quæ æqualibus, & similibus basibus continentur, centrum grauitatis est idem, quod sphæræ centrum.

XXVIII. *Probl. 7.*

Data qualibet portione conoidis rectanguli, abscissa plano ad axem recto, vel non recto, fieri potest, vt portio solida inscribatur, vel circumscribatur ex cylindris, vel cylindri portionibus, æqualem habentibus altitudinem, ita vt recta linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & figuræ inscriptæ, vel circumscriptæ interiicitur, sit minor qualibet recta linea proposita.

Vnde patet centrum grauitatis figuræ inscriptæ & circumscriptæ eo magis accedere ad portionis centrum, quo pluribus cylindris, vel cylindri portionibus constet: fiatque figura inscripta maior, & circumscripta minor: & quanquam continenter ad portionis centrum propiùs admoueatur, nunquam tamen ad ipsum perueniet: sequeretur enim figuram inscriptam non solùm portioni, sed etiam circumscriptæ figuræ æqualem esse, quod est absurdum.

XXIX.

✠ Cuiuslibet portionis conoidis rectanguli axis à centro grauitatis ita diuiditur, vt pars quæ terminatur ad verticem, reliquæ partis, quæ ad basim sit dupla.

XXX.

Si à portione conoidis rectanguli alia portio abscindatur, plano basi æquidistante, habebit portio tota ad eam, quæ abscissa est, duplam proportionem eius, quæ est basis maioris portionis ad basim minoris, vel quæ axis maioris ad axem minoris.

XXXI.

✠ Cuislibet frusti à portione rectanguli conoidis abscissi, centrum grauitatis est in axe, ita vt demptis primùm à quadrato, quod fit ex

diametro maioris basis, tertia ipsius parte, & duabus tertiis quadrati, quod fit ex diametro basis minoris: deinde à tertia parte quadrati maioris basis rursus dempta portione, ad quam reliquum quadrati basis maioris vnà cum dicta portione, duplam proportionem habeat eius, quæ est quadrati maioris basis ad quadratum minoris: centrum sit in eo axis puncto, quo ita diuiditur, vt pars quæ minorem basim attingit, ad alteram partem eandem proportionem habeat, quam dempto quadrato minoris basis à duabus tertiis quadrati maioris, habet id, quod reliquum est vnà cum portione à tertia quadrati maioris parte dempta, ad reliquam eiusdem tertiæ portionem.

TERTIA PARS

CONTINENS TRES LIBROS

Lucæ Valerii de centro grauitatis solidorum.

CVm Lucas Valerius animaduertisset corporum planis terminis definitorum, nec non cylindri, & coni, & frusti conici, & sphæræ, & sphæroidis centrum grauitatis à Commandino ostensum fuisse; aliorum autem, quæ superficie mixta continentur, vno conoide parabolico tentato, centrum grauitatis ab eo inueniri non potuisse; tribus libris ostendit centrum grauitatis non solùm conoidis parabolici, sed etiam hyperbolici, & frusti vtriusque, & portionis vtriusque conoidis, & portionis frusti, & hemisphærij, & hemisphæroidis, & cuiuslibet portionis sphæræ, & sphæroidis vno & duobus parallelis abscissæ. Tametsi autem quibusdam Archimedis, & Commandini propositionibus vtatur, vtpotè Archimedis 14. 17. & secunda parte vigesimæ, in primo libro, & vna, in secundo libro: Commandini verò, in primo libro 23. 25. 32. 33. 34. 37. 39. 41. & 42. omnes tamen referemus, vt aliæ propositiones faciliùs intelligantur.

LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

✝ I. Figuræ aliquæ planæ multilateræ centrum habere dicuntuur punctum illud, in quo omnes rectæ lineæ vel angulos oppositos iungentes bifariam secantur, vel ab angulis ductæ ad laterum oppositorum bipartitas sectiones in easdem rationes.

II. Circa diametrum est figura plana, in qua recta quædam, quæ diameter figuræ dicitur, omnes rectas alicui parallelas, à figura terminatas bifariam diuidit.

III. Octaedron communiter dictum, est figura solida octo triangulis binis parallelis, æqualibus & similibus comprehensa.

IV. Polyedri regularis centrum dicitur punctum, in quo omnes rectæ lineæ, quæ ad angulos oppositos pertinent, bifariam diuiduntur.

V. Cuiuslibet figuræ grauis centrum grauitatis est punctum illud, à quo suspensum graue per se manet partibus quomodocumque circa constitutis.

VI. Axis prismatis, & pyramidis eius frusti dicitur recta linea, quæ in pyramide à vertice ad basis centrum figuræ vel grauitatis pertinet: in reliquis autem, quæ basium oppositarum figuræ vel grauitatis pertinet: in reliquis autem, quæ basium oppositarum figuræ vel grauitatis centra coniungit.

VII. Si qua figura solida planis parallelis ita secari possit, vt quæcumque sectiones centrum habeant, & sint inter se similes: aliqua autem recta linea; siue ad centra basium oppositarum prædictis sectionibus parallelarum, & similium, vt in cylindro: siue ad verticem, & centrum basis terminata, vt in cono, hemisphærio, & conoide, transeat per centra omnium prædictarum sectionum; ea talis figuræ axis nominetur: ipsa autem figura, solidum circa axim. Quæ si vel vnam tantùm habeat basim, vel duas inæquales, & parallelas: duarum autem quarumlibèt prædictarum sectionum vertici, vel minoris basi propinquior sit minor remotiori: solidum circa axem in alteram partem deficiens nominetur: quo nomine significari etiam volumus ea solida, quorum quælibet sectiones basi parallelæ, quamuis non sint basi omnino similes, tamen iis figuris deficiunt, quæ sunt similes basi, ac totis iis, à quibus ipsæ ablatæ intelliguntur, ita vt tota figura &

ablata habeant commune centrum in vna recta linea ad centrum basis terminata, quæ & ipsa talis solidi axis nominetur.

POSTVLATA.

I. Omnis figuræ grauis vnum esse centrum grauitatis.

II. Omnium figurarum sibi mutuò congruentium centra grauitatis mutuò sibi congruere.

III. Omnis figuræ, cuius termini omnis cauitas est interior, intra terminum esse centrum grauitatis.

IV. Similium triangulorum similiter posita esse centra grauitatis. In triangulis autem similibus similiter posita puncta esse dicuntur, à quibus rectæ ad angulos æquales ductæ cum lateribus homologis angulos æquales faciunt.

V. Æqualia grauia ab æqualibus longitudinibus secundum centrum grauitatis suspensa æquiponderare.

VI. A quibus longitudinibus duo grauia æquiponderant, ab iisdem alia duo quælibet illis æqualia æquiponderare.

PROPOSITIONES.

I.

SI sint quotcumque magnitudines inæquales deinceps proportionales: excessu, quibus differunt, deinceps ab angulis proportionales erunt, in proportione totarum magnitudinum.

II.

In omni triangulo vnum dumtaxat punctum est, in quo rectæ ad latera incidentes secant sese in easdem rationes & segmenta, quæ ad angulos, sunt reliquorum dupla: & prædictæ incidentes, secant trianguli latera bifariam.

III.

In similibus triangulis rectæ lineæ, quæ inter centra, & alia in iis similiter posita puncta interiiciuntur, proportionales sunt in proportione laterum homologorum.

IV.

Datis duobus triangulis scalenis similibus, & dato puncto in altero eorum, vnum dumtaxat punctum in reliquo triangulo prædicto puncto similiter positum potest inueniri.

V.

Cuiuslibet figuræ planæ rectangulum æquale potest esse.

VI.

Omni figuræ circa diametrum in alteram partem deficienti figura quædam ex parallelogrammis æqualium altitudinum inscribi potest, & altera circumscribi, ita vt circumscripta superet inscriptam minori spatio quantacumque magnitudine proposita. Semper autem in similibus intellige, eiusdem generis.

VII.

Pyramides similibus, & æqualibus triangulis comprehensæ inter se sunt æquales.

Corollarium. Hinc facile colligitur omnia solida, quæ in pyramides æqualibus, & similibus triangulis comprehensas multitudine æquales diuidi possunt, esse inter se æqualia. Quocirca omnia prismata, & pyramides, & octoedra, omnia denique corpora regularia æqualibus, & similibus planis comprehensa inter se æqualia erunt.

VIII.

✠ Omnis pyramidis triangulam basim habentis quatuor axes secant se in vno puncto in easdem rationes, ita vt segmenta quæ ad angulos, eorum quæ ad opposita triangula sint tripla: ex quo puncto tota pyramis diuiditur in quatuor pyramides æquales. Et in nullo alio puncto quatuor rectæ lineæ ductæ ab angulis ad triangula opposita pyramidis secant sese in easdem rationes. Vocetur autem punctum hoc centrum dictæ pyramidis.

IX.

Omnis pyramis basim habens triangulam diuiditur in quatuor pyramides æquales, & similes inter se, & toti, & vnum octaedrum totius pyramidis dimidium, ipsique concentricum.

X.

✠ Omne frustum pyramidis triangulam basim habentis, siue coni, ad pyramidem, vel conum, cuius basis est eadem, quæ maior basis frusti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quam duo latera homologa, vel duæ diametri basium ipsius frusti, vnà cum tertia minori proportionali ad prædicta duo latera, vel diametros: ad maioris basis latus, vel diametrum. Ad prisma autem, vel cylindrum, cuius eadem est basis, quæ maior basis frusti, & eadem altitudo: vt tres prædictæ deinceps proportionales simul, ad triplum lateris, vel diametri maioris basis.

XI.

Omni solido circa axem in alteram partem deficienti, cuius basis

fit

sit circulus, vel ellipsis, figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, æqualium altitudinum inscribi potest, & altera circumscribi, ita vt circumscripta superet inscriptam minori excessu quacumque magnitudine propo sitâ.

XII.

Dato parellelepipedo erecto circa datam rectam lineam tanquam axim, erectum parallelepipedum æquale constituere.

XIII.

Cuilibet figuræ solidæ parallelepipedum æquale potest esse.

XIV.

✠ Omnis parallelogrammi centrum grauitatis diametrum bifariam diuidit.

✠ *Corollarium.* Hinc manifestum est omnis parallelogrammi centrum grauitatis esse in medio rectæ, quæ oppositorum bipartitorum laterum sectiones iungit.

XV.

✠ Si quodlibet parallelogrammum in duo parallelogramma diuidatur, & eorum centra grauitatis iungantur recta linea: totius diuisi parallelogrammi centrum grauitatis prædictam lineam ita diuidit, vt eius segmenta è contrario respondeant prædictis partibus parallelogrammis.

XVI.

✠ Plana grauia æquiponderant à longitudinibus ex contraria parte respondentibus.

Coroll. Hinc manifestum est si cuiuslibet figuræ planæ vtcumque sectæ centra grauitatis partium iungantur recta linea, talem lineam à centro grauitatis totius prædicti plani ita secari, vt segmenta ex contrario respondeant prædictis partibus.

XVII.

✠ Si totum quoduis planum, & pars aliqua non habeant idem centrum grauitatis, & eorum centra iungantur recta linea: in ea producta ad partes centri grauitatis totius, erit reliquæ partis centrum grauitatis.

XVIII.

Si totum quoduis planum sit vni parti concentricum secundùm centrum grauitatis, & reliquæ erit concentricum. Et si partes inter se sint concentricæ, & toti erunt concentricæ.

XIX.

Omnis trianguli rectilinei idem est centrum grauitatis, & figuræ.

Propositio. Datis duobus triangulis isoscelijs similibus, & in altero eorum dato puncto extra rectam quæ à vertice ad medium basis cadit,

duo puncta in reliquo triangulo prædicto puncto similiter posita inuenire.

XX.

Omnes trapezij habentis duo latera parallela centrum grauitatis est in illa recta, quæ prædictorum bipartitorum laterum sectiones iungit. Atque in eo puncto, in quo tertia pars eius media sic diuiditur, vt segmentum propinquius minori parallelarum ad reliquum eam proportionem habeat, quam maior parallelarum ad minorem. Talis autem rectæ lineæ sic diuisæ segmentum minorem parallelarum attingens est ad reliquum, vt dupla maioris parallelarum vnà cum minori, ad duplam minoris vnà cum maiori.

XXI.

✠ Omnis polygoni æquilateri, & æquianguli idem est centrum grauitatis, & figuræ.

XXII.

✠ Omnis figuræ circa diametrum in alteram partem deficientis, in diametro est centrum grauitatis.

Coroll. Ex huius theorematis demonstratione constat omnis figuræ planæ, siue solidæ, cuius termini omnis cauitas sit interior, atque ideo intra terminum centrum grauitatis: & cuius pars aliqua esse possit, quæ à tota figura deficiens minori defectu quacumque magnitudine proposita habeat centrum grauitatis in aliqua certa linea rectâ intra terminum figuræ constituta, esse in ea recta linea totius figuræ centrum grauitatis. Ac proinde, cùm per 11. huius, omni solido circa axim in alteram partem deficienti, & basim habenti circulum, vel ellipsim figura inscribi possit, ex cylindris, vel cylindri portionibus, à prædicto solido deficiens minori spatio quacumque magnitudine proposita: talis autem figuræ inscriptæ, quemadmodum & circumscriptæ centrum grauitatis sit in axe, vt ex sequentibus patebit, & nunc cogitanti facile patere potest: manifestum est omnis solidi circa axim in alteram partem deficientis centrum grauitatis esse in axe.

XXIII.

Circuli, & ellipsis idem est centrum grauitatis & figuræ.

XXIV.

Si duarum pyramidum triangulas bases habentium æqualium, & similium inter se, tria latera tribus lateribus homologis fuerint in directum constituta, in vertice communi erit vtriusque simul centrum grauitatis.

XXV.

✠ Omnis parallelepipedi centrum grauitatis est in medio axis.

XXVI.

Si parallelepipedum in duo parallelepipeda ſecetur, ſegmenta axis à centris grauitatis totius parallelepipedi, & partium terminata ex contrario parallelepipedi partibus reſpondent.

XXVII.

✠ Solida grauia æquiponderant à longitudinibus ex contraria parte reſpondentibus.

XXVIII.

✠ Quarumlibet trium magnitudinum eiuſdem generis centra grauitatis cum centro magnitudinis ex iis compoſitæ ſunt in eodem plano.

XXIX.

✠ Si à cuiuslibet trianguli centro, & tribus angulis quatuor rectæ inter ſe parallelæ plano trianguli inſiſtant: tres autem magnitudines æquales habeant centra grauitatis in iis tribus, quæ ad angulos: trium magnitudinum ſimul centrum grauitatis erit in ea, quæ ad trianguli centrum terminatur.

XXX.

✠ Omnis octaedri idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

XXXI.

Omnis pyramidis triangulam baſim habentis idem eſt centrum grauitatis & figuræ.

Coroll. Hinc manifeſtum eſt centrum grauitatis pyramidis triangulam baſim habentis eſſe in eo puncto, in quo ſic axis diuiditur, vt pars quæ ad verticem, ſit reliquæ tripla.

XXXII.

✠ Omnis pyramidis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis axim ita diuidit, vt pars, quæ eſt ad verticem, ſit tripla reliquæ.

XXXIII.

✠ Omnis priſmatis triangulam baſim habentis centrum grauitatis eſt in medio axis.

XXXIV.

Omnis priſmatis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis eſt in medio axis.

XXXV.

✠ Omnis fruſti pyramidis triangulam baſim habentis centrum grauitatis eſt in axe, primùm ita diuiſo, vt ſegmentum attingens minorem baſim ſit ad reliquum, vt duplum vnius laterum maioris baſis vnà cum latere homologo minoris, ad duplum prædicti lateris minoris baſis, vnà cum latere homologo maioris. Deinde à puncto ſectionis

abſciſſa quarta parte ſegmenti, quod maiorem baſim attingit, & à puncto, in quo ad minorem baſim axis terminatur ſumpta item quarta parte totius axis: in eo puncto, in quo ſegmentum axis duabus poſterioribus ſectionibus finitum ſic diuiditur, vt ſegmentum eius maiori baſi propinquius ſit ad totum prædictum interiectum ſegmentum, vt tertia proportionalis minor ad duo latera homologa baſium oppoſitarum, ad compoſitam ex his tribus deinceps proportionalibus.

XXXVI.

✠ Omnis fruſti pyramidis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt axis fruſti pyramidis triangulam baſim habentis diuidatur ab ipſius centro grauitatis.

XXXVII.

✠ Dodecaëdri, & icoſaëdri idem eſt centrum grauitatis & figuræ.

XXXVIII.

Data qualibet figura, cuius termini omnis cauitas ſit interior, ſi certum in ea punctum talis eius partis centrum grauitatis eſſe poſſit, quæ ab ea deficiat minori ſpatio quantacumque magnitudine propoſitâ: illud erit totius figuræ centrum grauitatis.

XXXIX.

✠ Omnis coni centrum grauitatis axim ita diuidit, vt ſegmentum ad verticem ſit reliqui triplum.

XL.

✠ Omnis fruſti conici centrum grauitatis idem eſt in axe centro granitatis fruſti pyramidis baſim habentis æquilateram, & æquiangulam inſcriptæ cono, abſciſſi eodem plano, quo coni fruſtum.

XLI.

✠ Omnis cylindri centrum grauitatis axim biſariam diuidit.

XLII.

✠ Sphæræ, & ſphæroidis idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

LIBER SECVNDVS.

PROPOSITIONES.

I.

SI duæ magnitudines vnà maiores, vel minores prima, & tertia minori excessu, vel defectu quantacumque magnitudine proposita eiusdem generis cum illa, ad quam refertur, eandem proportionem habuerint, maior vel minor prima ad secundam, & vnà maior vel minor tertia ad quartam: erit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam.

II.

Si maior, vel minor prima ad vnà maiorem, vel minorem secunda, minori vtriusque excessu, vel defectu quantacumque magnitudine proposita fuerit vt tertia ad quartam: erit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam.

III.

Si maior, vel minor prima ad vnà maiorem, vel minorem secunda, minori excessu, vel defectu quantacumque magnitudine proposita, nominatam habuerit proportionem: prima ad secundam eandem nominatam habebit proportionem.

IV.

Si sint tres magnitudines sese æqualiter excedentes, minor erit proportio minimæ ad mediam quàm mediæ ad maximam.

V.

Si sit minor proportio primæ ad secundam, quàm secundæ ad tertiam, ab ipsis autem æquales auferantur: erit minor proportio reliquæ primæ ad reliquam secundæ, quàm reliquæ secundæ ad reliquam tertiæ.

VI.

Si sint tres magnitudines inæquales, & aliæ illis multitudine æquales, binæque in duplicata primarum proportione: sit autem minor proportio primæ ad secundam, quàm secundæ ad tertiam in primis: erit minor portio primæ ad secundā, quàm secundæ ad tertiam in secundis.

VII.

Si sint 8 magnitudines quaternæ proportionales: tertiæ autem vtriusque ordinis inter se sint vt primæ: erit vt composita ex pri-

mis ad compositam ex secundis, ita composita ex tertiis ad compositam ex quartis.

VIII.

Si sint tres magnitudines sese æqualiter excedentes: & aliæ eiusdem generis illis multitudine æquales, binæque sumptæ in duplicata primarum proportione: erit vtriusque ordinis minor proportio compositæ ex primis ad compositam ex secundis, quàm compositæ ex secundis ad compositam ex tertiis.

IX.

Si recta linea vtcumque secta fuerit, cubus qui fit à tota, æqualis est duobus solidis rectangulis, quæ ex partibus, & totius quadrato fiunt.

X.

Si recta linea vtcumque secta fuerit, cubus qui fit à tota, æqualis est cubis partium, & duobus solidis rectangulis, quæ partium triplis, & earundem quadratis reciprocè continentur.

XI.

Si linea recta vtcumque secta fuerit, cubus qui fit à tota, æqualis est cubis partium, vnà cum solido rectangulo, quod totius tripla, & partibus continetur.

XII.

✠ Hemisphærium duplum est coni, cylindri autem subsesquialterum eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentium.

XIII.

✠ Omnis minor sphæræ portio, ad cylindrum, cuius basis æqualis est circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam excessus, quo tripla semidiametri sphæræ excedit tres deinceps proportionales, vt quarum maxima est sphæræ semidiameter, media verò quę inter centra sphærę & basis portionis interiicitur: ad semidiametri sphęrę triplam.

XIV.

✠ Omnis portio sphęræ abscissa duobus planis parallelis altero per centrum acto ad cylindrum, cuius basis est eadem basi portionis, siue circulo maximo, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quam excessus quo maior extrema ad sphęrę semidiametrum, & axim portionis excedit tertiam partem axis portionis: ad maiorem extremam ante dictam.

XV.

✠ Omnis portio sphęrę abscissa duobus planis parallelis neutro per centrum, nec centrum intercipientibus ad cylindrum, cuius basis ęqualis est circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam proportionem habet, quam excessus, quo maior extrema ad triplas semidiametri sphæræ, & eius quæ inter centrum sphæræ, & minoris basis portionis interiicitur, superat tres deinceps proportionales, qua-

rum maxima est quæ inter centra sphæræ, & minoris basis, media autem, quæ inter centra sphæræ, & maioris basis portionis interiicitur, ad maiorem extremam antedictam.

XVI.

✠ Omnis maior sphæræ portio ad cylindrum, cuius basis æqualis est circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam ad axim portionis habet excessus, quo segmentum axis portionis inter sphæræ centrum, & basim portionis interiectum superat tertiam partem minoris extremæ maiori posita prædicto axis segmento in proportione semidiametri sphæræ ad prædictum segmentum, vnà cum subsesquialtera reliqui axis segmenti.

XVII.

Omnis portio sphęræ abscissa duobus planis parallelis centrum intercipientibus ad cylindrum eiusdem altitudinis, cuius basis æqualis est circulo maximo, eam habet proportionem, quam ad axim portionis habet excessus, quo axis portionis superat tertiam partem compositæ ex duabus minoribus extremis, maioribus positis duobus axis segmentis, quæ fiunt à centro sphęræ in rationibus semidiametri sphęræ ad prædicta segmenta.

XVIII.

Omne conoides parabolicum dimidium est cylindri, coni autem sesquialterum eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentium.

XIX.

Omnis prismatis triangulam basim habentis centrum grauitatis rectam lineam, quæ cuiuslibet trium laterum bipartiti sectionem, & oppositi parallelogrammi centrum iungit, ita diuidit, vt pars, quæ attingit latus, sit dupla reliquæ.

XX.

Omnis prismatis basim habentis trapezium, cuius duo latera inter se sint parallela, centrum grauitatis rectam lineam, quæ æquè inter se distantium parallelogrammorum centra iungit, ita diuidit, vt pars, quæ dictorum parallelogrammorum minus attingit, sit ad reliquam, vt duorum basis laterum parallelorum dupla maioris, vnà cum minori ad duplam minoris vnà cum maiori.

XXI.

Si à quolibet prædicto prismate duo prismata bases habentia triangulas sint ita abscissa, vt parallelepipedum relinquant basim habens minus parallelogrammorum inter se parallelorum prædicti prismatis, maioris autem partes æqualia parallelogramma ipsum parallelepipedum relinquat, centrum grauitatis vtriusque abscissi prismatis tanquam

vnius magnitudinis rectam lineam, quæ prædicti prismatis parallelorum parallelogrammorum centra iungit, ita diuidit, vt pars quæ minus parallelogrammum attingit sit dupla reliquæ.

XXII.

✠ Si sint duæ pyramides æquales, & æquè altæ, bases habentes in eodem plano, quarum vertices recta linea connectens cum ea, quæ basium centra grauitatis iungit, sit in eodem plano: earum centrum grauitatis tanquam vnius magnitudinis rectam lineam, quæ inter vertices, & centra basium interiectas bifariam secat, ita diuidit, vt pars superior sit inferioris tripla.

XXIII.

✠ Omnis frusti pyramidis basim habentis parallelogrammum centrum grauitatis maiori basi est propinquius, quàm punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars minorem basim attingens, sit ad reliquam, vt dupla cuiusuis laterum maioris basis vnà cum latere minoris sibi respondente, ad duplam dicti lateris minoris basis vnà cum maioris sibi respondente.

XXIV.

Omnis frusti conici centrum grauitatis propinquius est maiori basi, quàm punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars minorem basim attingens sit ad reliquam, vt dupla diametri maioris basis vnà cum minoris diametro ad duplam diametri minoris basis, vnà cum diametro maioris.

XXV.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ illis multitudine æquales, binæque sumptæ in eadem proportione, quæ commune habeant centrum grauitatis, centra autem grauitatis omnium sint in eadem recta linea: primę & secundę tanquam duę magnitudines commune habebunt centrum grauitatis.

XXVI.

✠ Si sint quotcumque magnitudines, & alię ipsis multitudine ęquales primarum, ex quibus centra grauitatis in eadem recta linea disposita sint alternatim ad centra grauitatis secundarum, quarum magnitudinum binæ eodem ordine, qui sumitur ab eodem prædictæ lineæ termino vna in primis, & altera in secundis inter se sint æquales: omnium primarum simul, ex quibus primæ centrum grauitatis propinquius est prædicto lineę termino, quàm primæ secundarum, propinquius erit prędicto lineæ termino, quàm omnium secundarum simul centrum grauitatis.

XXVII.

XXVII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ illis multitudine æquales, quæ binæ commune habeant in eadem recta centrum grauitatis: ſumpto autem ordine ab vno eius lineæ termino, maior ſit proportio primæ ad ſecundam in primis, quàm primæ ad ſecundam in ſecundis: & ſecundæ ad tertiam in primis maior quàm ſecundæ ad tertiam in ſecundis, & ſic deinceps vſque ad vltimas: erit omnium primarum ſimul centrum grauitatis propinquius prædicto lineæ termnio, à quo ſumitur ordo, quàm omnium ſecundarum.

XXVIII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis multitudine æquales, quarum omnium centra grauitatis ſint in eadem recta linea, & centra primarum ad centra ſecundarum diſpoſita ſint alternatim: ſit autem maior proportio primæ ad ſecundam in primis, quàm primæ ad ſecundam in ſecundis: & ſecundæ ad tertiam in primis, maior quàm ſecundę ad tertiam in ſecundis, & ſic deinceps vſque ad vltimas: erit omnium primarum ſimul centrum grauitatis propinquius prędictæ lineæ termino, à quo ſumitur ordo omnium ſecundarum centrum grauitatis.

XXIX.

Datæ figuræ circa diametrum, vel axim in alteram partem deficienti, ſuper baſim rectam lineam vel circulum, vel ellipſim: cuius figuræ baſis, & ſectiones omnes parallelæ ſegmenta æqualia diametri vel axis intercipientes ita ſe habeant, vt quarumlibet trium proximarum minor proportio ſit minimæ ad mediam, quàm mediæ ad maximam: figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum circumſcribi poteſt, cuius centrum grauitatis ſit propinquius baſi quàm cuiuſlibet datæ figuræ, qualem diximus, quæ prædictæ figuræ circa diametrum, vel axim circumſcripta ſit.

XXX.

Omnis prædictæ figuræ centrum grauitatis eſt propinquius baſi, quàm cuiuſlibet figuræ ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum ipſi circumſcriptæ.

XXXI.

Omni prædictæ figuræ figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum circumſcribi poteſt, cuius centri grauitatis diſtantia à prædictæ figuræ centro grauitatis ſit minor quantacumque longitudine propoſita.

XXXII.

Si duarum prædictarum figurarum circa communem axim, vel dia-

metrum, vel alterius diametrum alterius axim, bases & quotcumque sectiones quales diximus, binæ in eodem plano fuerint proportionales: idem punctum in diametro, vel axe erit vtriusque centrum grauitatis.

Corollarium. Manifestum est autem omnia proximis quatuor propositionibus ostensa de figura circa axim, vel diametrum in alteram partem deficienti, eadem iisdem rationibus ostensa remanere de composito ex duabus figuris circa communem axim vel diametrum in alteram partem deficientibus, tam per se considerato, quàm ad alteram figuram circa eundem axim, vel diametrum cum prædicto composito, in alteram partem deficiens, ac si essent duæ tantummodo dictæ figuræ, quales in præcedenti proxima inter se comparauimus: manente semper illa conditione, quam de sectionibus in 20 huius diximus. Tantùm aduertendum est, vt pro sectionibus, dicamus composita ex binis sectionibus (quæ scilicet fiunt ab eodem plano, vel eadem recta linea) cum de prædicto composito sit sermo: & in demonstratione pro cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis, composita ex binis cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis (quæ scilicet sunt inter eadem plana parallela, vel lineas parallelas, & circa eundem axim, vel diametrum totius vel diametri, vel axis partem) sicut & pro figura compositum ex duabus dictis figuris: pro residuo, compositum ex residuis. Nam cùm vtriusque residui figurarum duobus prædictis figuris vnum quid componentibus, & circa eundem axim, vel diametrum existentibus, qua ratione diximus circumscriptarum, centra grauitatis sint in diametro, vel axe: etiam compositi ex iis duobus residuis (vt in priori libro generaliter demonstrauimus) centrum grauitatis erit in eadem diametro vel axe: vnde vim habent quatuor proximæ antecedentes demonstrationes, exemplum erit in demonstratione trigesimæ quartæ huius.

XXXIII.

✠ Hemisphærij centrum grauitatis est punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars, quæ ad verticem, sit ad reliquam vt 5 ad 3.

XXXIV.

✠ Omnis minoris portionis sphæræ centrum grauitatis est in axe primùm bifariam secto: deinde secundum centrum grauitatis frusti circa eundem axim, abscissi à cono verticem habente centrum sphæræ, in eo puncto, in quo dimidius axis portionis basim attingens sic diuiditur, vt pars duabus prædictis sectionibus intercepta sit ad eam, quæ inter secundam & tertiam sectionem interiicitur, vt excessus, quo tripla semidiametri sphæræ, cuius est prædicta portio, superat tres de-

inceps proportionales, quarum maxima est sphæræ semidiameter, media autem, quæ inter centra sphæræ, & basis portionis interiicitur, ad semidiametri sphæræ triplam.

XXXV.

Omnis portionis sphæræ abscissę duobus planis parallelis, altero per centrum acto, centrum grauitatis est in axe primùm bifariam secto: deinde sumpta ad minorem basim quarta parte axis portionis: & eo puncto, in quo dimidius axis minorem basim attingens sic diuiditur, vt pars duabus prædictis sectionibus intercepta sit ad eam, quæ inter secundam, & vltimam sectionem interiicitur, excessus, quo maior extrema ad sphæræ semidiametrum, & axim portionis superat tertiam partem axis portionis: ad maiorem extremam antedictam.

XXXVI.

✠ Omnis portionis sphæræ abscissæ duobus planis parallelis neutro per centrum acto, nec centrum intercipientibus, centrum grauitatis est in axe primùm bifariam secto: deinde secundum centrum grauitatis frusti circa eundem axim abscissi à cono verticem habente centrum sphæræ: in eo puncto in quo dimidius axis maiorem basim attingens sic diuiditur, vt pars duabus prædictis sectionibus finita sit ad eam, quæ inter secundam & vltimam sectionem interiicitur, vt excessus, quo maior extrema ad triplas, & semidiametri sphæræ, & eius quæ inter centra sphæræ, & minorem basim portionis interiicitur, superat tres deinceps proportionales, quarum maxima est quæ inter centra sphæræ, & maioris basis, media autem, quæ inter centra sphæræ, & maioris basis portionis interiicitur, ad maiorem extremam antedictam. *Videatur lemma.*

XXXVII.

Si datæ maiori sphæræ portioni cylindrus circumscribatur circa eundem axim portionis, centrum grauitatis reliquæ figuræ, ex cylindro circumscripto ablata portione, propinquius erit vertici portionis, quàm centrum grauitatis portionis.

Coroll. Manifestum est autem ex demonstratione theorematis, omnis residui ex cylindro datæ maiori sphæræ portionis circumscripto circa eundem axim portionis, cuius basis sit æqualis circulo maximo, centrum grauitatis esse in axe, abscissâ primùm quarta parte ad verticem portionis terminata segmenti axis portionis, quod centro sphæræ, & vertice portionis, & quarta parte eius, quod centro sphæræ, & basi portionis terminatur: ad basim terminata in eo puncto, in quo segmentum axis portionis duabus prædictis sectionibus finitum sic diuiditur, vt segmentum propinquius basi sit ad reliquum, vt cubus

segmenti axis portionis centro sphæræ, & vertice portionis terminati ad cubum reliqui quod basim portionis tangit, si quidem cubi triplicatam inter se habent laterum proportionem: simul illud manifestum est, hoc idem eadem ratione posse demonstrari de centro grauitatis reliqui ex cylindro dempta sphæræ portione abscissa duobus planis parallelis centrum sphæræ intercipientibus, ita vt axis portionis à centro sphæræ in partes inæquales diuidatur, cuius cylindri circumscripti sit idem axis, qui & portionis, basis autem æqualis circulo maximo. Similiter enim descriptis duobus conis rectangulis verticem habentibus communem centrum sphæræ, bases autem minores basibus oppositis cylindri circumscripti: æqualibus circulo maximo, sumentes pro vertice minorem basim, pro basi, maiorem basim portionis, immotis reliquis propositum demonstramus.

XXXVIII.

✠ Omnis maioris portionis sphæræ centrum grauitatis est in axe primùm bifariam secto: Deinde sumpta ad verticem quarta parte segmenti axis, quod centro sphæræ, & portionis vertice finitur: itemque ad basim quarta parte reliqui segmenti inter centrum sphæræ, & basim portionis interiecti. Deinde segmento axis, inter eas quartas partes interiecto, ita diuiso, vt pars propinquior basi sit ad reliquam vt cubus segmenti axis, quod centro sphæræ, & vertice portionis, ad cubum eius quod centris sphæræ, & basis portionis terminatur in eo puncto, in quo segmentum axis centro sphæræ, & sectione penultima finitum sic diuiditur, vt pars prima, & penultima sectione terminata sit ad totam vltimâ & penultimâ sectione terminatam, vt excessus, quo segmentum axis portionis inter centrum, & basim portionis interiectum superat tertiam partem minoris extremæ maiori posita dicto axis segmento in proportione semidiametri sphæræ ad prædictum segmentum, vnà cum subsesquialtera reliqui segmenti, ad axim portionis.

XXXIX.

✠ Omnis portionis sphæræ abscissæ duobus planis parallelis centrum intercipientibus, & à centro æqualiter distantibus, centrum grauitatis est in medio axis, vel idem, quod centrum sphæræ.

XL.

Omnis portionis sphæræ abscissæ duobus planis parallelis centrum intercipientibus, & à centro non æqualiter distantibus centrum grauitatis est in axe primùm bifariam secto: Deinde sumpta ad minorem basim portionis quarta parte segmenti axis, quod minorem basim attingit: & ad maiorem basin quarta parte reliqui segmenti axis eorum, quæ à centro sphæræ fiunt: Deinde recta inter has quartas partes inter-

iecta ita diuisa, vt pars maiori basi propinquior sit ad reliquam vt cubus segmenti axis inter sphæræ centrum minorem basim, & ad cubum eius, quo inter sphæræ centrum, & maiorem basim portionis interijcitur: in eo puncto in quo segmentum axis centro sphæræ, & penultimâ sectione terminatam, vt ad axim portionis est excessus, quo idem axis portionibus superat tertiam partem compositæ ex duabus minoribus extremis, maioribus positis duobus axis segmentis, quæ fiunt à centro sphæræ in rationibus semidiametri sphæræ ad prædicta segmenta.

XLI.

✠ Omnis conoidis parabolici centrum grauitatis est punctum illud in quo axis sic diuiditur vt pars quæ est ad verticem sit dupla reliquæ.

XLII.

Omnis frusti conoidis parabolici centrum grauitatis axim ita diuidit, vt pars, quæ minorem basim attingit, sit ad reliquam, vt duplum maioris basis vnà cum minori, ad duplum minoris, vnà cum maiori.

XLIII.

✠ Omnis conoidis hyperbolici centrum grauitatis est punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, quæ basim attingit, sic diuiditur, vt pars basi propinquior sit ad reliquam, vt sesquialtera transuersi lateris hyperboles, quæ conoides describit, ad axim conoidis.

Corollarium. Eadem demonstratione constat, si prædicta tria solida ita vt diximus disposita secentur plano basibus parallelo: frustum conoidis hyperbolici, & compositum ex frustis coni, & conoidis parabolici, commune habere in communi axe centrum grauitatis.

XLIV.

Si conus & conoides parabolicum circa eundem axim secentur plano basi parallelo: frusti conici abscissi maiori basi propinquius erit quàm parabolici centrum grauitatis.

XLV.

✠ Omnis frusti conoidis hyperbolici centrum grauitatis est in axe primùm secto secundum centrum grauitatis cuiusuis frusti conici, circa axem conoidis communi vertice abcissi vnà cum frusto conoidis: deinde vt pars minorem basim attingens sit ad reliquam, vt dupla axis conoidis vnà cum axe conoidis: deinde positis 4. rectis lineis binis proportionalibus, potentia primis secundis longitudine, in proportione, quæ est inter axem conoidis, & reliquam dempto axe frusti. ita vt maior primarum sit media proportionalis inter axem conoidis, & transuersum latus hyperboles, quæ figuram describit, minoris autem potentia sesquialtera minor secundarum: in eo puncto, in quo segmentum axis frusti dictis duabus sectionibus terminatum sic diuiditur, vt pars

minori basi propinquior sit ad reliquam vt cubus, qui fit ab axe frusti vnà cum solido rectangulo quod axe conoidis & reliqua dempto axe frusti, & tripla axis conoidis continetur, ad solidum rectangulum ex eadem reliqua parte conoidis, & eo, quo plus potest quadrato maior quàm minor dictarum secundarum.

Coroll. Ex omnibus demonstrationibus eorum, quæ in hoc 2 libro proposuimus, manifestum est omnium supradictorum corporum centra grauitatis inuenire: quæcumque enim in modum theorematis proposuimus, eadem tanquam problemata proponi, & iisdem demonstrationibus absolui possunt.

LIBRI TERTII

PROPOSITIONES.

I.

SI recta linea secta fuerit bifariam, & non bifariam; rectangulum partibus inæqualibus contentum æquale est rectangulo, quod bis fit ex dimidiæ sectæ segmentis, vnà cum quadrato non intermedij eorumdem segmentorum.

II.

Si circulum vel ellipsim duæ rectæ lineæ tangentes in terminis coniugatarum diametrorum, conueniant: & punctum in quo conueniunt, & centrum figuræ iungantur recta linea: quæcumque hanc vnà cum prædictæ figuræ termino alterutri diametrorum parallela secuerit recta linea, ita ipsa secabitur; vt rectangulum bis contentum segmentis, quorum alterum inter diametrum, & terminum figuræ, alterum inter figuræ terminum & contingentem interiicitur, vnà cum huius quadrato sit æquale quadrato reliqui segmenti inter diametrum, & eam quæ tangentium concursum, & centrum figuræ iungit interiecta.

III.

✠ Per data duo puncta in duabus rectis lineis datum angulum continentibus, in earum plano parabola transibit cuius vertex sit assignatum prædictorum punctorum, in qua altera linea parabolam contingat, altera in altero secet, diametro æquidistans.

IV.

✠ Si recta linea parabolam contingat, omnes rectæ lineæ ex sectione ad contingentem applicatæ diametro sectionis parallelæ inter se sunt

longitudine, vt inter applicatas & contactum, vel verticem interiectæ inter se potentia: Productis autem dictis applicatis, erunt inter sectionem & basim interiectæ inter se longitudine, vt in circulo, vel ellipsi ad diametrum ordinatim applicatæ, secantesque illam in easdem rationes, in quas aliæ prædictæ applicatæ secant basim parabolæ, inter se potentia.

V.

Omnis figuræ circa axim in alteram partem deficientis, cuius superficies excepta base sit tota interius concaua basim habentis circulum, vel ellipsim: quælibet tres sectiones basi parallelæ æqualia axis segmenta intercipientes, ita se habent, vt minor sit proportio minimæ ad mediam, quàm mediæ ad maximam.

VI.

Si sphæroides secetur plano vtcumque præterquàm ad axem, circa quem sphæroides describitur erecto, nam tunc circulus fit, sectio ellipsis erit: similis autem ipsi alia quæcumque sectio sphæroidis eidem parallela: earumque omnes diametri quæ eiusdem sunt rationis erunt in eodem plano per axem. *Vide Archimedem l. de sphæroid. & conoid.*

VII.

Si conoides parabolicum, vel hyperbolicum secetur plano vtcumque ad axim inclinato, sectio ellipsis erit: similis autem ipsi alia quęcumque sectio conoidis eidem parallela: eruntque earum omnes diametri, quæ eiusdem sunt rationis in eodem plano per axem.

VIII.

Super datam ellipsim, circa datam rectam lineam ab eius centro eleuatam tanquam axem, coni, & cylindri portionem inuenire. Datoque sphæroidi, & conoidi, vel conoidis, sphæroidisque portioni circa datum axem sphæroidis, vel cuiuslibet dictarum portionum, cylindrus, vel cylindri portio circumscripta esse potest: vel comprehendere inter eadem plana parallela, ita vt eius basis sit similis basi, vel basibus comprehensæ portionis, uel frusti, si de conoidibus sit sermo: & diametri, quæ eiusdem sunt rationis sectæ à centro bifariam sint in eadem recta linea.

IX.

Omnis frusti pyramidis triangulam basim habentis ad prisma, cuius basis est maior basis frusti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quàm rectangulum contentum duobus lateribus homologis basium oppositarũ, vnà cum tertia parte quadrati differentiæ dictorum laterum, ad maioris lateris quadratum. Ad pyramidem autem, cuius basis est maior basis frusti, & eadem altitudo, vt prædictum rectangulum, vnà

cum prædicti quadrati tertia parte, ad tertiam partem quadrati maioris lateris.

Coroll. Hinc manifestum est eadem demonstratione, qua vtimur ad prop. 36. lib. 1. frustum cuiuslibet pyramidis basim habentis pluribus, quàm tribus lateribus contentam, ad prisma, seu pyramidem, cuius basis est eadem quæ maior basis frusti, & eadem altitudo: & reliquum ipsius prismatis dempto frusto, ad ipsum prisma, eas habere rationes, quæ à basium frusti oppositarum homologis lateribus, eorumque differentia deriuantur eo modo, quo in præcedenti theoremate dicebamus.

X.

✠ Omne frustum coni, vel portionis conicæ, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius basis est eadem, quæ maior basis frusti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quam rectangulum contentum basium diametris eiusdem rationis, vnà cum tertia parte quadrati differentiæ earumdem diametrorum ad maioris basis quadratum. Ad conum autem, vel coni portionem, cuius basis est eadem, quæ maior basis frusti, & eadem altitudo: vt prædictum rectangulum, vnà cum prædicti quadrati tertia parte, ad tertiam partem quadrati ex diametro maioris basis. Prædicti autem cylindri, vel portionis cylindricæ residuum dempto frusto, ad totum cylindrum, vel cylindri portionem: vt rectangulum contentum diametro minoris basis frusti, & differentia diametri maioris, vnà cum duabus tertiis quadrati differentiæ ad quadratum diametri maioris basis.

XI.

Si sphæra, vel sphæroides secetur duobus planis parallelis vtcunque, neutro per centrum ducto; quædam autem ex centro recta linea transeat per centrum alterutrius sectionum: per centrum reliquæ transibit.

Corollar. Hinc manifestum est, si sphæra, vel sphæroides secetur plano non per centrum: & recta linea sphæræ, vel sphæroidis, & factæ sectionis centra iungens ad superficiem vtrinque producatur: talis axis segmenta esse axes portionum, earumque vertices extrema dicti axis.

XII.

Si hemisphærium, vel hemisphæroides vtcunque abscissum: & cylindrus, vel cylindri portio illi circumscripta: & conus, vel coni portio, cuius basis est eadem solido circumscripto, hemisphærium, vel hemisphæroides ad verticem contingens, & communis axis: secentur vno plano, basi hemisphærii, vel hemisphæroidis parallelo: super sectiones autem prædicti coni, vel portionis conicæ, & hemisphærij, vel hemisphæroidis, circa huius abscissæ portionis axem duo cylin-

dri,

dri, vel portiones cylindricæ constiterint, reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ prædicto plano abcissæ, dempto eo cylindro duorum prædictorum, vel portione cylindrica, cuius basis est sectio hemisphærij, vel hemisphęroidis, æquale erit reliquo cylindro, vel portioni cylindricæ, cuius basis est sectio prædicti coni, vel portionis conicæ.

XIII.

✠ Cylindri, vel portionis cylindridricæ hemisphęrio, vel hemisphæroidi circumscriptæ reliquum dempto hemisphærio, vel hemisphæroide, æquale est cono, vel portioni conicæ eandem basim hemisphærio, vel hemisphæroidi, & eandem altitudinem habenti.

XIV.

Si hemisphærium, vel hemisphæroides, & cylindrus, vel portio cylindrica ipsi circumscripta, & conus, vel coni portio, cuius idem est axis portioni, basis autem quæ opponitur communi basi duorum prædictorum solidorum, vnà secentur duobus planis basi parallelis: portiones reliquæ figuræ ex cylindro, vel cylindri portione hemisphærio, vel hemisphæroidi circumscripta dempto hemisphærio, vel hemisphæroide, quæ à duobus prædictis planis secantibus fiunt, æquales sunt singulæ singulis prædicti coni vel conicæ portionis partibus siue frustis inter eadem plana parallela respondentibus.

XV.

✠ Hemisphærium, vel hemisphæroides subsesquialterum est cylindri, vel portionis cylindricæ ipsi circumscriptæ.

XVI.

✠ Omnis minor portio sphæræ, vel sphæroidis ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius basis æqualis est circulo maximo, vel æqualis & similis ellipsi per centrum basi portionis parallelæ, & eadẽ altitudo portioni eam habet proportionem, quam rectangulum contentum sphæræ, vel sphæroidis dimidij axis axi portionis congruentis ijs, quæ à centro basis portionis fiunt segmentis, vnà cum duobus tertijs quadrati axis portionis: ad sphæræ vel sphæroidis dimidij axis quadratum.

XVII.

Omnis portio sphæræ, vel sphæroidis abscissa duobus planis parallelis, altero per centrum ducto ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius basis est eadem, quæ maior basis portionis, & eadem altitudo: eam habet proportionem, quam rectangulum contentum ijs, quæ à centro minoris basis fiunt axis sphæræ, vel sphæroidis segmentis vnà cum duabus tertijs quadrati axis portionis: ad sphęræ, vel sphęroidis dimidij quadratum.

XVIII.

Omnis portio sphæræ, vel sphæroidis abscissa duobus planis parallelis, neutro per centrum ducto, nec centrum intercipientibus, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius basis æqualis est circulo maximo, vel ellipsi per centrum basibus portionis parallelæ similis, & æqualis, eam habet proportionem, quam duo rectangula: & quod sphæræ vel sphæroidis axis axi portionis congruentis ijs, quæ à centro minoris basis portionis fiunt segmentis, & quod ea, quæ maioris basis portionis, & sphæræ, vel sphæroidis centra iungit, & axe portionis continetur, vnà cum duabus tertijs quadrati axi portionis: ad sphæræ, vel sphæroidis dimidii axis quadratum.

XIX.

Omnis maior portio sphæræ, vel sphæroidis, ad cylindrum, vel portionem cylindricam, cuius basis æqualis est circulo maximo, vel æqualis, & similis ellipsi per centrum portionis parallelæ, altitudo autem eadem portioni, eam habet portionem, quam solidum rectangulum contentum axe portionis, & reliquo axis sphæræ, vel sphæroidis segmento, & eo, quod basis portionis, & sphæræ, vel sphæroidis centra iungit, vnà cum binis tertiis partibus duorum cuborum: & eius qui à sphæræ, vel sphæroidis axis dimidio, & eius qui ab eo, quod sphæræ, vel sphæroidis, & basis portionis centra iungit fit segmento: ad solidum rectangulum, quod axe portionis, & duobus sphæræ, vel spæroidis axis fit dimidiis.

XX.

✠ Omnis portio sphæræ, vel sphæroidis abscissa duobus planis parallelis centrum intercipientibus, ad cylindrum vel cylindri portionem, cuius basis æqualis est circulo maximo, vel similis, & æqualis ellipsi per centrum basibus portionis parallelæ, & eadem altitudo portioni, eam habet proportionem, quam duo solida rectangula externorum sphæræ, vel sphæroidis axis segmentorum eundem terminum habentium alterutrius basium portionis centrum, binis sphæræ, vel sphæroidis axem complentibus, & singulis axis portionis itidem à centro sphæræ vel sphæroidis factis, vnà cum binis tertiis partibus duorum cuborum ex segmentis axis portionis à centro sphæræ, vel sphæroidis factis: ad solidum rectangulum, quod duobus sphæræ, vel sphæroidis axis dimidijs & axe portionis continetur.

XXI.

Omnis trianguli comprehensi sectione parabola, & duabus rectis lineis, quarum altera sectionem tangat, altera in eam incidat diametro sectionis ex contactu æquidistans, centrum grauitatis est punctum

illud, in quo recta linea ex contactu diuidens incidentem ita vt pars, quæ sectionem attingit, sit sesquialtera reliquæ, sic diuiditur, vt pars quæ est ad contactum sit tripla reliquæ.

XXII.

Si duo triangula mixta prædicti generis verticem communem habeant, qui est contactus, & bases æquales in eadem recta linea, vel continuas, vel segmento interiecto, tota extra figuram versa cauitate: centrum grauitatis compositi ex vtroque est punctum illud, in quo recta linea à vertice ad bipartitæ rectæ prædictis sectionibus interceptæ, in qua sunt bases dictorum triangulorum sectionis punctum pertinens sic diuiditur, vt pars, quæ est ad verticem sit tripla reliquæ.

XXIII.

Si duæ parabolæ in eodem plano circa æquales diametros in directum inter se constitutas, ita vt vertices sint extrema ex diametris compositæ, communem habuerint aliquam ordinatim ad diametrum applicatarum, & vertices cum puncto conuenientiæ iungantur rectis lineis: centrum grauitatis vtriusque portionis iis rectis lineis abscissæ, rectam lineam quæ terminum communem diametrorum, & concursum parabolarum iungit, bifariam diuidit.

XX.V.

Omnis figuræ circa axim in alteram partem deficientis, cuius basis est circulus, vel ellipsis, siue bases sint circuli, vel ellipses, reliqua autem superficies tota interius concaua, centrum grauitatis est in dimidio axis segmento, quod basim, vel maiorem basim attingit.

XXV.

Omnis frusti, coni, vel portionis conicæ centrum grauitatis est punctum illud, in quo eius axis sic diuiditur, vt pars quæ minorem basim attingit assumens quartam partem axis ablati coni, vel portionis conicæ, sit ad eam, quæ inter postremam sectionem & quartæ partis abscissæ ad basim totius coni terminum interijcitur, vt cubus qui fit ab axe totius, ad cubum qui fit ab axe ablati coni.

XXVI.

✠ Residui solidi ex cylindro, vel portione cylindrica hemisphærio, vel hemisphæroide circumscripta, centrum grauitatis est punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars basim attingens hemisphærij, vel hemisphæroidis sit tripla reliquæ.

XXVII.

Si hemisphærium, vel hemisphæroides vnà cum cylindro, vel cylin-

cylindri portione ipsi circumscripta secetur plano basi parallelo: reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica abscissa ad partes verticis, dempta illa quæ abscissa est simul minori, & sphæræ, vel sphæroidis portione, centrum grauitatis est punctum illud in quo eius axis sic diuiditur, vt quæ inter hanc postremam sectionem, & centrum basis vnà abscissæ portionis interiicitur, assumens quartam partem segmenti, quod dictæ basis, & sphæræ, vel sphæroidis centra iungit, sit ad sui segmentum, quod inter postremam sectionem, & quartæ partis axis hemisphærij, vel hemisphæroidis ad verticem abscissæ terminum interiicitur, vt cubus axis hemisphærij, vel hemisphæroidis ad cubum eius, quæ basis portionis & hemisphærij, vel hemisphæroidis centra iungit. Reliqui autem ex cylindro, vel portione cylindrica vnà abscissa cum reliquo hemisphærij, vel hemisphæroidis portione, quæ est ad basim, dempta hac portione centrum grauitatis est punctum illud, quod quartam partem abscindit axis portionis ad eius minorem basim terminatam.

XXVIII.

Iisdem positis solitis, vt in antecedenti, sectisque per duo quælibet puncta axis duplici plano basi parallelo, reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica dictis duobus planis intercepta, dempta sphæræ, vel sphæroidis portione ipsi inter eadem plana respondente, centrum grauitatis est punctum illud, in quo eius axis sic diuiditur, vt quæ inter hanc postremam sectionem, & centrum maioris basis vnà abscissæ portionis interijcitur, assumens quartam partem segmenti, quod prædictæ basis, & sphæræ, vel sphęroidis centra iungit, sit ad sui segmentum, quod inter postremam sectionem, & quartę partis eius, quę sphæræ vel hemisphærij, & minoris basis portionis centra iungit ad minorem basim abscissæ terminum interijcitur, vt cubus eius, quę minoris basis, & sphærę, vel sphęroidis, ad cubum eius, quę sphæræ, vel sphæroidis, & maioris basis portionis centra iungit.

XXIX.

Si sphæra, vel sphæroides vnà cum cylindro, vel portione cylindrica ipsi circumscripta secetur plano, haud per centrum, basibus solidi circumscripti parallelo: reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica ad maioris portionis sphæræ, vel sphæroidis partes abscissa, dempta sphæræ vel sphæroidis maiori portione, centrum grauitatis est punctum illud, in quo dicti reliqui solidi axis segmentum inter duas quartas partes extremas segmentorum eiusdem axis, quæ à centro sphæræ, vel sphæroidis fiunt interiectum, sic diuiditur, vt pars propinquior basi sit ad reliquam, vt prædictorum, quæ à centro fiunt axis segmentorum

maioris cubus ad cubum minoris.

XXX.

Si ſphæra vel ſphæroides vnà cum cylindro, vel portione cylindrica ipſi circumſcripta, ſecetur duobus planis baſi ſolidi circumſcripti parallelis, centrum intercipientibus, & ab eo non æqualiter diſtantibus: reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica dictis planis intercepta, dempta portione ſphæræ, vel ſphæroidis ipſi reſpondente, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo prædicti reliqui ſolidi axis ſegmentum inter quartas partes extremas eiuſdem axis ſegmentorum quæ à centro ſphæræ, vel ſphæroidis fiunt interiectum ſic diuiditur, vt pars maiori baſi propinquior ſit ad reliquam, vt prædictorum axis ſegmentorum cubus maioris ad cubum minoris.

XXXI.

✠ Hemiſphærij, vel hemiſphæroidis centrum grauitatis, eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars ad verticem ſit ad reliquam, vt 5 ad 3.

XXXII.

Omnis minoris portionis ſphæræ, vel ſphæroidis centrum grauitatis eſt in axe primùm biſariam ſecto; Deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui ſolidi, dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione ex cylindro, vel portione cylindrica, ſphæræ, vel ſphęroidis circa axim axi portionis congruentem circumſcripta: in eo puncto, in quo dimidius axis portionis baſim attingens ſic diuiditur, vt pars prima, & ſecunda ſectione terminata, ſit ad totam ſecunda, & poſtrema ſectione terminatam, vt rectangulum contentum axe portionis, & reliquo ſphæræ, vel ſphęroidis dimidij axis axi portionis congruentis quadratum.

XXXIII.

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphęroidis abſciſſæ duobus planis parallelis, altero per centrum acto, centrum grauitatis eſt in axe primùm biſariam ſecto: deinde ſumpta eius quarta parte ad minorem baſim: in eo puncto, in quo dimidius axis ad maiorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars axis prima, & ſecunda ſectione terminata, ſit ad eam, quæ prima, & poſtrema ſectione terminatur, vt rectangulum contentum, ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portionis congruentis ijs ſegmentis, quæ fiunt à centro minoris baſis portionis, vnà cum duabus tertijs quadrati axis portionis: ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

XXXIV.

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſæ duobus planis pa-

rallelis, neutro per centrum acto, nec centrum intercipientibus, centrum grauitatis est in axe primùm bifariam secto: deinde secundùm centrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica, abscisso, vel abscissa vnà cum portione à cylindro, vel cylindrica portione sphæræ, vel sphæroidi circa eius axem axi portionis congruentem circumscripta: in eo puncto, in quo dimidius axis portionis maiorem basim attingens, sic diuiditur, vt pars prima & secunda sectione terminata sit ad eam, quæ prima & postrema sectione terminatur, vt duo rectangula, alterum contentum duobus sphæræ, vel sphæroidis axis axi portionis congruentis ijs segmentis, quæ fiunt à centro minoris basis portionis: alterum axe portionis, & segmento, quod sphæræ, vel sphæroidis, & maioris basis portionis centra iungit, vnà cum duabus tertijs quadrati axis portionis, ad sphæræ vel sphæroidis dimidij axis quadratum.

XXXV.

Omnis maioris portionis sphæræ, vel sphæroidis centrum grauitatis est in axe, & primùm bifariam secto: deinde secundùm centrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica, abscisso, vel abscissa vnà cum portione à cylindro, vel portione cylindrica sphæræ, vel sphæroidi circa eius axim axi portionis congruentem circumscripta: in eo puncto, in quo axis portionis sic diuiditur, vt pars prima, & secunda sectione terminata sit ad eam, quæ prima, & postrema sectione terminatur, vt solidum rectangulum ex axe portionis, & reliquo segmento axis sphæræ, vel sphæroidis axi portionis congruentis, & eo, quod sphæræ, vel sphæroidis, & basis portionis centra iungit, vnà cum binis tertijs duorum cuborum: & eius, qui à sphæræ, vel sphæroidis axis fit dimidio, & eius, qui ab ea, quæ sphæræ, vel sphæroidis, & basis portionis centra iungit; ad solidum rectangulum, quod duobus sphæræ, vel sphæroidis prædicti axis dimidijs, & axe portionis continetur.

XXXVI.

Omnis portionis sphæræ, vel sphæroidis abscissæ duabus planis parallelis centrum intercipientibus, & ab eo non æqualiter distantibus, centrum grauitatis est in axe, primùm bifariam secto: deinde secundùm centrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica, abscisso, vel abscissa, vnà cum portione, à cylindro, vel portione cylindrica sphæræ, vel sphæroidis, circa eius axim axi portionis congruentem circumscripta in eo puncto, in quo maius segmentum axis portionis eorum, quæ à centro fiunt, sic diuiditur, vt pars prima, & secunda sectione terminata sit ad eam, quæ prima,

& postrema sectione terminatur, vt duo solida rectangula, & quod fit ex duobus sphæræ, vel sphæroidis axis axi portionis congruentis ijs segmentis, quæ fiunt à centro maioris basis portionis, & ea quæ maioris basis, & sphæræ, vel sphæroidis centra iungit: & quod ex sphæræ, vel sphæroidis eiusdem axis segmentis à centro minoris basis factis, & ea quæ minoris basis, & sphæræ, vel sphæroidis centra iungit, vnà cum binis tertijs partibus duorum cuborum ex ijs segmentis axis portionis, quæ à centro sphęræ, vel sphæroidis fiunt ad solidum rectangulum quod duobus sphęræ, vel sphæroidis prædicti axis dimidijs, & axe portionis continetur.

XXXVII.

Omnis portionis conoidis parabolici centrum grauitatis est punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars quæ ad verticem sit eius, quæ ab basim dupla.

XXXVIII.

Omnis frusti portionis conoidis parabolici centrum grauitatis est punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars minorem basim attingens sit ad reliquam, vt duplum maioris basis vnà cum minori, ad duplum minoris, vnà cum maiori.

XXXIX.

Omnis conoidis hyperbolici, vel portionis hyperbolici conoidis centrum grauitatis est punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, quæ basim attingit, sic diuiditur, vt pars propinquior basi sit ad reliquam vt sesquialtera transuersi lateris, hyperboles per axem, ad axem conoidis.

Appendicis Propositiones.

I.

SI sint octo magnitudines quaternæ totæ, & ablatæ proportionales, fuerint autem, & primarum vtriusque ordinis ablatæ ad reliquas proportionales: erunt vtriusque ordinis reliquæ proportionales.

II.

Si circa datæ hyperboles communem diametrum parabola descripta illius basim ita diuidat, vt quadratum dimidiæ basis hyperbola ad reliquum quadrati dimidiæ basis hyperboles eam habeat proportionem, quam transuersum latus ad diametrum hyperboles: omnes in

hyperbole ad diametrum ordinatim applicatas ita secabit, vt excessus, quibus quadrata in hyperbola applicatarum superant quadrata in parabola ex sectione applicatarum, inter se sint vt quadrata diametri partium inter applicatas, & verticem interiectarum.

III.

Omne conoides hyperbolicum diuiditur in conoides parabolicum circa eumdem axim, & reliquam figuram quandam, ad quam conoides parabolicum eam habet proportionem, quam sesquialtera transuersi lateris hyperboles, quæ conoides describit, ad axem conoidis.

Corollarium. Vnde manifestum est, iisdem positis cylindros deficientes, ex quibus constat excessus, quo figura conoidi hyperbolico circumscripta superat circumscriptam conoidi parabolico, ita se habere, vt quorumlibet trium inter se proximorum, minor proportio sit minimi ad medium, quàm medij ad maximnm: æquales enim sunt singuli singulis cylindris, ex quibus constat figura cono circumscripta, qui sunt inter eadem plana parallela. Quod si ita est, simul illud manifestum erit, & ex hoc, & ex iis, quæ 2. libro demonstrata sunt; prædictum excessum ex tot cylindris deficientibus eiusdem altitudinis, quos diximus componi posse, vt ipsius centrum grauitatis in axe distet à centro grauitatis coni, hoc est à puncto, in quo sic axis diuiditur, vt pars, quæ ad verticem sit reliquæ tripla, eâ distantiâ, quæ minor sit quantacumque longitudine proposita.

IV.

Si conoidi parabolico figura circumscribatur, & altera inscribatur ex cylindris æqualium altitudinum, binis circa communes axes segmenta axis conodis, & inter eadem plana parallela, minimo circumscriptorum ad nullum relato, omnia residua cylindrorum figuræ circumscriptæ, demptis inscriptæ figuræ cylindris, & inter se, & minimo cylindro æqualia erunt.

V.

Dato conoide hyperbolico, & ipsius conoide parabolico circa eundem axim, quod ad reliquum hyperbolici conoidis eam proportionem habeat quam sesquialtera transuersi lateris hyperboles, quæ conoides describit, ad axim conoidis: fieri potest vt conoidi parabolico figura quædam inscribatur, & altera circumscribatur, vt supra factum est, & hyperbolico alia circumscribatur, omnes ex cylindris æqualium altitudinum multitudine æqualibus existentibus iis, ex quibus constant figuræ conoidibus circumscriptæ, ita vt excessus, quo figura conoidi parabolico circumscripta inscriptam superat, quem breuitatis causa voco excessum primum, ad excessum, quo figura co-
noidi

noidi hyperbolico circumſcripta ſuperat circumſcriptam parabolico, quem voco exceſſum ſecundum, minorem habeat proportionem qua-cumque propoſita.

VI.

Omnis reſidui conoidis hyperbolici dempto conoide parabolico, vt ſupra diximus, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars propinquior vertici ſit tripla reliquæ.

VII.

Omnis conoidis hyperbolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis quarta ab ea quæ baſim attingit, ſic diuiditur, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam, vt ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit, ad axem conoidis.

QVARTA PARS.

DE LINEA DIRECTIONIS, & reliquis ad centrum grauitatis pertinentibus.

LInea directionis illa dicitur, quæ motus grauium dirigit; quæque ducta intelligitur à mundi centro ad verticem grauis; hinc fit vt horizontis axis dici poſſit, cùm horizon deſcribatur à vertice, tanquam à polo. Poſſumus autem ſupponere cum Villalpando, & aliis, omnes lineas directionis parallelarum inſtar reſpectu noſtri habendas eſſe; quemadmodum Architecti ſupponunt muros ad perpendiculum erectos, & Catoptrici radios ſolis in ſpeculum incidentes parallelos eſſe, quamuis id non ſit verum iuxta præciſionem Geometricam, quia ſenſus experientiâ deprehendere nequit, quantò magis duæ lineæ directionis inter ſe diſtent in vertice grauis, quàm prope terram. Iam verò ſatis fuerit ſi Villalpandi propoſitiones, & quaſdam alias cùm ad hanc lineam, tum ad centrum grauitatis pertinentes afferamus.

PROPOSITIONES.

I.

AD motum hominis progreſſiuum, & cuiuſcumque alterius grauis motum, directionis lineam moueri neceſſe eſt: vnde & Zenith, ac

horizon necessarò mutantur: cùm ex diuersis ad eandem sphæræ partem polis diuersos circulos maximos describi necesse sit.

II.

Cuiuscumque solidi centrum grauitatis loco suo in figura dimoueri potest, cùm aliquid additur, vel minuitur; vel cùm partes alia ratione disponuntur.

III.

In sphæra ex æqualiter ponderantibus conflata idem est centrum grauitatis, & magnitudinis: si verò ex dissimilibus constet, & idem potest esse, & longè diuersum.

IV.

Omnia grauia non impedita ita descendunt, vt centrum grauitatis non discedat à linea directionis.

V.

Omne corpus puncto insistens tunc stabit, cùm linea directonis per punctum, cui innititur transiens, per centrum quoque grauitatis eiusdem transierit: cadet autem si transierit extra centrum grauitatis: ni tamen impetus graui impressus casum impedierit, vt constat in funambulis, & ioculatoribus corpus in omnem partem versantibus. Huc reuocari possunt ingentia pondera, quæ acus acumine sustinentur.

VI.

Perfectè sphæricum si graue sit, & perfecto plano insistat, nec impediatur, semper mouebitur, donec ad plani punctum perueniat, in quo tantùm quiescere potest.

VII.

Grauia quæ quantitati insistunt, tunc stabunt, cum directionis linea per medium quantitatis, cui insistit graue, ducta, per centrum grauitatis transibit: vel cùm ducta linea directionis per dictæ quantitatis extremum transierit per centrum grauitatis, vel saltem dimiserit illud ex parte quantitatis, cui insistit graue: quod si ex altera parte dimittet illud graue, dubio procul cadet. Hinc fit vt lancea, vel sarissa, vel baculus, vel quæpiam alia, quæ infrà fulcimentum habent, erecta stare nequeant, quia grauitatis centrum ita perfectè sisti nequit, vt in neutram partem à perpendiculari declinet: extremo tamen digiti baculum sustinemus, quia in ipso motu digitum assiduè centro grauitatis baculi supponimus.

VIII.

Si homo pedibus ita insistat, vt linea directionis per extremum pedis, cui innititur, transiens, transeat etiam per centrum grauitatis, si brachium extendat ex ea parte qua pendet, dubio procul cadet; bra-

chium enim extensum maioris vectis, vel æquipondij rationem habet, quod plus grauitat quo magis à trutina remouetur.

IX.

Nullus homo poterit se inclinare, aut in anteriorem, aut in posteriorem partem, aut ad latera, quin linea directionis transiens per extremam partem quantitatis, cui innititur ex ea parte, in quam se inclinat, transeat etiam per centrum grauitatis corporis, aut hoc immineat quantitati, cui innititur: nam si extra illam maneat, cadet.

X.

Quotiescumque homo sedet, vt se erigat, necessarium est vt pedes sedi quàm maximè habeat propinquos, caputque in anteriora educat.

XI.

Nullus homo, qui totus extensus supinus iaceat, se eriget ita vt erat extensus, quin cadat: sed necessarium est ei, vt corpus complicet, & superiorem partem corporis prius erigat, ac pedes corpori submittat, & sic se eriget. Quod si iaceat pronus, manibus primùm innitetur simul ac pedibus, mox genua in anteriorem partem complicabit, atque ita se eriget.

XII.

Quadrupedia tunc stabunt, cùm linea directionis per extremum superficiei, quam inter extremos pedum terminos operiunt, transiens pertransierit, etiam per centrum grauitatis eorum, vel dimiserit illud ex parte superficiei, cui insistunt: ideoque cùm progrediuntur, si vtrumque dextrum pedem simul erigunt, cadent, nisi linea directionis transiens per extremum reliquorum, transierit per centrum grauitatis, aut reliquerit illud ex parte pedum. At cùm sua corpora posterioribus tantummodo pedibus innixa erigunt: & poplites & magnam corporis partem à pedibus in posteriora retrahant necesse est, vt centrum grauitatis ad lineam directionis pedibus superimponant. Hinc constat cur equitantes variis equi motibus concutiamur, nempe vt sua pondera libret equus, & linea directionis per centrum grauitatis continuò circumferatur.

XIII.

Auium, cùm pedibus insistunt, eadẽ quæ de bipedibus ratio habenda est. Quod si volent, quoniam alis suspenduntur, necessarium est vt linea directionis per alarum medium transiens, transeat etiam per grauitatis centrum. Hinc cùm supra volatum dirigunt, in anteriores partes: cùm infra in posteriores partes, alas extendunt.

XIV.

Arbores, plantæ & herbæ, nisi impediantur, ad angulos rectos se erigunt, non quidem pauimenti, cui insistunt, sed horizonti, nempè secundùm directionis lineã, per trunci ima ad centrũ grauitatis deductã.

XV.

Centrum grauitatis cuiuscumq; corporis nunquam ascēdit naturaliter, sed tātùm violenter; alioqui media, vel plusquam media pars grauitatis ascenderet, quod fieri nequit; nec enim vnquam vna pars ascendit nisi descendens præualeat; sicut nec in bilance vna pars aliam attollere potest, nisi grauior fuerit. Huius theorematis veritas clara est in circumuolutione globi descendentis, cuius aliquæ partes ascendunt, dum centrum grauitatis semper descendit: & in ensibus, vel cultris, aut aliis instrumentis baculo obliquè infixis, quæ pendula stant, quia totum pondus simul cadere nequit, cùm ex vna parte sustineatur, neque pars grauior, aut æquè grauis ascendere potest. Huc etiam refertur situla aquâ, vel alio liquore plena, quæ stat sine casu, si ansa baculo sustineatur, cuius extremitas ex alia parte sustineatur, dummodo alter baculus inter fundum & oppositam baculi partem statuatur, alioqui enim centrum grauitatis ascenderet, si caderet situla, aut vas aliud.

XVI.

Si Deus tolleret hemisphærium terræ quod nostrum horizontem Astronomicum definit, vnicus homo posset habitare in recta planicie, quæ subdupla esset superficiei hemisphærij ablati: reliqui caderent, ruerentque versus centrum: si tamen vniuersi centrum per hanc sectionem nusquam immutatum iri supponamus. Hinc cōcluditur nos non posse ambulare super terram, si recta foret illius superficies, alioqui centrum grauitatis naturaliter ascenderet: omnes igitur ad idem punctum superficiei ruerent, à quo breuissima ad centrum terræ, vel vniuersi linea duceretur: nisi tamen ita inclinarentur, ac talem situm haberent, vt linea directionis per centrum grauitatis transiret; quod notant in turri Bononiæ Garisenda: quæ stat immota, licet à 500. annis admodum inclinetur.

XVII.

Si aër est æqualis vbique resistentiæ, semper corpus æquiponderabit siue à centro suæ grauitatis, siue à punctis superioribus, vel inferioribus lineæ directionis suspendatur, cùm eadem sit facilitas trahendi, & mouendi celeritas, atque resistentia in quopiam ex illis tribus punctis: at verò corpus in supremo, vel infimo tantùm loco quiescere potest, dum à punctis superioribus, vel inferioribus detinetur.

XVIII.

Quæ à superioribus lineæ directionis punctis detinentur, ad pristinum statum redeunt, cùm ex eo educuntur; cùm autem ab inferioribus, recedunt à pristino statu, si ex eo extrahuntur: at verò cùm à centro grauitatis, vbicumque posita manent, quia linea directionis diui-

dit corpus per punctum retentionis in duas partes æquè grauitantes; quod in aliis casibus diuidit in partes inæquales, dum corpus suspensum extra statum quietis positum fuerit. Hinc fit, vt libræ in quocumque statu, seu situ maneant, cùm punctum retentionis habent in centro grauitatis; ad æquilibrium redeant, quando punctum retentionis est superius; vel integrum circulum absoluant, quando est inferius.

XIX.

Corpus liberè pendere dicitur à puncto retentionis, quando in omnem partem ita circumuolui potest, vt omnia illius puncta à prædicto puncto remota circa illud circulum describant; quod quidem semper in linea directionis reperitur. At verò si corpus à duobus punctis liberè pendeat, concursus linearum illis punctis affixarum, erit semper in linea directionis.

XX.

Si mathematicè loquamur, nullum est corpus in rerum natura, præter globum, quod ex suæ grauitatis centro cogitatione, vel reapse suspensum quemlibet datum situm retineat, vel quod per planum in partes situ æquipondias diuidatur; nec grauius pondus eam rationem habet ad leuius, quam habet longior radius ad breuiorem, sed vnum altero ponderosius erit ex situ, penes angulum eius maiorem, & recto propiorem. Verùm illud sensibile non est, nisi concipiamus iugum libræ per vnam, aut plures leucas extendi: quod cùm à nobis fieri nequeat, rectè statuimus omnes lineas directionis respectu nostri perpendiculares esse, vt in præfatione partis istius dictum est. *Reliqua ad grauitatis centrum, vel lineam directionis spectantia ex dictis, vel ex infrà dicendis intelligi poterunt: quapropter ad secundum librum accedo.*

MECHANICORVM LIBER SECVNDVS.

PRÆFATIO.

HIc liber explicabit quæ sit ratio ponderum à diuersis à centro libræ, vectis & aliarum machinarum distantiis pendentium; & quid aqua, & aër mechanicis conferant: quod ita Deo iuuante præstabimus, vt neque libri longitudo fastidium, neque breuitas obscuritatem paritura sit: quod more solito quibusdam propositionibus exequemur, quæ partim à Guido Vbaldo, & Steuino, partim ab aliis demonstratæ sunt, & facili experientia comprobantur. Hunc autem librum in quasdam partes, vt priorem diuidemus, quarum prima sequitur.

PRIMA PARS.

DE IIS QVÆ AD LIBRAM, & vectem pertinent, & de modo reperiendi centrum grauitatis columnarum, & aliorum corporum.

PROPOSITIONES.

I.

DVarum grauitatum situ æquilibrium ponderosior illam rationem habet ad leuiorem, quam longior radius ad breuiorem. Vbi aduerte æquilibritatem efficere, vt grauiora pondera leuioribus æquiponderare videantur; quod specie tantùm ob situm videlicet, & non pro-

priè verum eſt: aliud igitur eſt æquipondium, aliud æquilibre Hinc fit vt ſi pondus duplo leuius duplo magis à centro libra diſtet quàm pondus duplo grauius, vel pondus millies leuius, millies diſtet ampliùs quàm pondus millies grauius, iſorropa futura ſint. Huius autem propoſitionis varias demonſtrationes Steuinus adducit.

II.

✠ Diſtantiæ in libræ longitudine ſumuntur à puncto, à quo libra liberè pendet, & circa quod liberè voluitur: & à puncto, à quo pondus liberè pendet, quod reſpondet centro grauitatis corporis appenſi.

III.

✠ In æquilibrio vt ſe habet pondus ad pondus, ita ſe habet longitudo brachij dextri libræ ad longitudinem brachij ſiniſtri, & vt ſe habet hæc longitudo ad illam, ita celeritas ad celeritatem, quia quo puncta à centro remotiora ſunt, eo maiores circulos; & quo viciniora, eo minores in dicta proportione deſcribunt: adeout ſi pondus à centro libræ 8 pedibus diſtet, duplo maiorem circulum deſcribat, duplóque moueatur celeriùs, quàm aliud pondus 4 ſolùm ab eodem centro pedibus remotum. Igitur maior celeritas ponderis grauitatem compenſat: hinc fortè deduci poteſt quanto ponderi iaculorum, & aliorum corporum vi proiectorum vis, & celeritas reſpondeat.

IV.

Tria prædicta, nempe pondera, longitudo, & celeritas extra æquilibrium non eandem ſemper habent proportionem; maior enim eſt vnius proportio, quàm alterius, atque adeò non eſt talis minoris inæqualitatis inter celeritates ratio, qualis eſt maioris inæqualitatis inter duo pondera oppoſita. Huc autem reuocari poſſunt quæ de libra, & vecte ſequuntur.

V.

Potentia ſuſtinens pondus vecti appenſum, eandem ad ipſum pondus proportionem habebit, quam vectis diſtantia inter fulcimentum, ac ponderis ſuſpenſionem: ad diſtantiam à fulcimento, ad potentiam interiectam. Vnde ſequitur quò fulcimentum ponderi fuerit propriùs, minorem ad idem pondus ſuſtinendum requiri potentiam.

VI.

Si potentia pondus in vecte appenſum moueat, erit ſpatium potentiæ motæ, ad ſpatium moti ponderis, vt diſtantia à fulcimento ad potentiam: ad diſtantiam ab eodem ad ponderis ſuſpenſionem. Hinc fit ſpatium potentiæ mouentis ad ſpatium ponderis moti maiorem habere proportionem, quàm pondus ad eandem potentiam ſuſtinentem, cùm hæc potentia minor ſit potentia mouente.

VII.

Potentia quomodocumque vecte pondus sustinens ad ipsum pondus eandem habebit proportionem, quam distantia à fulcimento ad punctum, vbi à centro grauitatis ponderis horizonti ducta perpendicularis vectem secat, intercepta, ad distantiam inter fulcimentum, & potentiam.

VIII.

✠ Potentia pondus sustinens centrum grauitatis supra vectem horizonti æquidistantem habens, quò magis pondus ab hoc situ vecte eleuabitur; minori semper, vt sustineatur, egebit potentia: si verò deprimetur, maiori.

IX.

✠ Potentia pondus sustinens infra vectem horizonti æquidistantem ipsius centrum grauitatis habens, quò magis ab hoc situ vecte pondus eleuabitur, maiori semper potentia, vt sustineatur, egebit; si verò deprimetur, minori: vnde constat, si potentia vecte sursum moueat pondus, cuius grauitatis centrum sit infra vectem: quò magis pondus eleuabitur, semper maiorem requiri potentiam, vt pondus moueatur, cùm potentia sustinens maior esse debeat.

X.

✠ Potentia pondus sustinens in ipso vecte centrum grauitatis habens, quomodocumque vecte transferatur pondus, eadem semper, vt sustineatur, potentiâ opus erit.

XI.

✠ Si vectis distantia inter fulcimentum, & potentiam ad distantiam fulcimento, punctóque, vbi à centro grauitatis ponderis horizonti ducta perpendicularis vectem secat, interiectam, maiorem habuerit proportionem, quàm pondus ad potentiam, pondus vtique à potentia mouebitur.

XII.

Hinc fieri potest vt datum pondus à data potentia dato vecte moueatur: & potentia reperiatur, quę in dato puncto data pondera sustineat, atque moueat, quotcumque datis in vecte ponderibus vbicumque appensis, cuius fulcimentum sit etiam datum, & grauitas vectis data. *Iam verò ad libram redeo, in cuius gratiam addo sequentes propositiones.*

XIII.

✠ Si pondus in eius centro grauitatis à recta sustineatur linea, nunquam manebit, nisi eadem linea horizonti fuerit perpendicularis.

XIV.

✠ Libra horizonti æquidistans, cuius centrum sit supra libram, æqualia

æqualia in extremitatibus æqualiterque à perpēdiculo distantia habens pondera, si ab eiusmodi moueatur situ, in eundem rursus relicta, redibit, ibique manebit.

XV.

✠ Libra horizonti æquidistans æqualia in extremitatibus, æqualitérque à perpendiculo distantia habens pondera, centro infernè collocato, in hoc situ manebit: si verò inde moueatur, deorsum relicta, secundum decliuiorem partem mouebitur.

XVI.

✠ Libra horizonti æquidistans, æqualia in extremitatibus, æqualiterque à centro in ipsa libra collocato; distantia habens pondera, siue inde moueatur, siue minus, vbicumque relicta manebit. *Contra Cardanum & Iordanum, vt Guid. Vbaldus prop. 4. de libra fusissimè demonstrauit.*

XVII.

✠ Duo pondera in libra appensa, si libra inter hæc ita diuidatur, vt partes ponderibus permutatim respondeant: tam in punctis appensis ponderabunt, quàm si vtroque ex diuisionis puncto suspendantur.

XVIII.

✠ Pondera æqualia in libra appensa eam in grauitate proportionem habent, quam distantiæ, ex quibus appenduntur: *vnde & stateræ rationes ostendi possunt.*

XIX.

✠ Duobus vel pluribus datis in libra ponderibus vbicumque appensis, centrum libræ inueniri potest, ex quo si suspendatur libra, data pondera maneant in æqualibrio: quod fiet, si priùs partes ponderum simul addantur; deinde spatium lineæ datæ, quod est inter puncta suspensionis, in totidem partes diuidatur, quot fuerint vnitates in summa addita. Denique si ponantur ex parte vnius ponderis tot partes longitudinis, quot oppositum pondus habet partes grauitatis, punctum enim quod terminabit huiusmodi partes, erit punctum æquilibrij: exempli gratiâ, si pondus maius habet partes 12, minus verò duas, additæ faciunt 14, quas si numeres in prædicta libræ longitudine, incipiendo à centro maioris ponderis, centrum grauitatis libræ erit in fine secundæ partis; hoc est in fine 12. si incipias à minori pondere. Quod autem de duobus ponderibus dictum est, pluribus conueniet: semper enim duorum ponderum centra ad vnum reuocabuntur, donec æquilibrium quæsitum inuentum fuerit: quod fiet si, vt maius segmentum, quod se tenet ex parte minoris ponderis, est ad minus, quod se tenet ex parte maioris ponderis, ita maius pondus fuerit ad minus pondus: *quod Steuinus 2. prop. de statica elementis fusè demonstrat: ex quo sequentes prop in columnarum gratiam.*

XX.

✠ Pendula columnâ per grauitatis centrum à plano ad basim parallelo sectâ, firmitudinis autem, idest *retentionis*, puncto supra grauitatis centrum fixo; axis est horizonti parallelus.

XXI.

✠ Si punctum retentionis centrum grauitatis sit pendentis columnæ, quemcumque ei situm dederis, seruat.

XXII.

✠ Si columna per grauitatis punctum sit secta à plano basi parallelo, fueritque retentionis punctum in secante plano, infra grauitatis centrum: columna, naturæ ductu, sese inuertit, donec grauitatis centrum sit in pendula grauitatis diametro. Est autem grauitatis diameter recta infinita per grauitatis centrum acta, quæ cùm horizonti perpendicularis fuerit, *pendula* vocatur. Grauitatis autem centrum pendentis corporis est in pendula grauitatis diametro. Ratio istius propositionis est, quia columna prædicta nequit iacere in puncto, sed tantùm in solo.

XXIII.

Ansa infinitum continuata binorum ponderum iugum quoduis in suos radios secat. Est autem ansa, duorum ponderum pendula grauitatis diameter; quale est filum quo duo corpora in extremitate baculi posita suspenduntur ita vt filum è medio baculi puncto suspendatur; qualis est etiam trutina in bilancibus. Iugum vero, siue trabs est recta duabus pendulis diametris terminata. Sicut ansæ punctum in iugo fixum, dicitur firmum seu retentionis, ac firmitudinis.

XXIV.

Datis retentionis puncto notæ columnæ, notisque ponderibus situ æquipondijs inde pendentibus, inueniri potest an axis horizonti parallelus futurus sit; an quem dederis situm seruaturus: an verò se inuersurus, donec grauitatis centrum fuerit in pendula grauitatis diametro. Notâ etiam columnâ, notisque ponderibus inde suspensis, retentionis punctum inuenitur, in quo quemlibet datum situm seruabit. Denique notâ columnâ cum retentionis puncto, notis item ponderibus inde suspensis, quæ axem horizonti parallelum seruant; pondus reperiri potest, quod optato columnæ loco suspensum axem in dato situ seruabit: *vt Steuinus prop. 10. 11. & 12. libri prædicti demonstrat.*

XXV.

Æqualia pondera, vnum eleuans, aliud deprimens æqualibus & angulis, & radiis æquales potentias habent. Pondus autem eleuans de qualibet potentia pondus eleuante dicitur, quod est rectum, vel obliquum, prout horizonti perpendiculare, vel obliquum fuerit.

XXVI.

Datis columna, & in eius axe duobus punctis, vno fixo, altero in longiore segmento mobili, inuenire pondus rectè attollens ex puncto mobili, quod datam columnam in dato situ retineat. *Quod Steuinus prop. 14. demonstrat.*

XXVII.

Duorum punctorum in axe columnæ altero fixo, altero mobili: pondus rectè attollens ex mobili cum columna situ æquipondium, illam habet rationem ad columnam, quæ est segmenti axis, quod inter centrum grauitatis, & punctum fixum est, ad segmentum eiusdem quod inter fixum, & mobile intercipitur. Quod punctum si seruet columnam in vno aliquo situ, in quouis alio seruare poterit.

XXVIII.

Columnâ super duobus in axe punctis quiescente, quemadmodum axis segmentum inter grauitatis centrum, punctumque sinistrum, ad eiusdem segmentum inter grauitatis centrum, punctumque dextrum: ita columnæ pondus super puncto dextro quiescens, ad reliquum ponderis super sinistro quiescentis.

XXIX.

Columnâ duobus in punctis quiescente, erit vt segmentum axis inter grauitatis centrum, & perpendicularem per punctum sinistrum, ad eiusdem segmentum inter grauitatis centrum & perpendicularem punctum dextrum: ita sustentatum pondus columnæ dextro puncto, ad pondus quod sustinetur sinistro.

XXX.

Centrum grauitatis cuiuscumque, & quantumcumque difformis, & irregularis figuræ reperitur, si ab aliqua sui parte liberè suspendatur, & ab eadem parte, à qua pendet, demittatur perpendiculum, ita vt in corpore linea, quam fecerit perpendiculi filum, notetur: deinde ab alia parte corpus idem liberè suspendatur, vt prius, notetúrque iterum linea perpendiculi ab hac parte super corpus demissi, concursus enim duorum filorum perpendiculi in illis duobus suspensionis punctis demissi, erit centrum quæsitum.

XXXI.

Præter ea quæ primo libro de centro grauitatis dicta sunt, Steuinus libro de centro grauitatis videri potest, in quo demonstrat centrum grauitatis cuiusque trianguli rectam ab angulo in oppositum latus medium ita secare, vt segmentum inter ipsum & angulum duplum sit reliqui. Deinde trianguli duorum laterum vnoquoque in tria æqualia segmenta diuiso, recta per sectionum puncta tertio lateri proxima, per

grauitatis centrum ductam esse. Tertiò, securiculæ grauitatis centrum esse in recta laterum parallelorum bisectionem connectente: cuius securiculæ grauitatis centrum rectam parallelorum laterum bisectricem ita secare demonstrat, vt segmentum bisectricis minori lateri conterminum ad reliquum sit, vt maioris paralleli lateris duplum minore auctum, ad duplum minoris cum maiore. Quartò, parabolarum grauitatis centrum, quod est in earum diametris, hasce diametros in homologa segmenta dirimere: quod de figuris planis intellige, quarum omnium centrum figuræ idem esse cum centro grauitatis ostendit prima propositio, quemadmodum 2. trianguli cuiusque grauitatis centrum esse in recta ab angulo in oppositum latus medium ducta.

XXXII.

Præterea demonstrat in centrobaricis solidorum, solidi cuiuslibet, figuræ & grauitatis idem esse centrum. Deinde prismatis centrum grauitatis esse in axis medio; pyramidis verò in axe, quem à centro grauitatis ita secari docet, vt segmentum vertici vicinius reliqui sit triplum: at verò de centro grauitatis lib. 1. fusiùs actum est, quàm vt hîc plura subiungere debeamus. *Cum autem (mi* THEOTIME*) hac in parte de ponderibus rectà descendentibus egerimus, sequenti de obliquè descendentibus, déque vi motus libræ, vectis, &c. dicendum est.*

SECVNDA PARS.

DE PONDERIBVS OBLIQVIS, & de viribus vectis, & libræ & aliarum machinarum ad ea reductarum, vbi & de nauigatione, & de quæstionibus mechanicis Aristotelis.

OBliqua pondera dicuntur quæ impediuntur quominus rectè pergant ad centrum, vt cùm globulus à vertice montis descendit, tardiúsque ad planum montis peruenit, quàm cùm absque vllo impedimento perpendiculariter descendit: quò verò planum per quod descendit graue, magis inclinatur, seu magis à perpendiculari recedit, & ad horizontem accedit, eò tardius, ac difficiliùs graue descendit, eóque minus grauitatis suæ vires exerit Hinc fit vt eò minor vis requiratur ad pondus in plano obliquo retinendum, vel ad illud per idem planum eleuandum, quò planum magis inclinatum fuerit: cùm enim ex parte sustineatur à plano obliquo, linea directionis, hoc est centri terræ,

transiens per punctum contactus ponderis cum plano obliquo, pondus non diuidit in partes æquiponderantes, vt contingit in ponderibus liberè per aërem descendentibus. Vix autem aliquid hactenus de ponderibus obliquè descendentibus, vel ascendentibus demonstratum est. Nunc igitur solùm ea afferemus, quæ à multis conceduntur.

PROPOSITIONES.

I.

VT fiat æquilibrium duorum ponderum super planis inclinatis positorum, debet vnum pondus se habere ad aliud, vt latus vnum trianguli, in quo pondus vnum consistit, ad aliud latus super quo pondus aliud fuerit: *quod Steuinus ita concipit.* Si triangulum planum horizonti perpendiculare fuerit, basis parallela, reliquis autem lateribus globi singuli addantur æquilibres, erit quemadmodum trianguli latus dextrum ad sinistrum, ita sacoma globi sinistri ad antisacoma globi dextri. *Quod probat, quia sequeretur alioqui motus perpetuus, quod absurdum esse putat, quem tamen in eo quidam aiunt deceptum fuisse, vt & Pappum, lib.* 8. *coll. Mathem. prop.* 9. *quippe existimant tam huius propositionis falsitatem, quam Pappi errorem manifestissimè demonstrari.*

II.

Si axis columnæ puncta habeat, firmum, & mobile, & ex isto dependentia pondera, vnum rectè, alterum obliquè eleuans, in dato situ columnam conseruant: vt se habet linea rectè eleuans ad lineam obliquè extollentem, ita illius pondus ad pondus huius. Si verò prædictæ lineæ deprimant, erit pondus rectum ad pondus obliquum, vt linea rectè deprimens ad lineam obliquè deprimentem.

III.

Æqualia pondera suspensa è ductariis lineis, quæ ex eodem axis puncto in contrarias partes ductæ æquales cum axe angulos faciunt: in columnam æqualem potentiam exercent. Potentia verò ponderis, cuius ductaria linea axi perpendicularis est, in columnam dati situs est omnium maxima. Hinc fit, vt quò anguli ductariarum linearũ, è quibus pondera suspenduntur, angulo recto viciniores sunt, eo ponderum potentias esse maiores; eóque minores, quo longiùs ab angulo recto dissident.

IV.

Duæ annuentes, siue non parallelæ lineæ, è quibus columna depen-

det, in infinitum productæ, in columnæ pendula grauitatis diametro sese intersecant: si verò vna sit horizonti perpendicularis, erit & reliqua: sin obliqua, obliqua: si illa huic annuit, annuet & hæc illi: sin abnuit, abnuet.

V.

Si columna, & duo pondera obliquè extollentia situ æquilibria sunt, vt linea obliquè extollens ad lineam rectè extollentem, ita ponderum quodque obliquum ad suum pondus rectum.

VI.

Quæcumque proportiones sunt columnæ ad pondera inde suspensa, ponderumque lineas: easdem cuiusuis etiam corporis esse ad sua pondera consimiliter inde pendentia, ponderumque lineas. Hæc autem omnia hoc axiomate niti videntur, quod supra tetigi, nempe vt se habet latus ad latus, ita celeritas descensus vnius ponderis ad celeritatem descensus alterius: quoties enim, verbi gratia, fit æqualis descensus, æqualis ad centrum fit accessus: quò autem latus trianguli, seu planum est obliquius, eò longius est: igitur & descensus corporis grauis super eo factus, tardior erit, atque adeo tardius ad centrum vniuersi accedet.

VII.

Hoc concesso principio si fiat triangulum, cuius latus vnum sit perpendiculare horizonti, aliud verò sit ita inclinatum, vt præcedentis centuplum existat, pondus subcentuplum in illo appensum sustinebit pondus centuplum in illo positum, erunt enim æquilibria. Vnde pondere dato dari potest vis, & inclinatio, & è contra.

VIII.

Pondus circulo, vel globo insistens in diuersis partibus varie ponderat, ob varias globi ad horizontem inclinationes: quod & de aliis figuris sphæroidalibus, & conicis intelligendum est.

IX.

Si eadem sit proportio vis proiectorum obliquorum, & rectorum, quæ ponderum rectorum & obliquorum eleuantium, & deprimentium, pilæ, iacula, globi è bombardis emissi, & alia quæcumque vi proiecta tantum de actiuitate sua, quantum de rectitudine, deperdunt; eòque ictus illorum debiliores sunt, quo in parietes, vel alia corpora obliquius incidunt: quæ si redeunt, postquam illisa fuerint, eo tardius, minusque longe redibunt, quo ad corpus reflectens obliquius allisa fuerint. Quibus positis globus per lineam obliquam emissus, quæ dupla sit lineæ muro percusso perpendicularis, subduplam tantummodo illius vim habebit, qui per lineam perpendicularem æquali pulueris pyrij virtute mitteretur.

x.

Hinc etiam cognosci posset, quanto minus vela nauium ab obliquis, quàm à rectis ventis impellantur; datisque leucis, quas naues à vento perpendiculari adiutæ faciunt, leucæ dari possent, quas conficerent impulsæ à vento æqualis virtutis, iuxta quamcumque obliquitatem consideratis. *At verò de nautica alibi dicendum est: Iam enim ad vim motus accedo, quæ mirabilis esse videtur.*

XI.

Tanta est vis motus ponderibus ascendentibus, descendentibus, aut in transuersum actis impressus, vt quodlibet minimum pondus, maximum quodlibet superare possit, modò celeritas motus illius compenset, & superet grauitatem istius. Hinc fit vt pondus decidens eò maiorem vim habeat, magisque ponderare videatur quò ex altiori loco decidit: quamuis non sit eadem ratio spatiorum à quibus cadit, & virium: neque res motæ impedimentis suis, (qualis est aër, & superficies contactus corporis per aërem descendentis) sint proportionales; similia enim solida superficiebus suis non sunt proportionalia, nam cubi in ratione octupla habent superficies in ratione quadrupla. Hinc fit vt minora corpora maius impedimentum patiantur, & propterea tardiùs descendunt quàm maiora: Steuinus tamen asserit se expertum fuisse æquale 30. pedum spatium pari velocitate à duobus globis plumbeis pertransitum fuisse, tametsi essent in ratione decupla.

XII.

Probabile est vim illam ingentem, quam pondera per motum acquirunt, ex eo proficisci, quod aër inter corpus motum, & corpus percussum condensetur, qui cum horum corporum neutrum penetrare, neque huc illuc effugere possit, maximam potentiam exerit. Quod manifestum est in malleo in cuneum celeriter incidente, & impacto, qui longè potentior est, quàm mille mallei eidem cuneo superimpositi, qui pari celeritate, qua cuneus, moueri debent, vt lignum ingrediatur, ac proinde uim habere maiorem quàm lignum in sui diuisione resistentiæ habeat: at verò malleus decidens cuneo ingrediente celeriùs mouetur eumque adigit eo fortiùs, quò magis condensat aërem.

XIII.

Hinc concludere possumus malleum, globum è bombardis emissum, lapidem fundâ proiectum, &c. eo maiorem vim habere, magisque in corpus, in quod emittuntur, agere, quo magis aërem interpositum condensant; aërem verò eo magis condensari, quò celeriùs mouentur: igitur si duplo, vel centies celeriùs mouentur, duplo, vel centies magis aërem condensabunt, ac duplo, vel centies fortiùs ferient.

XIV.

Magnum quid is in mechanicis reperiet, qui rationem virium corporis decidentis, & spatiorum à quibus decidit, reperiet, & demonstrabit quanto, verbi gratiâ, globus ex altitudine 20. pedum decidens vim maiorem habeat, quàm si ex 10. solummodo pedibus cadat: & quanto maior esse debeat globus ex altitudine 10. pedum cadens, globo ex altitudine 20. pedum decidente, vt vim æqualem habeat, ac corpus subiectum æqualiter feriat; quod pluribus impossibile videtur. *Deinceps verò de singulis instrumentis ad mouenda pondera destinatis agendum.*

XV.

Libræ maiores minoribus exactiores sunt, quia brachia libræ maioris maiorem circulum describunt, cùm eorum extremitates magis à sparto, seu trutina, hoc est centro, distent: hinc fit vt velocius moueantur, quia minus à centro ad motum sibi non naturalem, id est, circularem retrahuntur, & à motu recto sibi naturali minus impediuntur, per quem descenderent, nisi à centro retraherentur, & in gyrum inflecterentur. Itaque quo semidiametri, vel radij extremitas magis à centro, vel sparto recedit, eò liberior fit, minusque cogitur; quo circumferentiæ sunt maiores, eo magis vergunt ad rectam lineam: vide igitur (mi Theotime) num circumferentia infinita cum linea recta infinita, & contrà coincidat. Quod autem lances plurimorum artificum, quamuis maiores, minus exactæ sint quàm minores Gemmariorum, vel Aurificum, id oritur ex eo quod illæ sint rudes, & materiæ pertinaciæ obnoixiores; hæ verò exquisitius elaboratæ. *Hinc constat rationem mobilitatum esse vt diametrorum: & circulos eadem vi motos hanc analogiam seruare, vt quæ est ratio motus in maiore circulo secundùm naturam ad suum motum præter naturam, eadem sit motus in minore circulo secundùm naturam ad suum motum præter naturam. Denique ab eodem pondere extremum librilis eò celerius ferri, quo plus ab agina distiterit.*

XVI.

Quamuis libræ ponderibus vacuæ æquilibrent, non ideò tamen omni fraude carent: si enim spartum non sit in medio, & lanx radij breuioris facta fuerit ex ligno nodoso, vel radici vicino, vel ei plumbum infusum fuerit; adhuc lances æquilibres erunt; sit enim breuior radius in 10. partes diuisus, longior in 15. huius lanx penderet 10. illius verò lanx 15. certe ob permutatam proportionem libra suspensa in sparto æquilibrabit: nec ab æquilibrio discedet, si lanci breuioris radij sacoma vnciarum 6. & alteri lanci sacoma se habens ad 6. vncias, vt 10. ad 15. Propterea quæst. 1. lib. Mechan. purpurarios reprehendit

Arist.

Aristot. cùm enim vt 10 ad 15, ita 4 ad 6, pro 4 vnciis purpuræ, 6 vnciarum pretium sumet, sed fraudem deteges, si alternatim sacoma modò huic, modò illi lanci apposueris.

XVII.

Cùm libra spartum, seu aginam, hoc est centrum habet in superiori parte, & imposito pondere vna pars scapi, seu librilis sursum tollitur, ablato pondere, redit ad pristinum statum, quia in librili sublato plus libræ fiebat extra perpendiclum: si verò fulcimentum, seu centrum est in parte inferiori, librilis pars per pondus depressa, ablato pondere non redit, quia pars inferior librilis maior est, statim atque à parallelismo cum horizonte discessit, ac proinde grauior est, situmque decliuem retinet; alioqui centrum grauitatis ascenderet. Deniquè cùm spartum est exquisitè medium, librilis partes in quolibet situ remanent, cùm libræ brachia semper æqualia sint, & centrum grauitatis sit in perpendiculari horizontis: quod iam in parte prop. 11. & 12 dictum fuerat. Hoc autem vltimum libræ genus exactissimum est, cùm vel minimo pondere altrinsecus posito declinet. Videatur apud Baldum cur turbo, seu conus, ac trochus puerorum in orbem actus non cadat donec cesset motus; quomodo funambuli in neutram partem cadant; & vnde machinarum demolitoriarum, vt arietum, & testudinum, uires pendeant.

XVIII.

Tametsi de vecte, sicut & de libra in prima parte egerimus, hîc tamen alia subiungemus, quibus omnes ferè quæstiones solui possint, quas Arist. In Mechanicis proposuit. Itaque vectis est palus oblongus, cuius extremum acutius, lingula: obtusius verò, caput appellari potest: quod autem vecti subditur, vel quod ei superponitur, vt onera faciliùs eleuentur, dicitur hypomochlion; quod si prismation fuerit, id est in formam prismatis factum, & vni laterum vectis supponatur, optimum erit. Musculos autem corporis Galenus vectibus lib. 1. de placit. Hippocr. & Platon. comparauit, quibus singula corporis membra vt totidem onera variè flectuntur, sursum intenduntur, contorquentur, &c.

XIX.

Vectis ad libram reducitur, imò est libra deorsum habens aginam, seu hypomochlion pro centro, siue onus sit inter fulcimentum, & potentiam, siue fultura sit inter onus & potentiam, quod sæpius contingit, siue potentia sit inter vectem & onus. Ita verò se habet motum pōdus ad potentiam mouentem, vt brachij longitudo ad brachij longitudinem; & quo brachium lōgius fuerit, eò celeriùs, ac minori vi mouebitur, maque pondus leuabit: hic vectis, & libra ad circulum reuocantur, cuius

centrum ab agina, ſeu fulcro, radij vero, ſeu diametri à brachiis repræſentantur. *Videatur Archim. lib. 1. de æquipond. prop. 6. & noſtra prima pars.* Hinc fit vt potentia ſit ad pondus ſuſtentum, vt pars vectis ab hypomochlio verſus linguam, ad partem ab eodem hypomochlio verſus caput.

XX.

Remi, quibus naues impelluntur, ad vectem reduci debent, ita vt ſcalmus cùm naui ſit pondus, mare hypomochlion, & remex, potentia mouens, qui manubrium remi tenens mare diuidit, quo palmula remi fulcitur vt nauim antrorſum impellat. Ex tribus autem remigum ordinibus Thalamires, qui ſedet ad proram, & Thranites, qui verſus puppim, vna impulſione plus ſcalmum, ſeu nauem mouent, quàm Zygites, ſeu meſoneus, hoc eſt qui verſus mediam nauis ſpondam, quæ eſt περιφορουδής. Plus autem illi nauim promouent, quorum remi ita diſponuntur, vt remi pars à ſcalmo ad manubrium maior ſit, & pars à ſcalmo ad palmulam plurimum maris diuidat. Tunc autem mare pondus erit, & ſcalmus agina, ſi nauis immobilis eſſe ſupponatur. Tametſi vero minus zygites, facilius tamen nauim promouet: hinc triremium præfecti robuſtiores remiges ad proram, & puppim, imbecilliores circa mediam triremem ponunt: quod eſt contra Ariſtot. q. 4.

XXI.

Temo, ſeu gubernaculum nauis ad vectem reducitur, nam mare eſt hypomochlion, vt antea; cardines verò, ſcalmus ſeu pondus mouendum; gubernator, potentia, quæ nauim dextrorſum obliquat mouendo mare ſiniſtrorſum, & contra. Eſt autem gubernaculum in puppi, cuius paruus motus eſt cauſa motus longè maioris qui fit in prora. Maximè verò nauis currens motu pterygij mouetur, non ita quieſcens. Videatur Baldus, qui carinam ait vectis inſtar in conuerſione nauis ſe habere: pars mota, & mouens potentia ad puppim; fulcimentum circa proram; potentia mouens mare, quod alas temonis obliquè ferit.

XXII.

Ad gubernaculum reduci debent caudæ piſcium, & auium, quarum nempe motu ad dextram, ſiniſtramque conuertuntur. Omitto vela molendinorum, & verticillorum, quæ à vento, quemadmodum alæ pterygis ab aqua, mouentur: de quibus agetur vbi de ventis vela nauium impellentibus. *Sequuntur quinque propoſitiones Nonnÿ, quas duabus ſequentibus complectemur.*

XXIII.

Remigibus nauim mouere potentibus caput remi plus antrorſum

mouetur quàm nauis. Capite vero remi motu proprio, & naui æqualiter motis, palmula immota veluti centrum manet: & palmulâ immotâ, caput remi, & nauis æqualiter mota sunt: nam si remi palmula dimota non fuerit à loco suo, ibique tandiu persistat, donec remus situm rectitudinis obtineat, tantum spatium conficiet caput remi motu proprio, quantum nauis.

XXIV.

Capite remi proprio motu conficiente spatium duplum spatij nauis; tunc nauis tantùm promouebitur, quantùm palmula retrocedet: igitur si nauis æquè prouehitur ac palmula retrocessit, motus capitis remi proprius duplus est motus naui s. Naui autẽ celeriùs motâ quàm capite remi, palmula antrorsum mouebitur, nec quicquam retrocedet, idque spatij decurret, quo nauis motus motum capitis remi superat.

XXV.

✠ Quò antenna sublimior fuerit, iisdem velis, & vento eodem celeriùs feruntur nauigia: est autem antenna lignum per transuersum in malo positum; & malus, seu ἱστὸς est lignum instar trunci arboris circa medium nauis perpendiculariter infixum, cuius partem inferiorem, pternam; mediam, τράχηλον summam denique, carchesium appellant: vtraque verò latera veli in antenna suspensi dicuntur cornua: sed & tria velorum genera numerantur, nempe artemo, & acatium, quod maius est, dolo, quod minus: & ἐπίδρομος, quod à tergo ponitur: lonem vulgo tr;nchetum appellant.

XXVI.

✠ Malus & vela expansa reducuntur ad vectem, vis enim mouens est ventus, qui eo maiorem vim acquirit, quanto fuerit pars longior vectis inter hypomochlion, & vim mouentem; pterna, seu calx mali est fulcimentum, carchesium est caput vectis, pondus est locus mediæ spondæ, in qua malus carinam deserit, vel tota nauis. Baldus tamen antennam reducit ad nouum genus ipsius vectis, cuius brachia in angulum desinunt, qualia sunt brachia mallei, quo clauos reuellimus; & forcipum, quæ morsu clauorum capita violenter è tabulis extrahunt: pondus siquidem est clauus euellendus.

XXVII.

Tametsi ventus secundus non fuerit, possumus tamen cornu antennarum ventis obiecto nauigare, quod Aristoteles dixit pedem facere, hoc est ita partem veli disponere, vt obliquo, vel etiam contrario vento vtamur; ad quod rudentes μυρεία quibus detrahitur velum; & πρότονοι quibus intenduntur ad proram, & πόδες quibus ad angulos conuertuntur, & laxantur, necessariæ

ſunt. *Videatur Plin. l. 2. c. 47. & Galenus 1. de vſu part. c. 19. vbi de motu nauis mixto ex ventis, & remigantium robore.* Hinc fit vt naues eodem vento in partes contrarias agantur: vento enim exempli gratia, dextrorſum nauim pellente gubernaculum cum nautis illam ſiniſtrorſum rapit: ita tamen ventus præualere poteſt, vt inutilis ſit remigum renixus, & induſtria, ideo que anchora iacienda eſt. *Sed poſtea de nauigatione pluribus agendum erit, itaque redeo ad libram & vectem.*

XXVIII.

Statera, ſeu trutina reducitur ad libram & vectem: & quæ Ariſtoteli φάλαγξ dicitur; illius autem partes ſunt ſcapus; anſa fulcimento hærens: harpago, vel lanx: & æquipondium, quod appendiculum, & σφαίρωμα vocant, quod omnia pondera diſtinctione punctorum in ſcapo notatorum ſupplet, ac vi mouenti reſpondet. Appendiculum autem parui licet ponderis, æquilibre fit magnis ponderibus in lance appenſis, eoque maioribus, quò longiùs à fulcimento ſiſtitur, quod in extremo anſæ reperitur: ſeruata enim permutatim ponderum, & brachiorum proportione fit æquilibrium vt in vecte vel libra, ideoque proportiones brachiorum, ſeu ſpatiorum porportionibus ponderum, & contra, æquari debent: enimvero in æquilibri ſtatera pondus lancis ita ſe habet ad pondus appendiculi, vt ſpatium inter fulcimentum & appendiculum ad ſpatium inter fulcimentum, & punctum, à quo lanx ſeu pondus dependet.

XXIX.

Cum ſtatera duplex fulcimentum habet, illo grauiora appendimus pondera, quod propius eſt puncto in quo lanx appenditur, tunc enim vectis eſt maior. Poſſumus etiam vti ſtatera, quæ ſtabile appendiculum, mobile autem fulcimentum habeat, quod cum erit in centro grauitatis, ſtatera ſtabit, & ita diuiſa erit, vt fiat brachiorum, & ponderum eadem ratio, ordine permutato: hæc tamen ſtatera vt minus commoda, non eſt in vſu: quæ actu, & poteſtate libræ eſt totuplex, quotuplex eſt locus anſæ.

XXX.

Cum ſcapus integer ad pondus appenſum eam rationem habet, quam duplum partis, quæ eſt ab anſa verſus lancem, ad reliquum; tunc pondus ſcapum vniformem, & omnibus ſuis partibus æqualem in æquilibrio conſtituit: vt ſi ſcapus eſt 12 vnciarum, & pars à lance ad anſam 2; huius partis duplum eſt 4, reliquum 8, vt igitur 4 ad 8, ita ſcapus, ideſt 12, ad pondus nempe 24 vnciarum. Si verò pars ab anſa ad lancem ſit 1, duplum erit 2, reliquum 10: vt igitur 2 ad 10, ita 12, hoc eſt

totus scapus, ad pondus nempe 60, vnciarum, quod per regulam trium reperitur. Cognoscitur autem ponderationis æquilibrium, cùm in appendendo scapus stateræ cum ansa rectos angulos constituit, & plano horizontis parallelus est.

XXXI.

Si stateram pro vecte sumas, trutina erit fulcimentum, seu hypomochlion, pondus leuandum, merx lanci imposita: potentia verò perpendiculum, seu appendiculum, ita vt quanto productior fuerit pars vectis, hoc est scapi, ab hypomoclio ad potentiam, tanto faciliùs potentia moueat. Statera autem de qua Arist. 20. quæst. plures trutinas actu distinctas habuisse videtur, itaut hasta statim in vna, statim in alia trutina suspenderetur pro vario pondere determinando, quod fiebat eam proportionem inter pondus mercis, & æquipondij obseruando, quæ erat permutatim inter distantias vtrinque ab assumpta trutina, quæ in trutinando vicem hypomochij gerit: tunc autem merx est potentia mouens, pondus vero æquipondium, quod æquiponderabat nudæ lanci, vt tota statera per se æquilibrabilis esset. Hinc igitur constat stateram esse simul libram, & vectem; libram, quia quodlibet spartorum, seu trutinarum sit centrum libræ, cuius duæ lances sunt harpago, & æquipondium, quod tantumdem ponderis trahit, quantum est in harpagine: vectem autem, quamuis inuersum, ob rationes prædictas. Æquipondij vero grauitas in vno scapi puncto ad grauitatem eiusdem æquipondij in altero puncto se habet vt remotio ad remotionem, hoc est, vt longitudo scapi à fulcimento ad vnum punctum æquipondij, ad longitudinem scapi à fulcimento ad aliud punctum æquipondij.

XXXII.

Odontagrâ, seu dentiduco medici faciliùs quàm digitis dentes euellunt, quia odontagogum, hoc est dentiforceps habet rationem duplicis vectis oppositi; commissura enim, seu decussa connexio est hypomochlion, dens est pondus commouendum, qui eo faciliùs è gingiuæ suæ gynglimo eximitur, quo brachia forcipum longiora fuerint. Mauult tamen Vbaldus dentem, & forcipem vectium officio fungi; ita vt dens habeat fulcimentum in eo loco, in quo à breuiori dentiduci brachio tangitur, longius brachium sit potentia mouens, dentis vero resistentia ponderis vices referat. Quo vero maior fuerit proportio latitudinis dentis à fulcimento ad potentiam ad eam quæ est à fulcimento ad pondus, eo faciliùs auelletur.

XXXIII.

Nucifrangibulum certiùs quàm ictus frangit nuces: nisi enim mal-

lcus ita incidat in nucem vt punctum quo planum mallei attingit nucem incidat in rectam lineam cum puncto plani, cui nux insistit, facilè elabitur, & ictum ob sui rotunditatem eludit. Quò verò manubria, seu brachia forcipis nucem frangentis longiora fuerint, & quò maior erit proportio spatii à vertebra, hoc est hypomochlio, ad extremitatem brachiorum seu ad potentiam mouentem, ad partem brachii quæ est à fulcimento ad nucem, eo validiùs nux frangetur; quò nux fulcimento propior fuerit, maior fiet vectium eleuatio, seu maior brachiorum apertio.

XXXIV.

Magnum quid is in mechanicis reperiet, qui proportionem inter vim dati nucifrangibuli, & cuiuscumque alterius forcipis, & vim ictus vel motus impressi dati assignauerit; hac enim ratione dici poterit quæ sit proportio ponderis, vel potentiæ pugni hominis ferientis, cum ipso pugno non feriente: quod aliqui aiunt constare posse ex percussione lancis vacuæ collatæ cum plena: si enim ictus pugni, vel mallei deprimat lancem vacuam, præponderabit ponderi alterius lancis; alioqui lanx onerata grauior, vel fortior erit ictu dato: quod etiam in vecte, & stateris experiri possumus. Expertus sum quidem pondus vnius libræ cadens ex altitudine dimidii pedis vim æqualem habere 6 libris absque vllo motu chordæ æneæ insistenti: eundémque effectum præstare semilibram ex altitudine sesquipedali, & quadrantem libræ ex quadrupedali altitudine decidentem: sed vlterius inquirendum, antequam certam vllam inter prædicta proportionem statuamus.

XXXV.

Longa ligna manu, vel humero gestata longè difficiliùs ab extremo, quàm à medio sui gestantur, quia quò longiora sunt, eo magis flectuntur, & vibrantur, atque nutant, quapropter per lationem quæ fit sursum & deorsum centrum grauitatis mutant, & lationem anteriorem impediunt, latorem quodammodo retrahendo. Ratio verò mechanica est, quia lignum gestatum est vectis, potentia sustinens est manus; pondus, extremitas ligni remotior; humerus, fulcimentum; vel si manus est fulcimentum, humerus, aut quidpiam simile dicetur potentia sustinens. Itaque manus, vel humerus, hoc est potentia sustinens pondus debet esse ad pondus, vt totum lignum, id est totus vectis, ad partem eius quæ à potentia ad fulcimentum. Verbi gratiâ, si minima pars inter manum & humerum intercepta sit sextupla maximæ partis inter humerum, & extremum vectis in quo pendet pondus 6 librarum, interceptæ, humerus 36 libras feret; qui tamen in medio ligni constitutus 12 solùm libras gestaret: tunc enim extrema se inuicem

ſuſpendunt, librant, & ſubleuant, vt fiat æquilibrium. *Hinc habetur ratio cur haſta ſolo iacens manu ad alteram extremitatum appenſa difficillime extollatur.*

XXXVI.

Baculus, vel lancea digito faciliùs ſuſtinentur, ſi fuerint horizonti perpendiculares, quia tunc partes inferiores ſuſtinent ſuperiores: cùm autem baculus inclinatur, omnes partes ſine fulcimento tendunt deorſum: & hypomochlion non longè abeſt à vi mouente, à quo tamen longiùs diſtat alterum extremum inclinatum.

XXXVII.

Cùm idem pondus valde procerum eſt, difficiliùs ab humero fertur, quam cùm breuiùs eſt, quia quo magis extrema ligni ab eius centro recedunt, eo debiliora fiunt, ac proinde ſuopte pondere faciliùs nutant, ac ſuccuſſantur, & duplici preſſione grauant humerum: dum enim deorſum vergunt, impetu ex ipſa violentia acquiſito trahunt centrum humero ſuprapoſitum: quia tamen poſt depreſſionem extrema vibrata attolluntur, ſecúmque centrum ad ſuperiora trahere conantur, humerus alleuiatur. Vbi aduertendum dextrum humerum non adeo aptum eſſe ad onus ferendum ac ſiniſtrum, quia huius eſt ſuſtinere, illius vero, vt & cruris dextri, mouere, impellere, & trahere.

XXXVIII.

Ex duobus hominibus phalangâ, ſeu perticâ pondus ferentibus, ponderi vicinior magis premitur, atque laborat, quia phalangarius, ſeu baiulus ponderi, hoc eſt hypomochlio vicinior, habet rationem ponderis moti, baiulus vero remotior eſt potentia mouens, ex cuius parte ſe tenet longior pars perticæ, quæ vectis eſt. Vterque tamen baiulus fulcimentum, & potentia dici poteſt, eſt autem mobile quod inter vtrumque appendet. Quapropter potentia vnius ad alterius potentiam erit vt interualla inter potentias, & pondus reciprocè. Vtriſque autem vectis cum appenſo pondere innititur. *De reliquis viribus & machinis, & circuli mirabilibus ſequenti parte dicturi ſumus.*

TERTIA PARS.

DE VTILITATIBVS, ET mirabilibus circuli in mechanicis.

PROPOSITIONES.

I.

Circulus, quem Aristoteles initio Mechanicæ, quantitatis ponderum, & potentiarum examinatricis, θαυμασιώτατον appellat, plurima complectitur, quæ mirabilia esse videntur. Primò, fit ex quodammodo contrariis, mouente, & immoto, quia dum vnum extremum diametri circulum describentis mouetur, alterum quiescit. 2. tametsi omnia puncta diametri, quæ sunt infinita, simul moueantur, inæqualiter tamen mouentur. 3. extremum diametri motum duobus motibus contrariis eodem tempore mouetur, vno naturali ad peripheriam, altero violento retrahente versus centrum. 4. terminus circuli, qui est vnica linea, latitudinis expers, est simul conuexus, & concauus, quæ duo contraria videntur. 5. eodem tempore ad contrarias loci differentias, nempe ante, & retro, sursum, & deorsum mouetur.

II.

Vbaldus negat primum mirabile circuli, quia quælibet pars diametri circulum describens mouetur, punctum autem immotum non est pars circuli: deinde, si diameter proportione cresceret & decresceret & stante altero extremo moueretur, describeretur ellipsis. Tertiò, spiralis linea altero semidiametri extremo manente, altero moto producitur: concluditque illud conuenire circulo, non quod vna semidiametri extremitas moueatur, alia stet, sed quia sua circulatione semper eandem seruat longitudinem. Præterea monet quartum θαυματον superficiei, ellipsi, hyperbolæ, parabolæ, spiræ, cyssoidi, conchoidi, & aliis infinitis curuis lineis conuenire. Denique negat quintum: qui enim per circuli circumferentiam ambularet, centrum semper haberet ad dextram, vel ad sinistram.

III.

III

His tamen nonobstantibus prædicta potiori aliquo iure circulo conueniunt; præter quæ vult Arist. radij circulum describentis duas lationes, nempe secundùm, & præter naturam, nullam habere rationem inter se, quæ vel numeris, vel lineis explicari queat; alioqui futurum esse, vt rectam describerent; sed eum Vbaldus arguit, cùm mixtus motus, qui nunquam proportione seruatâ fit, etiam ellipsim, & quamcumque aliam lineam, cuius nulla pars sit recta, describere possit: imò demonstrat circulum ex mixto motu produci posse, qui aliquam proportionem, sed non eandem seruet.

IV.

Quæcumque ferè in mechanicis mirabilia contingunt, oriuntur ex secunda proprietate circuli, quia quod mouetur in puncto à centro remotiori, velociùs illo mouetur quod ab eo distat minus, ita vt velocitas, & facilitas motus se habeat ad velocitatem, vt circumferentia ad circumferentiam, & diameter ad diametrum. Qua proprietate, quóve principio libra, vectis, & aliæ machinæ nituntur.

V.

Præter dicta, multæ proprietates admirandæ circulo conueniunt; primum enim vnica lineâ simplicî, vniformi, carente fine & principio, finitâ tamen, constat: licet illa linea non faciat angulum, ad eum tamen proximè accedit, imò dici potest πάγγωνος, & ἰσόγωνος. Hinc Benedictus vocat circulum, & sphæram figuras infinitorum angulorum rectorum; quem tamen numerum angulorum in circulo ait minorem esse duplo infinito per duo infinita angulorum contingentiæ, quæ duo infinita sunt minora quouis angulo acuto rectilineo: numerum autem angulorum rectorum solidorum sphæræ minorem esse quadruplo infinito per quatuor infinita angulorum solidorum contingentiæ: quæ quatuor infinita, minora sunt quouis angulo solido acuto terminato à tribus planis: negat autem circulum esse primam figuram, id enim triangulo conuenire ait, sicut pyramidi quadrilateræ, vt sit prima inter corpora, inter quæ sphæra est vltima, quemadmodum circulus est vltimus inter figuras. *Omitto alias circuli passiones, de quibus dictum est in Geometria.*

VI.

Rotundæ figuræ sunt reliquis mobiliores, quia planum quouis modo circumuolutæ in vno tantùm puncto tangunt, ideoque minùs atteruntur, & impediuntur, quia faciunt angulos contingentiæ omni acuto rectilineo minores; hinc ad motum procliuiores sunt, parum enim absunt à plano propter angustiam anguli: & vnica linea plano

perpendiculari ſolo hæret ; vnde quodlibet eo difficiliùs mouetur, quo pluribus punctis planum tangit, tot enim lineæ perpendiculares per mobile tranſeuntes illud cum plano vniunt, atque fulciunt, ne deiiciatur : quapropter figurarum planum pro vertice habentium ſtabiliſſima cubus dicitur, quamuis procliuior ſit ad volutationem quam tetraëdrum, aut pentaëdrum, quia cùm pluribus planis claudatur, magis ad ſphæram accedit : nam quo plura latera, pluresve angulos figuræ regulares habuerint, eo viciniores circulo, vel ſphæræ, ac proinde mouentiores erunt: quò verò mobilis latus contingens planum latius fuerit, eò difficiliùs mouebitur, imò ſi planum mobilis, & planum quod tangit, eſſent perfectè plana, mobile ſuperiùs apprehenſum à plano ſubiecto vix disiungi poſſet: hinc aiunt multi, aut parietem perfectè planum non poſſe tangi à cubo æneo ita emiſſo è bombarda, vt aliqua cubi ſuperficies rectà verſus parietem tendat, quantumuis bombarda parieti vicina, & quantacumque violentia exploſa fuerit : neque enim aër intermedius cedet : *verùm ea de re poſtea.*

VII.

Aliæ ſunt rationes, ob quas figura circularis mobilior eſt: 1. quia in omni poſitu dimidia ſui parte quoquouerſum ad planum acclinat; ideoque ſphæricum ad latus quacumque vi mouebitur, quæ aërem impulſu, vel tractu diuidere poterit : cùm vnicus aër circumſtans motum impediat. Hinc perpetua eſt circuli propenſio ad motum: quò verò circulus maior fuerit, tanto nutus eius, ſeu propenſio ad motum maior erit, quia extremitas diametri maioris remotior eſt à loco ſuo naturali, ad quem propterea magis conatur. eſt autem nutus, ſeu ῥοπὴ vis à Deo vnicuique rei impreſſa, qua in loco ſuo naturali quieſcit, & volenti ab eo diſpellere, reſiſtit ; quæ reſiſtentia dicitur ἀντίῤῥοπος. Cùm autem omnis circulus infinitos concentricos intra ſe contineat, omnis peripheria nutum habet infinitum, ac proinde perpetuum ad motum.

VIII.

Linea recta ab extremo ſemidiametri in diametrum perpendiculariter acta demonſtrat qualis ſit nutus ; nam quo maior eſt ſemidiameter, eo maior eſt prædicta linea, prædictúſque nutus; linea enim recta ducta à termino, à quo mobile mouetur, vſque ad terminum, in quo quieſcit, dicitur *linea nutus*; eademque in terminis contrariis, *linea renixus*: illas verò ſecans linea ad angulos inæquales, dicitur *linea obliqui nutus*, vel *renixus*: ſecans autem ad rectos, nec eſt ad nutum nec ad renixum. Angulus autem ad angulum nutare dicitur, cùm in angu-

lorum æqualitate crurum est inæqualitas. Ex illo autem perpetuo nutu fit vt cùm globum volumus, eum iam veluti proprio nutu se mouentem moueamus; nam post motum ad centrum vniuersi, maximè circularem desiderat: & linea perpendicularis ducta à puncto contactus ad diametrum globi demonstrat eum esse in æquilibrio; quælibet autem vis duo pondera æquilibria ab hoc statu æquilibri dimouere potest.

IX.

Quo circuli maiores, eo mouentiores ob rationes prædictas; & quia eorum anguli contingentiæ minores sunt: vnde quò rotæ curruum sunt maiores, eò ad celeritatem, & motus facilitatem commodiores: Quò etiam sarcina est altior, faciliùs trahitur ab equo, quàm vbi depressior est, quia tunc non nihil ferenda & non solùm trahenda: modo tamen non adeò sit alta, vt iugum ex collo præ pondere posteriore trahat: cum autem onus simul trahendum, & sustinendum est, vt in bellicis tormentis, vnus equus iugum sustinere, alij loris trahere debent. Hinc explicari potest cur binæ rotæ quaternis faciliores sint: cur prioribus posteriores rotas maiores esse oporteat; quare sarcina in anteriore plaustri parte poni debeat, &c. quæ ex dictis, vel ex dicendis concludi possunt.

X.

Quando duo vel plures circuli ita firmiter eidem axi iunguntur, & circa eum conuoluuntur, vt minores tantùm ad maioris motum, vel maior ad minorum motum moueantur, minor motu maioris lineam eiusdem longitudinis suâ circumferentia describit, cuius est linea à circumferentia maioris descripta, etiamsi maioris circuli diameter millecupla esset diametri minoris: si verò maior circulus ad motum minoris feratur circa axem, linea descripta à maiori ad breuitatem lineæ descriptæ à minori redigetur. Quod quidem mirabile esse videtur, cùm vtrique planum subiectum in toto motu tangant, neque vllam partem plani pars vlla circumferentiæ bis tangat, aut transiliat. Vnde sequi videtur circulum quemlibet maximum æqualem videri circulo quantumlibet minimo, & contra, cùm vterque maior, & minor sint æquales vni tertio, nempe lineæ rectæ ab vtroque descriptæ.

XI.

Ratio cur circuli adeò inæquales eandem lineam describant, ex eo sumenda est, quod minor, aut maior, non proprio motu, sed violento alterius moueatur: circulus enim ab alio motus extenditur, & applicatur secundùm extensionem mouentis, adeo vt motus minoris, ra-

factioni; maioris verò, condensationi comparari possit: maioris autem condensationem cum luce in vnicum à speculo parabolico punctum coacta conferunt. Itaque cessabit admiratio si consideremus minorem non exercere motum suum, cùm transfertur à maiori; hinc fit vt aliqui negent centrum maioris esse centrum minoris, quod nempe feratur, cùm tamen centrum maioris agat, & moueatur.

XII.

Cùm minor circulus motu maioris circumuolutus spatio maioris æquale spatium conficit, tarditas minoris raritati, maiorisque velocitas densitati comparatur, adeò vt quod est in tempore successiuo tarditas, in loco permanente raritas, & quod in illo celeritas, in isto densitas esse videatur: quemadmodum enim densitas partes quantitatis permanentis, ita celeritas partes quantitatis successiuæ comprimit: & sicut celeritas, aut tarditas motus, ita densitas & raritas corporis semper maior fieri potest; motus enim qui fit à digito spatio vnius minuti horæ, ita tardus esse potest, vt tot annorum duret milliones, quot arenas firmamentum continere potest: hinc motus firmamenti, qui factus est à principio mundi vsque ad annum 1644. ab Oriente in Occidentem, totus fieri potest durante vnico horæ minuto: Granum etiam sinapis ita rarefieri, vt totum firmamentum compleat, & totus mundus ita condensari, vt in grano sinapis concludatur.

XIII.

Rotundorum motus sex species assignantur; nam sphæricum per se, vel ab alio mouetur; *per se*, vt cœlum, cuius nulla pars primò moueri dicitur: *ab alio*, cùm pars aliqua primò mouetur, idque vel progrediente axe, vel manente: *progrediente*, cùm motus incipit à circumferentia, vt in rota super planum volutata: vel cùm incipit ab axe, vt in rota per axem currus circumducta. *Manente* verò, vel axe moto in suo loco, vel immoto: *moto*, vel cum motus incipit à circumferentia, vt in succula per collopes versa; vel cum incipit ab axe, vt in mola, qua acuuntur gladij. *Immoto*, vt in trochlea, cuius vertentis per funes motus incipit à circumferentia, sed axe penitus immoto. Deinceps verò de trochleis, succulis, & aliis machinis agendum est.

QVARTA PARS.

DE TROCHLEIS.

PROPOSITIONES.

I.

TRochlea est instrumentum tractorium ex rotula circa axiculum fixum alicubi appensum per funem ductarium in eius circumferentia circumuoluta, quæ pro libito multiplicatur, vt fiat trispaston, pentespaston, polyspaston, &c. in quibus rotulæ sibi inuicem seruientes onus attrahendum ita diuidunt, vt facillimè attrahatur. Simplex autem trochlea, qualis est ea, qua haurimus aquam ex puteis, nullam vim mouenti addit, sed tantùm impedimenta tollit.

II.

Trochlea reduci potest ad vectem, cuius fulcimentum, seu hypomochlion est in medio, à quo cùm pondus, & potentia in extremitatibus funis circumducti æquidistant, sunt in æquilibrio, cùm sit eadem proportio ponderis ad potentiam, quæ distantiæ ad distantiam: diameter autem rotulæ motæ vectis euadit. Id autem ita Guid. Vbaldus concepit. Si funis trochleæ supernè appensæ orbiculo circumducatur, alterúmque eius extremum ponderi alligetur, altero interim à potentia pondus sustinente apprehenso; erit potentia ponderi æqualis. Vnde constat iterum idem pondus ab eadem potentia absque trochleæ auxilio sustineri posse.

III.

Si funis orbiculo trochleæ ponderi alligatæ circumducatur, altero eius extremo alicubi religato, altero verò à potentia pondus sustinente apprehenso; erit potentia ponderis subdupla. Vnde sequitur pondus hoc modo à minori in subdupla proportione potentiâ sustineri, quàm sine vllo huiusmodi trochleæ auxilio.

IV.

Si vtrisque duarum trochlearum singulis orbiculis, quarum altera supernè, altera verò infernè constituta, ponderíque alligata fuerit, circumducatur funis, altero eius extremo alicubi religato, altero verò à potentia pondus sustinente detento; erit potentia ponderis subdupla.

Si funis circa plures reuoluatur orbiculos, altero eius extremo alicubi religato, altero autem à potentia pondus mouente detento: potentia vectibus horizonti ſemper æquidiſtantibus mouebit. Iiſdem poſitis, ſpatium potentiæ duplum eſt ſpatij ponderis. Præterea potentia idem pondus in æquali tempore per dimidium ſpatium mouebit fune circa duos orbiculos reuoluto, quorum vnus ſit trochleæ ſuperioris, alter verò ſit trochleæ ponderi alligatæ; quàm ſine trochleis, dummodo ipſius potentiæ lationes ſint æqualiter veloces.

XI.

Fune circa ſingulos duarum trochlearum orbiculos, quarum altera ſupernè, altera verò infernè, ponderique alligata fuerit, reuoluto: altero etiam eius extremo inferiori trochleæ religato, altero autem à mouente potentia detento: erit decurſum trahentis potentiæ ſpatium, moti ponderis ſpatij triplum. Vnde tempus iſtius motus cognoſcitur, eadem enim potentia in æquali tempore, ſpatio ſecundùm triplum ampliori ſine huiuſmodi trochleis idem pondus mouebit, quàm cum eiſdem hoc modo accommodatis. Spatium ponderis ſine trochleis moti æquale eſt ſpatio potentiæ: qua ratione in omnibus tempus inueniemus.

XII.

Fune circa tres duarum trochlearum orbiculos, quarum altera ſupernè vnico dumtaxat, altera infernè, duobus autem inſignita orbiculis, ponderique alligata fuerit, reuoluto: altero eius extremo alicubi religato, altero autem à potentia pondus mouente detento: erit decurſum trahentis potentiæ ſpatium moti ponderis ſpatij quadruplum. Hinc patet ita ſe habere pondus ad potentiam ipſum ſuſtinentem, vt ſpatium potentiæ mouentis ad ſpatium ponderis moti. Deinde orbiculos trochleæ ponderi alligatæ efficere, vt à moto pondere minus, quàm à trahente potentia deſcribatur ſpatium: maiorique tempore datum æquale ſpatium deſcribi, quam ſine illis. Quod quidem orbiculi trochleæ ſuperioris non efficiunt.

XIII.

Si funis orbiculo trochleæ à potentia ſurſum detentæ fuerit circumuolutus: altero eius extremo alicubi religato, alteri verò pondere appenſo, dupla erit ponderis potentia. Quibus poſitis mouebit hæc eadem vecte horizonti ſemper æquidiſtante, per 14 prop. Guid. Vbaldi: & ſpatium ponderis moti duplum erit ſpatij potentiæ mouentis. Vnde ſequitur, idem pondus trahi ab eadem potentia in æquali tempore per duplum ſpatium trochleâ hoc modo accommodata, quàm ſine trochlea: dummodo ipſius potentiæ lationes in velocitate

sint æquales. Spatium enim ponderis moti sine trochlea æquale est spatio potentiæ.

XIV.

Si vtriusque duarum trochlearum singulis orbiculis, quarum vna supernè à potentia sustineatur, altera vero infernè, ibique affixa, constituta fuerit, funis circumducatur: altero eius extremo superiori trochleæ religato, alteri vero pondere appenso: tripla erit ponderis potentia. Et spatium ponderis moti triplum erit spatij potentiæ motæ.

XV.

Si vtriusque duarum trochlearum binis orbiculis, quarum alterna supernè à potentia sustineatur, altera vero infernè, ibique annexa, collocata fuerit, funis circumducatur: altero eius extremo alicubi, non autem superiori trochleæ religato, alteri vero pondere appenso: quadrupla erit ponderis potentia: & spatium ponderis moti quadruplum erit spatij potentiæ: & sic in infinitum omnis potentiæ ad pondus multiplex proportio inueniri poterit, ostendeturque semper ita esse pondus ad potentiam ipsum sustinentem, sicuti spatium potentiæ, pondus mouentis, ad spatium ponderis moti.

XVI.

Vectium ipsorum orbiculorum motus ita fit, vt vectes orbiculorum trochleæ superioris moueantur, id est, habeant fulcimentum in extremitate, potentiam in medio; & pondus in altera extremitate appensum: vectes verò trochleæ inferioris habent fulcimentum in medio, pondus, & potentiam in extremitatibus. Hinc constat orbiculos trochleæ superioris efficere, vt pondus moueatur maiori potentia, quàm sit ipsum pondus, & per maius spatium potentiæ spatio, & per æquale, tempore minori: quod quidem orbiculi trochleæ inferioris non efficiunt.

XVII.

Si vtriusque duarum trochlearum singulis orbiculis, quarum altera supernè appensa, altera verò infernè, à sustinente potentia retenta fuerit, funis circumuoluatur: altero eius extremo alicubi religato, alteri autem pondere appenso; dupla erit ponderis potentia. Vnde patet orbiculos trochleæ inferioris in his efficere vt pondus maiori potentia moueatur, quàm sit ipsum pondus, & per maius spatium spatio potentiæ, & minori tempore per æquale: quod quidem orbiculi superioris trochleæ non efficiunt.

XVIII.

Si vtriusque duarum trochlearum singulis orbiculis, quarum altera supernè

supernè à potentia sustineatur, altera verò inferne, ponderique alligata, constituta fuerit, funis reuoluatur: altero verò inferiori trochleæ religato: pondus potentiæ, sicut & spatium potentiæ spatij ponderis, sesquialterum erit.

XIX.

Si tribus duarum trochlearum orbiculis, quarum altera vnius tantùm orbiculi superne potentia sustineatur, altera verò duorum inferne, ponderique alligata, collocata fuerit, funis circumuoluatur: altero eius extremo alicubi, altero autem superiori trochleæ religato. pondus potentiæ sesquitertium erit, sicut & spatij ponderis.

XX.

Si vtriusque duarum trochlearum singulis orbiculis quarum altera supernè à potentia sustineatur, altera verò inferne, ponderique alligata collocata fuerit, circumducatur funis: altero eius extremo alicubi, altero autem superiori trochleæ religato, erit potentia ponderis sesquialtera, sicut & spatium ponderis spatij potentiæ sesquialterum: & sic procedendo in infinitum semper ostendemus potentiam pondus sustinentem ita esse ad pondus, vt spatium ponderis ad spatium potentiæ pondus mouentis.

XXI.

Si vtriusque duarum trochlearum singulis orbiculis, quarum altera superne à potentia sustineatur, altera vero inferne, ponderique alligata, constituta fuerit, circumferatur funis, vtroque eius extremo alicubi, non autem trochleis religato: æqualis erit ponderi potentia.

XXII.

Si tribus duarum trochlearum orbiculis, quarum altera vnius dumtaxat orbiculi superne à potentia sustineatur, altera verò duorum inferne, ponderique alligata fuerit constituta, circumdetur funis: vtroque eius extremo alicubi, sed non superiori trochleæ religato: duplum erit pondus potentiæ: spatiumque potentiæ duplum erit spatiis ponderis.

XXIII.

Si tribus duarum trochlearum orbiculis quarum altera binis insignita rotulis à potentia superne detineatur: altera vero vnius tantum rotulæ inferne constituta, ac ponderi alligata fuerit, circumuoluatur funis: vtroque eius extremo alicubi, non autem inferiori trochleæ religato: dupla erit ponderis potentia. Videatur Vbaldus, qui prop. 26. problematicâ modum ostendit, quo reperiatur proportio superpartiens, multiplex superparticularis, & multiplex superpartiens, quam habet pondus ad potentiam pondus sustinentem, ita vt pluribus

funibus, & trochleis superioribus tantùm, vel superioribus vti possimus. Sed & quæcunque alia proportio infinitis modis inueniri poteſt, cum omnis ex infinitis proportionibus componi possit, vt ostendit Eutocius in 4. prop. lib. 2. Archim. de sphæra, & cylindro. In his autem maiorem semper proportionem habebit spatium potentiæ mouentis ad spatium ponderis moti, quàm pondus ad eandem potentiam.

XXIV.

Ex his omnibus sequitur datum pondus à data potentia trochleis, sicut & vectibus moueri posse, idque per data spatia sibi inuicem longitudine commensurabilia: & quamlibet datam in numeris proportionem inter pondus, & potentiam: ac inter spatium ponderis moti, & spatium potentiæ motæ, infinitis modis trochleis inueniri posse. Denique quò pondus facilius mouetur, eo quoque tempus maius esse: quò verò difficilius, eo minus esse: & è conuerso.

XXV.

Non est simpliciter verum quod ait Aristoteles q. 9. nempe ea celerius, & facilius moueri, quæ maioribus trochleis, & scytalis mouentur; nam quando funis vni trochleæ siue maiori siue minori circumducitur, si in duobus extremis chordæ æqualia pondera suspendantur, erunt in æquilibrio, quod æquali superaddito pondere æque tolletur in minori, ac in maiori trochlea: brachia enim bifariam diuiduntur, & in vtrisque eadem est brachiorum proportio, & eadem ponderum ratio. Verum autem erit dictum Aristotelis, quando trochlea maior maiorem habet rationem ad suum axem, quam minor ad suum. Vnde patet trochleam illam facillimè pondus trahere, quæ cum maxima sit, minimum axem habet, cumque axungiâ perfusum.

XXVI.

Quò longitudo manubrij rotæ maiorem habet proportionem ad axis semidiametrũ, eo facilius mouet. Reducitur autem ad illud vectis genus, in quo fulcimentum est inter pondus, & potentiam: nihil autem refert vtrum rotæ lateri vel axi manubrium affigatur, vel rectis, aut curuis partibus constet. Quamuis autem rota grauior ob maiorem resistentiam difficilius moueatur, licet æqualis sit magnitudinis, tardius tamen cessat à motu, quia impetum impressum diutius retinet; vt contingit in proiecto lapide cum palea comparato. Alia vero quæ ad scytalas, & alias machinas attinent, in sequentibus explicabuntur.

QVINTA PARS.

DE SCYTALIS, ERGATIS, AXE in peritrochio, tollenone, cochlea, pancratio, &c.

PArum differunt ſcytalæ, ergatæ, & axis in perittochio, cum circa illorum axem funis ductarius voluatur; ergata tamen, ſeu στγὸν axem horizonti perpendicularem habere, vel duabus trabibus perpendiculariter erectis fulciri dicitur; ſucculaverò, Græcis ὄνος ſupinum axem habet, vel quatuor tignis ex vtraque parte binis ſuſtentatur: de qua loquitur Hippocrates lib. 3. de fracturis. Cæterum hæc omnia ad vectem reduci conſtat ex ſequentibus propoſitionibus. Aduertendum eſt autem ſucculas pro collopibus à quibuſdam ſumi, quibus ergatæ, vel axes mouentur, ſed nos vitandæ confuſionis gratiâ illa duo nomina ſemper diſtinguemus.

PROPOSITIONES.

I.

RAtio cur maiores collopes circa eandem ergatam facilius moueantur, vel ſaltem maiora pondera moueant, ex eo petenda, quod maiores lineæ ex centro celerius moueantur ab eadem vi, collopes autem, quibus ergatæ, & ſucculæ voluuntur, linearum & vectium rationem habent; centrum vero eſt in medio axis. Vnde fit etiam vt ſucculæ graciliores facilius moueantur, quia collopes ſunt tanto maiores, quanto ſuccula gracilior fuerit.

II.

Omiſsâ ſcytalâ Laconicâ apud Lacedæmonios in litteris ſcribendis vſurpata, quæ fuit lignum teres oblongum, inſtar cylindri, circa quod chartam exaratam ſpiratim circumuoluebant, ad ſcytalas vectorias accedo, quibus onera facilius quam curribus portantur, quamuis illæ minores rotas habeant, hæ ſiquidem rotæ ſcytalis coniunguntur, atque adeo ſimul conuertuntur: hinc in ſcytalis nulla eſt offenſatio, neque huc illuc nutant, vt rotæ curruum quæ ab axe

ſciunctæ ſunt: & ab ipſo onere iam commoto, ſupra, & ſimul à potentia mouentur. His autem ſucculis ſiue rotatis, ſiue non, architecti, lapicidæ, & alij artifices ſæpiſſimè vtuntur, cum lapides, naues, trabes, aut alia quæpiam grauiſſima pondera per horizontis planum transferunt; cùm enim centra ſcytalarum ab horizontis plano æqualiter diſtant, pondus æquidiſtanter horizonti mouetur, & ideo centrum grauitatis illius nuſquam in motu qui fit, eleuatur. In his vero tarditatem motus, qui in eo tardior, quo vectes, vel collopes longiores, mouendi facilitas abunde compenſat.

III.

Potentia pondus ſuſtinens axe in peritrochio ad pondus eandem habet proportionem, quam ſemidiameter axis ad ſemidiametrum tympani, vnà cum collope. Hinc fit vt potentia ſemper minor ſit pondere, cum ſemidiameter axis ſemper minor ſit ſemidiametro tympani: & potentia eo minor ſit pondere, quo ſemidiameter axis minor eſt ſemidiametro tympani vnà cum collope. Inde vero concluditur ita eſſe pondus ad potentiam pondus ſuſtinentem, vt ſpatium potentiæ mouentis ad ſpatium ponderis moti; maiorémque ſemper habere proportionem ſpatium potentiæ mouentis ad ſpatium ponderis moti, quàm pondus ad eandem potentiam. At quo facilius pondus mouetur, eo quoque tempus maius eſt; & quo difficilius, eo minus: & è conuerſo.

IV.

Paruo cuneo valida fit impreſſio, magnæque finduntur moles: qui reducitur ad vectes, quorum hypomochlion eſt in extremo apice cunei, pondus vero intra vectem, ea videlicet ligni pars, quæ à cuneo vrgetur, ac diuellitur, cuneo autem valida mallei percuſſio vires addit: hinc fit vt cunei virtus partim ex duplici vecte, partim ex mallei percuſſione conſtet: quanquam illum ita conſiderare poſſimus, vt dum ingreditur, id quod ſcinditur, nihil aliud ſit quàm pondus ſupra planum horizonti inclinatum mouere: ideoque ad libram reduci poteſt; eadem eſt enim ratio, ſiue manente cuneo, vt pondus ſuper cunei latus moueatur, ſiue eodem etiam moto, pondus adhuc ſuper ipſius latus moueatur, tanquam ſuper planum horizonti inclinatum.

V.

Quò minor eſt cunei angulus ad verticem, hoc eſt, quo cuneus acutior eſt, quò malleus eſt grauior, & durior: quò maius eſt manubrium mallei, quo vtimur, vt cuneum percutiamus, eo maior eſt effectus; & quidem tantus vt à nullo alio vecte, aut vllâ cochleâ ſuppleri poſſit. Húcque enſes, gladij, mucrones, ſecures, ſerra, cuius dentes inſtar cunei percutiunt, dolabra, & lima, quorum tot cunei,

quot denticuli: necnon venenatorum, & aliorum animalium mordentium, & omnium instrumentorum vulnera inferentium dentes, stimuli, & acumina referri possunt. *Quanquam id alij de serra, & lima negant, quod alibi fortè discutiemus.*

VI.

Duplicem cuneorum speciem, linearem & superficialem Baldus statuit; linearis complectitur acus, subulas, clauos, enses, aculeatam culicis proboscidem; apum, vesparum, scorpionum culeos, &c. quæ quanto magis ad imaginariæ lineæ subtilitatem accedunt, tanto magis, & faciliùs penetrant. Hæc autem cuneorum species, siue angularis, siue rotunda fuerit, adeo subtilis esse, & tanta celeritate cutem, imo forte totum corpus penetrare potest, vix vt sentiatur.

VII.

Superficialis cuneorum species acie in lineam superficiei terminum desinens continet cultra, enses, secures, scalpra lata, &c. quorum illa validissime scindunt, quæ maxime ad superficiei naturam accedunt: hinc dentes anteriores superficiem magis imitantur, quia scindere debent; cum dentes canini ad linearem cuneum magis accidere videantur, vt meliùs perforent: molares enim contundunt.

VIII.

In actu scissionis cuneo factæ, rei scissæ partes vt vectes considerari possunt, quorum fulcimenta erunt in superficie partium externarum, fere è directo verticis cunei: potentiæ erunt in extremitatibus partium fissarum cuneum contingentibus: pondus vero materiæ resistentia in loco separationis: in ipsa vero scissione fulcimentum, ac portio assidue mutatur, ita tamen vt progrediente scissione posterior priori semper facilior euadat, quod non solùm materiarij in primis, & sequentibus ictibus securiculæ, sed etiam in baculorum fissione, quæ fit diductis manibus, singuli experiuntur: quia vectis inter pondus, & potentiam semper maior efficitur.

IX.

Celonium, seu tolleno, quo aqua hauritur, pondere in alteram partem prægrauante, ad vectem reducitur, trabis enim seu tigni erecti axiculus est hypomochlion; hasta transuersa, vectis: pondus, hydria, situla, vel aliud vas, quo hauritur aqua, vnà cum fune sustinente: denique potentia est onus, quod in altera parte hastæ positum vnà cum manu vectem ita premit, vt situlam prius immersam eleuet.

X.

Quemadmodum cuneus est vectis multiplicatus, ita cochlea est vectis continuatus cylindro circumuolutus helicis instar, percussionis

quidem expers, sed per vectem cylindri axi annexum versus faciens motionem magnorum ponderum, siue impellendo, siue attrahendo, siue attollendo, prout cylindrus cochleæ positus erit ad planum horizontis cum, vel absque sua matrice. Helices autem cochleæ sunt latus, cunei reuolutum circa cylindrum.

XI.

Illa cochlea dicitur infinita, quæ tympanum iunctum habet, cuius dentes cochleæ helicibus ita accommodantur, vt dum circumuertuntur, semper eodem modo sese habeant; quæ tametsi duo incommoda habere dicatur; nempe quod obliquè trahat, & quod in ea pro ponderis varia ratione non possit diminui mora temporis, duo tamen habet maxima commoda, tantum enim vnica lineâ spirali potest, quantum alia instrumenta cum pluribus rotis coniunctis: deinde absque vllo fulcro, seu retinaculo in quacumque parte quiescere potest absque eo quod pondus recidat.

XII.

Quo plures sunt helices, & quo obliquiores, quoue longiora fuerint manubria, eò pondus faciliùs, quamuis tardiùs mouebitur. Quò verò plures erunt matricis cochleæ helices, eo minus in pondere mouendo cochlea patietur: nam cùm vnicam habet helicem, totum pondus à sola cochleæ sustinebitur helice: cum verò plures habet, in totidem cochleæ helices ponderis grauitas distribuetur; vt si 20 helices fuerint, vnaquæque helix vigesimam totius ponderis portionem sustinebit.

XIII.

Ex dictis omnium instrumentorum vim determinare possumus: exempli gratiâ detur prælum vinarium, cuius cochlea suas helices habeat à se inuicem latitudine pollicis distantes; vectis autem à centro cochleæ, seu cylindri helicibus circumdati ad manum prementis septem pedes habeat, ita vt integra vectis circumuolutio 22. pedibus, seu 264. pollicibus constet; dico vim præli tantam esse, quanta ponderis 13200 librarum, quibus racemi, oleæ, vel alia prælo subdita perpendiculariter prementur, dummodo hominis vectem circumducentis potentia 50 librarum fuerit, idque eodem tempore quo cochlea vnius pollicis latitudine deprimetur: nam vectis circumuolutio per vim hominis multiplicata, prædictum 13200 librarum pondus tribuit. Idem verò continget, si portio vectis inter hypomochlion & pondus vnicam partem, portio verò inter hypomochlion, & potentiam 50 libris æquiualentem 264 partes prædictæ æquales habeat: potentia enim pondus 13200 librarum attollet; vel in æquilibrio sustinebit. Hinc etiam reliquorum prælorum, nec non forcipum helices haben-

tium, quibus fabri ferrarij, typographi, & alij artifices vtuntur, vis concludi potest, dummodo detur potentia, in quibus videlicet, vt in prælo, & in vecte progrediendum est.

XIV.

Audax illa Archimedis propositio, δός μοι ποῦ στῶ, καὶ κινῶ τὴν γῆν, & alia similis, τῷ δοθείσῃ δυνάμει τὸ δοθὲν βάρος κινῆσαι, pluribus instrumentis soluitur, maximè tamen Charistio, & Pancratio, quod 30 orbiculis, axiculisq; conflatum, cuius maximus asteriscus minimi sit decuplus; manubrij vero flexura maximi asterisci semidiametro, & succula minimo asterisco æqualis; pondus enim ab hac succula ad alterum sibi æquilibre è manubrio suppensum erit in ratione 1000000000000000000000000000000 ad 1. Hinc positâ perimetro minimi asterisci pedis vnius, tympani perimeter per cuius centrum inductus est axis perimetri pedalis, manubrio æquepotens totidem esset pedum quot vnitates præcedens numerus complectitur.

X V.

Si quis pusio paulo efficacius quam sit vnius libræ pondus Pancratij manubrium infimo asterisco affixum versauerit, summo axe, qui ne quidem semel in die circumducetur, funem absoluet 100000000000000000000000000000000 libras ducentem, quæ vniuersæ terræ molem quater millies suo pondere superant. Iam verò pondus terræ iusto maius, nempe 24000000000000000000000000 librarum esse supponamus, nec non hominem singulis manubrij versuris centum libras tres pedes sublimè attollere, horisque singulis 4000 versationes cõficere, idque iugi decem annorum motu, annis singulis 365 diebus definitis, terra, isto temporis spatio $\frac{10512}{240000000000000000000}$ vnius pedis è sua sede mouebitur. Quæ tametsi non possint à nobis in praxim redigi, ostendunt tamen quanta sit Mechanicæ potentia. Hinc concludi potest qua ratione ita rotæ disponi possint, vt suopte veluti nutu spatium ambitu terreno millies maius conficiant.

X VI.

In prædictis, & aliis quibuscumque machinis maior est mouendi difficultas, quàm absque illis: licet enim augeant potentiam, moram temporis ita producunt, vt quod vnus homo spatio centum dierum, vel annorum beneficio machinæ facit, idem absque machina centum homines vno die, vel anno facturi sint: quibus præter æqualitatem virium, instrumentorum pondus, & mouendi difficultas addenda sunt. Exempli gratiâ, si fiant sex rotæ, quarum vnaquæque nonaginta sex dentes habeat, eisque sex axiculi, quos Galli vocant *pi-*

guens, accommodentur, quorum vnusquisque octo denticulos habeat, primus primæ rotæ denticulus duodecies voluetur, quandiu rota hæc vnicum circuitum efficiet: secundus vero axiculus duodecies duodecim hoc est 144; tertius duodecies 144, & sic deinceps vsque ad sextum, qui durante vnico primæ rotæ circuitu, voluetur 2985984. Quapropter si quis quotidie spatio 298½ dierum manubrium mille decies circumagat, prima rota vnicum circuitum peraget: pondus verò libræ vnius in axe manubrii suspensum æqueponderabit 2985984 libris ab axe primæ rotæ suspensis. Quot autẽ nouæ rotæ cum axiculis addentur, toties vis, mora temporis, & manubrij celeritas ex æquo, hoc est duodecies multiplicabuntur, quarum proinde vnaquæque centuplo, vel millecuplo vim, & celeritatem multiplicatura est, si axiculus centies, millies circumagitur, vt prima rota vnicum circuitum conficiat.

XVII.

Facile est definire quid aëris, & aquæ rarefactione, quidve metu vacui in machinis pneumaticis, & hydraulicis fieri possit, si supponamus quamlibet aëris, aquæ, & alterius liquoris partem in infinitum augeri posse per rarefactionem, & minui per condensationem. Hinc enim ea soluentur quæ vi pulueris pyrij in tormentis bellicis, in cucurbitis, lagenis, & doliis liquore plenis, & in aliis instrumẽtis fiũt, vt thermoscopiis, &c. de quibus fusè satis in Hydraulico Pneumaticis, quibus puto me spei quam ad huius 2. Libri Mechanicorum calcem primâ editione synopseos inieceram, vtcumque satisfecisse: & quibus Hydrostaticam subieci, ne quis hic illam quærat, vt in editione prima, in qua fecerat tertium librum Mechanicorum.

MONITVM.

Lectoribus innotescet duos prædictos mechanicorum libros plurima complecti quæ desunt nostris Phænomenis mechanicis, hosque tractatus sibi inuicem succenturiare, vt quod vni desit, in altero reperiatur, vel quod in vno fuerit breuius, vel obscurius, in altero fusiùs & clariùs habeatur. Sequuntur vero qui præcesserant in prima editione Opticorum libri, vt ex luce corporeâ, quâ nil gratius esse videtur, ad mentis lumen, æternæque gloriæ splendorem transferamur, iuxta Psaltis desiderium, Psal. 35. *In lumine tuo videbimus lumen.*



IN LIBROS OPTICORVM, PRÆFATIO AD LECTOREM.



VM Opticæ ſcientiæ hoc ſæculo magnos progreſſus feciſſe videatur ob peculiare conicorum ſtudium, & lucis varias obſeruationes & meditationes, quædam ante ſequentium librorum lectionem obſeruanda ſunt.

I. Legendam eſſe 24 propoſ. Balliſticæ, quæ nouas lucis, & luminis ideas præbet; & illuſtris viri Dioptricam, in qua fusè de lumine.

II. Nonnulla ex iis quæ dicta ſunt à nobis in Geneſim, à columna 497. emendanda eſſe; nempe cùm dicitur, *Sphæricum ſpeculum eſſe partem, ſegmentum, aut arcum alicuius circuli*, rectiùs ſcribi eſſe ſphæræ partem, vel ſegmentum, cuius (plano per axem ſecto) communis ſectio circulus eſt, quales ſunt adſcripti eo loco circuli. Deinde non benè dicitur, ſpeculum, ſpeculo maius, minuſue eſſe, ſi maioris, minoriſue circuli (ſcribe ſphæræ) portio fuerit; cùm ſpeculum dici maius debeat, cuius amplior ſpecies reflexiua: minor vero, cuius arctior, licet hoc maioris, illud minoris ſphæræ portione conſtet, non enim hîc diametri quantitas, ſed chordæ arcum circuli communis vtriuſque ſuperficiei ſectionis ſubtendentis attenditur. Tertio, pro verbis ſequentibus, *duplici modo centrum ſpeculorum ſumi poſſe, tum quo centrum ſphæræ notatur, tum quo centrum ſuperficiei, ſeu media ſuperficies, aut medium in ea punctum ſumitur*, meliùs centrum ſpeculi centro ſphæræ, cuius pars extet ſpeculum: illud autem mediæ ſuperficiei ſpeculi punctum, non centrum, ſed ſpeculi verticem appellabis. Quarto, quæ dicitur ibidem ſpeculi diameter, rectiùs circuli communis ſectionis vtriuſque ſuperficiei chorda vocabitur; cùm ea quæ non eſt centro

bisecta, diameter appellanda sit. Quinto, columna 500. pro *huiusmodi speculi diametrum*, scribe, speculorum basis diametrum. Pro *diametri partem*, lege, *axis partem*, & *ab eadem axis parte*, deinde *speculi basis diametrum*, & *diametralem speculi basis longitudinem*, & *proposita qualibet basis diameter*, legendum est.

Col. 501. l. 22. pro hemisphærium integrum vix sesquiunciali in idolis multiplicandis profuturum, scribe præstaturum; neque illud simpliciter intelligas, cùm maior sphæræ portio minori in multiplicandis simpliciter idolis præstet, quoniam à pluribus punctis fit tam directa, & immediata, quàm secundaria reflexio, à paucis hactenus in speculis concauis notata: quæ plurium imaginum repræsentatio simplex magis ludicra videtur, quàm seria; quemadmodum maior imaginum numerus ab hemisphærio, non tam imagines, quàm imaginationes; idque tantùm ab exiguis obiectis: quare minor maioris sphæræ portio maiori minoris sphæræ portioni datæ futuri speculi præferenda.

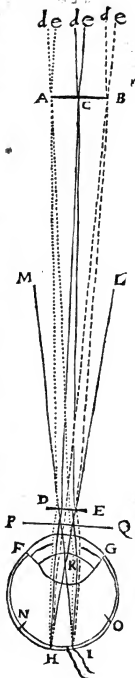
Colum. 516. l. 7. dele quæ post dictionem, *afferemus*, sequuntur vsque ad dictionem *quia*. quod non egerim de dioptrica in prolegomenis, vti decreueram ad ostendendum omnes scientias ad Scripturam sacram intelligendam vtiles; quod postea satis, l. 2. de Veritate Scientiarum Gallicè factum est.

III. Quod ad tertium librum optices, seu dioptricem attinet, notandum est Cl. V. Renatum Cartesium suam edidisse Dioptricam, qua veram refractionum legem, rationem & regulam adeo luculenter explicauit, vt iam radios lucis in quamuis figuram mutare, vel à quibuslibet punctis ad alia quæuis puncta transmittere possis: quod fatebere statim atque librum illius attente perlegeris: ex quo varios perspiciliorum fabricandorum modos addisces, quamuis hactenus hyperbola nulli fauerit nulliusque votis illa constructio satisfecerit: forte quod nonnulla ex oculi parte supplenda sint quæ negligi soleant.

IV. Placet eadem addere quæ sequuntur ex Cl. V. Hobs circa quartam Dioptricæ partem, in qua de tubis Batauicis, qui melius intelligentur ex iis quæ profert.

Sit igitur vitrum conuexum A C B, à cuius tanta distantia constituatur aliquod obiectum, vt rectæ A B magnitudo ad magnitudinem distantiæ obiecti non habeat rationem sensibilem. Ductæ autem duæ rectæ à duabus obiecti extremitatibus ad singula puncta vitri A B, faciant angulos D A E, D C E, D B E; & similiter fieri supponatur ad cætera omnia puncta quæ sumi possunt inter A & B. Producantur

iam *d* A, *e* A, quæ ſe mutuo ſecant in A, & *d* C, *e* C, quæ ſe mutuò interſecat in C, & *d* B, *e* B, quæ ſe mutuo ſecant in B; producantur, inquam, omnes vſq; ad vitrum parallela, vel non valde obliqua: quo facto manifeſtum eſt productas omnes eſſe refractas, & binas binis propius accedere, prout propius accedunt ad vitrum concauum. Lineæ autem refractæ tranſeuntes per A notatæ ſunt punctulis: quæ vero tranſeunt per B, notatæ ſunt linearum fragmentis; & quæ tranſeunt per C, lineis continuis.



Sit iam oculus F G, & ſupponamus talem eſſe figuram vitri concaui, & talem eius eſſe ſitum, tam reſpectu vitri conuexi, quàm oculi, vt omnes lineæ venientes ab *e*, ab ipſo ita refringantur ad ſuperficiem oculi, vt refractæ rurſus ab ipſo oculo, prout naturæ oculi poſtulat, concurrant omnes in fundo oculi ad vnum & idem punctum H.

Item omnes lineæ venientes à *d*, ita refringantur, vt concurrant omnes in fundo oculi ad punctum I. Quod ſi fiat, videbitur *d* in linea recta, quæ ducitur ab I parallela parti lineæ *d* A I, vel *d* C I, vel *d* B I, quæ intercipitur inter vitrum concauum, & oculi ſuperficiem; videbitur autem *e* in linea recta quæ producitur ab H parallela parti lineæ *e* A H, vel *e* C H, vel *e* B H, quæ intercipitur inter vitrum concauum, & ſuperficiem oculi; itavt lineæ viſuales extremorum punctorum obiecti ſint rectæ H L, & I M, atque ita fiet vt toties multiplicata ſit viſio extremitatum obiecti per vim in H I, quot ſunt puncta in lente conuexa A B:

& per eandem rationem puncta quæ sumi possunt inter *d* & *e*, toties multiplicabuntur per vim quæ est in punctis inter H & I mediis. Fiet etiam vt distantia extremitatum obiecti inter se sit maior quàm si spectaretur nudo oculo. Nam propter refractionem linearum irradiationis exeuntium à vitro concauo, quo magis coguntur diuergere inter se, eò lineæ visuales (quæ ipsis parallelæ sunt) in maiori angulo se mutuò secabunt, quàm est angulus *d* A *e*, vel *d* C E, vel *d* B *e*, in quo se quidem angulo mutuò secarent sine tubo optico.

Quæ ita se habere ex ipso phænomeno constat; si enim partem quamcunque, vel partes quascunque vitri conuexi A B obtexerit quis, relictâ qualibet particula tantum eius detectâ, idque siue in medio, siue versus extrema vitri, semper tamen totum obiectum videbitur distinctè, sed minus illuminatum.

Vnde colligitur primò videri obiectum per radios transeuntes per quodlibet vnum punctum vitri conuexi. 2. totum obiectum videri per radios venientes à quolibet vno puncto vitri conuexi A B: ideòque si duæ rectæ punctuatæ veniant ab A ad H & I, erunt H & I in lineis visualibus, quibus videntur extremitates obiecti per A: & præterea si duæ rectæ venientes à B incidant in fundum oculi ad alia duo puncta, quàm H & I, putà ad N & O, erunt N & O in visualibus, quibus videntur extremitates obiecti per B.

Itaque si N & O non coincidant, videbitur vtraque extremitas obiecti per diuersas visuales; atque ita obiectum non vnum, sed duo viderentur, quod est contra Phænomenon ipsum quod apparet vnum & distinctum.

Omnes itaque radij venientes à *d*, desinunt in I; & omnes ab *e* venientes desinunt in H, & ita de cæteris mediis obiecti punctis dicendum est, nempe quod videantur in singulis punctis sibi in fundo oculi correspondentibus. Vnde sequitur quod linearum irradiationis ab eodem puncto obiecti venientium partes illæ quæ intercipiuntur inter vitrum concauum, & oculi superficiem sint inter se parallelæ. Nam alioqui punctum, quod repræsentant, non posset videri vt vnum: si enim videretur punctum obiecti in ipsa linea irradiationis, quæ intercipitur inter vitrum & oculum, videretur plures, quia videretur per plures irradiationes, & si videretur in vna ducta aliqua à fundo oculi, vni linearum interceptarum parallela, videretur etiam in iis lineis quæ ducerentur parallelæ cæteris interceptis; & ita rursus videretur vnum obiectum.

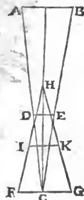
Restat igitur vt lineæ irradiationis procedentes ab eodem puncto obiecti habeant partes suas, quæ intercipiuntur inter vitrum concauum,

& oculum, parallelas inter se, & vera visualis illa sit quæ ducitur à puncto concurrentiæ in fundo oculi illis omnibus parallela.

Locus autem imaginis visæ per tubum opticum, vnaque magnitudo diametri apparentis comparata cum magnitudine diametri apparentis sine tubo, hoc modo determinari potest.

Sit obiectum quodlibet Luna spectata sine tubo optico, cuius diametrum apparentē, & cuius distantiā ab oculo sensu solo æstimamus: supponamus lineam rectam prope oculum ductam, ita vt secet axem opticum ad angulos rectos, qualis linea est P Q. Sitque P Q æqualis veræ diametro Lunæ. Huic parallela statuatur alia recta æqualis diametro lunæ apparentis, (quæ est quasi semipedalis) sit autem distantia inter has parallelas tanta, quanta est distantia apparens inter oculum & lunæ imaginem (quæ mensurari quidem non potest, sed æstimari sensu, tanquam longitudinis 200 passuum) si iam intelligantur ductæ duæ rectæ per extremitates dictarum duarum parallelarum concurrentes intra lunæ imaginem: rectæ autem H L, L M producantur donec illis occurrant, determinabunt illæ lunæ distantiam, & diametrum per tubum opticum apparentem.

Exempli causâ, sit obiectum aliquod A B, quod tantum distet ab oculo in C vt appareat sub magnitudine D E, videaturque sub angulo D C E; si atque F G æqualis A B; ducanturque F D H, & G E H per extremitates imaginis D E. Iam si idem obiectum A B H spectetur per angulum I C K maiorem angulo D C E, dico quòd diameter eius apparens erit I K, & maior quàm D E; & distantia apparens erit recta à puncto C ad rectam I K perpendicularis.



Quò enim obiectum recedit longiùs ab oculo, eò sub minore angulo videtur, donec euanescat angulus, putà in puncto H; & vt est distantia H K, vel H I, ad distantiam H E, vel H D, ita est diameter imaginis I K ad diametrum imaginis D E.

Si igitur A B esset luna vera, D E luna apparens sine tubo optico, modò angulus I C K ille esset quem faciunt radij visuales per tubum opticum, esset I K, Luna apparens per tubum opticum.

V. post 3 Opticæ, Catoptricæ & Dioptricæ libros, sequitur liber 4 de paralloxibus, de quibus post primam synopseos istius editionem

vir Clar. Ioannes Baptiſta Morinus, Profeſſor regius parte 8, vt parte 9 de refractionibus multa docuit. Liber quintus agit de arte Perſpectiuæ, quam nuper R P. Niceronus, curioſá parte adornaui à quo poſſis perfectum opus Opticum expectare.



OPTICÆ

LIBER I.

PARS PRIMA.

De luce, corpore luminoso, & umbra.

DEFINITIONES.

I. Corpus luminosum dicitur, quod sui luminis diffusiuum est.
II. Diaphanum, per quod lumini patet aditus.
III. Vmbrosum vel opacum, quod est imperuium lumini.
IV. Lux prima est, quæ secundam efficit.
V. Lux minima, quæ si diuidatur, non habet amplius actum lucis.
VI. Radius est linea luminosa, vel motus lucis.
VII. Linea radiosa, est per quam species visuales diffunduntur.
VIII. Linea refracta, cuius partes angulum faciunt.
IX. Pyramis radiosa, cuius basis est in superficie corporis radiantis, vertex verò in puncto cuiuscumque alterius corporis.
X. Pyramis illuminationis, cuius vertex est in puncto corporis luminosi, & basis in superficie rei illuminatæ.

Postulata.

I. Lucem compressam, & condensatam fortiorem esse luce disgregata, & rarefacta, atque adeò vehementiùs illuminare.
II. In absentia luminis vmbram fieri, in eius præsentia desinere.
III. Vmbram aliquam in sui termino acui, & ad punctum terminari.
IV. Quodlibet punctum lucis, *sicut coloris, & aliarum qualitatum actiuarum*, in orbem irradiare, & infinitis numero lineis diffundi.
V. Lucem res coloratas pertranseuntem earum coloribus, & quorumcumque corporum superficiebus affici.
VI. Naturam nihil frustra agere, nec deficere in necessariis. Hæc ferè ex Vitellione, vt & sequentia.

Theorema primum.

Radij cuiuſcumque luminis, & qualitatis actiuæ ſecundum rectas lineas, vtpotè breuiſſimas omnium potenduntur.

II.

Lumen non impeditum per totam ſphæram actiuitatis ſuæ in inſtanti neceſſariò defertur.

III.

Luci cum diſceſſu à centro accidit aliqua attenuatio in latum, nam radij ad centrum magis vniti, & denſiores ſunt, cum ſint totidem in anguſto loco, quot in ſpatio maiori: quibus ſi nulla attenuatio in longum accidit, æqualis eſt fortitudo radij quantumcumque à puncto luminoſo recedentis, tuncque fortitudo, ſeu denſitas radiorum in anguſtiori loco ita ſe habet ad denſitatem radiorum in ampliori ſuperficie, vt ſe habent ſphæricæ ſuperficies, quarum centrum eſt lucis origo, ſeu punctum lucens, amplior ad anguſtiorem, & conuerſim.

IV.

Radius quo peruenit lux à corpore luminoſo ad corpus oppoſitum eſt linea naturalis ſenſibilem habens latitudinem; in qua linea mathematica radians imaginatione ſumenda eſt.

V.

Luces & colores in corporibus diaphanis diſtincti penetrant, vt conſtat ex pictura referente obiecta exteriora in cubiculo clauſo, radiis viſibilium per foramen ingredientibus: radii enim viſibilium impermixtè medium illuſtrant.

VI.

Totum luminoſum, vel illuminatum pyramidem ſui luminis in quolibet puncto medij terminat.

VII.

Æqualiter inclinati radij, æqualiter: erectiores, magis: perpenpendiculares verò maximè illuminant: vnde æquè remota puncta lucida æqualiter; propiora magis illuminant, magiſque proinde calefaciunt: poſſibile tamen eſt puncta illa inæqualiter diſtantia ſpatium aliquod æqualiter, imò & viciniora minus illuminare.

VIII.

In circuli centro, vel peripheria punctum lucidum exiſtens ſingulas ipſius peripheriæ partes æqualiter illuſtrat.

IX.

Lucis & cuiuſlibet viſibilis radiatio fit ſecundum opticam figuram, ſeu conum opticum, itavt innumerabiles coni oppoſiti ducantur à radiante in radiatum, & à radiato in radians.

X.

X.

Radius perpendicularis fortissimus est; obliquus verò tanto fortior, aut debilior, quanto magis aut minus obliquus, seu recedens à perpendiculari.

XI.

Lux per angustum foramen, vel fenestram incidens, quò longior, eò latior, & ad figuram rotundam magis accedens, cuiuscumque figuræ fenestra fuerit. At si lucens, & fenestra circuli formam induunt, radius in pariete perfectum circulum describit: radius autem per orbiculare foramen traiectus coni recti, scaleni, orthogonij, vel amblygonij figuram imitatur.

XII.

Si fenestra totidem suis diametris à pariete distet, quot superficies lucens suis, confunduntur figuræ: alioqui quo superficies prædicta pluribus, aut paucioribus suis diametris abest à fenestra, eò magis, aut minus fenestræ figuram refert.

XIII.

Lumen à puncto per multilaterum foramen transfusum pyramis est.

XIV.

Radij transeuntes ab extremitatibus corporis lucidi per extremitates foraminis, inter foramen & corpus lucidum se mutuò secant: qui si, cum per foramen traiecti sunt, magis à foramine distent, quàm à corpore luminoso, lumen plano exceptum, corpore luminoso maius erit.

XV.

Perfectum lumen in obiectum planum per idem foramen traiectum ab æquali corpore luminoso æquale est; à maiore minus: à minori maius.

XVI.

Si planum foramini parallelum fuerit, lumen puncti luminosi plano excepti, foraminis seruabit figuram: at si planum obliquum fuerit, figura luminis erit obliqua sectio coni, vel pyramidis: si denique foramen & corpus luminosum diuersæ fuerint figuræ, lumen foraminis ac corporis figuram imitabitur; eritque figura mixta: quod similiter continget si diuersum habeant situm, licet eiusdem figuræ fuerint.

XVII.

Lumen quod à quolibet puncto superficiei lucidi corporis emicat, radios luminosos triplicis generis, nempe æquidistantes; sese intersecantes, & in diuersa abscedentes emittit in quodlibet spatium illuminatum.

XVIII.

Si quo longius discedit radius à puncto radiante, debilior & languidior efficitur, decrescit, & crescit vniformiter, difformiter, idque in spatiis proportionalibus proportionaliter: hic enim modus maxi-

mam relinquit sphæram actiuitatis lumini, si modum in tertio theoremate allatum excipias.

XIX.

Lumen sublato luminoso ne quidem per momentum in medio perseuerat: vbi lapis Bononiensis lumen seruans considerandus.

XX.

Omnia lumina sunt eiusdem speciei, suntque corporum lucentium, velut imagines, aut potiùs motus.

XXI.

Lumen lumini non obsistit, quamuis maius offuscet minus: vnde luminum actiones neque segniores, neque vegetiores sunt ex mutuo occursu, quia dum concurrunt in eadem parte medii non maiorem, neque minorem edunt effectum, quàm vnumquodque per se seorsum.

XXII.

A caua superficie sphæræ luminosæ, quod minimè illustratur, est centrum, contra autorem Perspectiuæ, qui l.1.prop.21.contrarium asserit.

XXIII.

Lumen exactè medium inter æqualia luminaria, est omnium minimum eorum, quæ conflantur ex luminarium occursu: si verò hæc inæqualia sint, minimum lumen minori luminari propinquius erit.

XXIV.

A puncto sphæræ luminosæ media dumtaxat actiuitatis sphæra illustratur.

XXV.

A sphæra luminosa ad punctum remotius plures radij, quàm ad propinquius proiiciuntur.

XXVI.

Luminosum externum maiorem partem sphæræ remotioris irradiat, quam propinquioris: vnde luminosum sphæricum maiori suo segmento illuminat punctum longinquius: & contra.

XXVII.

Si sphæricum luminosum illuminat sphæricum opacum, extremus, longissimusque radius vtrumque sphæricorum tangit: ergo si tangit, longissimus.

XXVIII.

Luminosum sphæricum illuminat sphærici æqualis dimidium: minoris plus dimidio: maioris minus.

XXIX.

Sphæra luminosa opacæ æqualis mediam huius partem illustrat, si illa maior, hæc magis quàm per mediam partem illuminatur, quod fit in terra à Sole collustrata: eapropter Sol ante ortum, & post occubi-

tum ſpectabilis eſt: cùm tamen Luna oriens non videatur, & ante occubitum diſpareat.

XXX.

Si ſphæra luminoſa maior fuerit opacâ, à minore parte luminoſæ maior pars opacæ illuſtratur; ſi verò illa minor fuerit, à maiore parte luminoſæ ad minorem opacæ lumen proueniet.

XXXI.

Sphæroides luminoſum maius è propinquo partem ampliorem opaci irradiat, quàm è remoto: eapropter Luna numquam illuſtratur minus quàm cùm plena eſt.

XXXII.

Sphæroides luminoſum minus opaco propinquius minorem huius portionem illuſtrat, quàm cùm eſt remotius.

XXXIII.

Si pars ſphæræ illuminata, & pars viſa baſes habuerint parallelas, lumen viſum circulare erit, & apparebit.

XXXIV.

Si pars ſphæræ illuminatæ non fuerit parallela parti viſæ, nec ſe mutuò ſecent: ſitque quod videtur, minus: pars luminis viſa circulo continebitur, & vt circulus apparebit: at ſi pars viſa ſit maior, ambitus ſpectati luminis erit quidem circularis, ſed ellipſis videbitur.

XXXV.

Si hemiſphærii illuſtrati, partiſque viſæ baſes ſe mutuò perpendiculariter ſecent, quod de lucido hemiſphærio cernitur, ſector eſt ſuperficiei ſphęricæ, at ſemicirculus apparebit. Quibus ſtantibus, ſi pars illuſtrata hemiſphærio minor eſt, fulgidum ſegmentum viſum *μηνοειδὲς* ſchema mixtum ex arcu circulari, & arcu ellipſeos intus curuato referet. At ſi pars illuſtrata ſit parte viſa maior, ſegmentum viſum apparebit inſtar figuræ mixtæ ex circulari ambitu, & ellipſeos figurâ intus curuata, qualis ferè eſt Luna in quadrato aſpectu, cum ſemicirculo maior eſt, quanquam ob ingentem diſtantiam ſemicircularis appareat.

XXXVI.

In ſphęra ſi baſes partis illuſtratæ, partiſque viſæ ſe mutuò ſecent obliquè, portio luminis, quæ ſub aſpectum cadit, mixta è circulo, & ellipſi apparebit. *Quibus addi poſſunt alia plurima theoremata qualia ſunt ſequentia.*

XXXVII.

Quo plura ſunt luminoſa ſimul agentia, eò etiam longius lumen vel fortius producunt.

XXXVIII.

Lumen in medio productum indiuiſibiliter pendet à luminoſo.

XXXIX.

Radii ab eodem luminosi puncto longiùs continuati apparent paralleli, &c. *sed duo præcedentia non adeo certa sunt, & de vltimo deque aliis lucis proprietatibus in Catoptrica dicendum erit.* Ad vmbram accedamus, reliqua ad lucem pertinentia in fundamentis catoptrices, & dioptrices allaturi: vmbra autem est diminutio lucis, cuius tenebræ sunt priuatio.

DE VMBRA.

Theorema primum.

Radius vmbrosus, cum radio luminoso, à quo procedit, in directum extenditur.

II.

Vmbra finita partim opaco corpore, partim lumine circumfuso, vt extinseco termino, definitur.

III.

Opacum tot proiicit vmbras quot luminaribus opponitur, quas in aduersam luminibus partem proiicit.

IV.

Opacum quò plures radios luminosi intercipit, eò ampliorem vmbram producit, & maius opacum maiorem vmbram proiicit.

V.

Vmbra quemadmodum lumen, intendi, ac remitti potest: quæ cùm multiplicatur, obscurior redditur.

VI.

Vmbra secunda obscurior est quàm prima, & tertia quàm secunda, & sic in infinitum.

VII.

Vmbra corpori opaco propinquior, obscurior est: & longè etiam quàm re ipsa sit, obscurior apparet.

VIII.

Puncti vmbra semper est linea infinita.

IX.

Si linea opaca lucenti corpori ita obiecta fuerit, vt producta ipsum secet, erit vmbra eius linea interminata: si verò illud non secet producta vmbra eius erit plana superficies.

X.

Si opaca superficies producta corpus luminosum secet, erit vmbra eius plana superficies; si verò non illud secet, erit vmbra eius quoddam solidæ figuræ genus.

XI.

Vt puncti vmbra semper est linea, ita corporis vmbra semper est corpus.

XII.

Si sphæra luminosa sphæræ opacæ æqualis fuerit, vmbra illlius erit cylindrus interminatus: si maior, vmbra erit conus basim habens circulum ex radiorum contactu descriptum, verticem autem in radiorum concursu: denique si minor fuerit, vmbra continuò aucta, tum longitudine, tum latitudine Infinitum abibit: prima autem vulgò κυλινδροειδὴς, secunda κωνοειδὴς, tertia καλαθοειδὴς appellatur.

XIII.

Si maior fuerit luminosi, quàm opaci corporis altitudo, erunt extremitatum radii altitudinibus proportionales: si verò vtriusque altitudo æqualis fuerit, vmbra proiecta interminata erit.

XIV.

Quò altitudo corporis luminosi ad opaci corporis altitudinem minorem proportionem habuerit, eò maior vmbra producetur: hinc vmbræ maiores sunt in ortu, & occasu Solis quàm in meridie; & maiores in meridie brumali, quàm æstiua: sed & vmbræ lunares longiores sunt, cùm vtrumque astrum eandem altitudinem horizontalem habuerit.

XV.

Ex multis corporibus opacis æquè altis, quod est propinquius lucido copori altiori, breuiorem vmbram facit: & in æqualibus altitudinibus corporum opacorum distantiæ eam inter se proportionem habent quam proiectæ in planum vmbrarum longitudines.

XVI.

Si idem luminis radius è sublimi delapsus, per plurimum inæqualium altitudinum vertices transeat erunt vmbræ altitudinibus proportionales.

XVII.

Si luminosi radii per summitates inæqualium altitudinum porrecti paralleli fuerint, vmbræ item erunt altitudinibus proportionales: & ideo ex vmbra notæ altitudinis incognita altitudo reperitur.

XVIII.

Triplex est vmbra; nempe Recta, quæ vmbra opaci perperpendicularis plano terrestri, in eodem plano extensa: qualis est vmbra hominis incedentis, gnomonis terræ perpendicularis, turrium, &c. Versa, quæ est vmbra opaci paralleli plano terrestri in planum ipsi plano terrestri perpendiculare proiecta, qualis est claui, vel styli horarij muro terræ perpendiculari infixi, & brachiorum extensorum hominis erecti: tertia vmbra vocatur Media; quæ fit à Sole 45. gradus super horizontem eleuato: quæ tres vmbræ notantur in scalis altimetris planisphæriorum, & mensuris deseruiunt.

XIX.

Cum vmbra recta minuitur, vt ante meridiem, versa crescit, & contra: vnde in meridie illa breuissima, hæc longissima: hinc vnâ data, alia colligitur; verbi gratia, quot partium est vmbra recta, cùm Sol 20. gradibus eleuatur, tanta erit versa, dum 70. gradibus Sol eleuabitur: & contra.

XX.

Altitudine luminosi, & styli data, datur vmbra versa; & contra, ex vmbra versa, & stylo datis, datur luminosi supra terram altitudo.

XXI.

Vt est sinus rectus altitudinis luminosi ad signum rectum complementi, sic est gnomon ad vmbram rectam: & sicut vmbra recta ad suum gnomonem sub eadem altitudine luminosi, ita gnomon quilibet ad suam vmbram versam: denique vt sinus rectus complementi ad sinum rectum altitudinis luminosi, ita stylus ad vmbram suam versam.

XXII.

Diaphanum perfectum, vt aër, nullam facit vmbram, & corporum magis diaphanorum rariores, & tenuiores sunt vmbræ, sicut magis opacorum densiores; hinc vmbra terræ opacissimæ noctem facit.

XXIII.

Vmbra figuram & motum opaci imitatur, quanquam ad solius luminosi motum moueri possit: quod si circa opacum moueatur, vmbra contrariis motibus ciebitur, idque pari velocitate.

XXIV.

Vmbra lucis propioris est densior, remotioris tenuior: estque tantò minor, quantò sublimius est lumen: æquatur autem suo opaco, cum Sol 45. gradibus super horizontem eleuatur.

XXV.

Possibile est trianguli non æquilateri vmbram æquilateram, circuli ad planum obliqui, sectionis item conicæ circularem vmbram, & circuli vmbram esse ellipsim, parabolam, vel hyperbolam

XXVI.

Vmbra lunæ solari longior est, cum vtrumque astrum eandem habet altitudinem horizontalem, quod tamen vix sensibile.

XXVII.

Si Sol per ambitum circuli maximi sphæræ incedat, vt contingit in æquinoctialibus, vmbra centri eundem percurret circulum: si verò per circulum nôn maximum incedat, duæ conicæ superficies ad communem verticem in centro sphæræ conuenient, vna luminosa ex radio circumacto, altera opaca ex vmbra, quam centrum proiicit.

XXVIII.

Sol incedens per circulum æquatori parallelum, in horariis vmbra centri proiecta erit circulus, quando planum horologij eidem æquatori parallelum erit: parabola, cum horologij planum circulo maximo parallelum erit, qui vtramque basim conicarum superficierum contingit: hyperbole vero, si planum horologij parallelum fuerit maximo circulo, qui conum vtrumque secat: denique ellipsis erit, si planum horologij æquidistet maximo circulo, qui neque basibus conorum parallelus sit, neque eas tangat, neque secet.

XXIX.

Si horologij planum axi parallelum fuerit, vmbræ proiectæ inter se parallelæ erunt, sicut & parallelorum vmbræ, nisi in eandem rectam lineam incidant.

XXX.

Axis vmbra erit recta linea in eodem cum circulo existens plano, si Sol horarium aliquem circulum ex iis attingat, qui horas à meridiano incipiunt: quod si fuerit in horario, in quo horæ ab horizonte incipiunt, centri vmbra punctum erit in eodem cum circulo existens plano. *Omitto plurima quæ ad vmbrarum proiectiones pertinent, de quibus in perspectiua agendum est.*

OPTICÆ
PARS SECVNDA.

De coloribus, & aliis obiectis potentiæ visiuæ, de speciebus intentionalibus, quarum ope obiecta videmus, & de oculi fabrica.

NOn hîc quæro an color sit aliquid à lumine distinctum, quod Plato colorem appellauit: an verò sit tantummodo lumen vario modo affectum: sufficit enim ad Opticam statuendam, si supponamus ex Philosophia colorem, sicut & lumen esse qualitatem corpoream, quæ mouet actu perspicuum, quæ duo sunt obiectum primarium visus: vel si mauis lumen erit motus, & color lumen modificatum.

Theorema primum.

Obiectum visus præcipuum est lux, & color, vel lux colorata, aut color lucidus.

II.

Obiectum secundarium est noncuplex; 1. quantitas, sub qua magnum, paruum, crassum, tenue, longum, latum, maius, minus, &c. 2. figura; sub qua curuum, conuexum, concauum, obtusum, acutum, asperum, læue, &c. 3. locus; sub quo superna, inferna, dextra, sinistra, anterius, posterius. 4. situs, sub quo sessio, statio, & quælibet partium corporis dispositio. 5. distantia, sub qua longinquum, propinquum, altum, profundum. 6. continuitas, sub qua vnum. 7. discretio, sub qua numerus, multitudo, paucitas, 9. quies.

III.

Illa nouem visibilia per accidens ad duo capita, nempe ad magnitudinem & locum reuocari possunt, sicut & 20. obiecta communia Vitellionis; nam sub magnitudine continetur figura, corporeitas, pulchritudo, deformitas, lenitas, asperitas, similitudo, diuersitas, distantia: sub loco, situs, continuitas, separatio, numerus, motus, & quies: sub luce, & vmbra, diaphaneitas, densitas, obscuritas, & tenebræ: quæ duo postrema sunt priuatiua.

IV.

Extensio requiritur in obiecto visus, sicut & in obiectis aliorum sensuum, quæ alioqui minime perciperentur.

V.

Colores singuli ad tres reuocari possunt, nempe ad album, rubeum, & nigrum, ex quibus alij fiant: flauus quidem ex rubro, & albo: cœruleus vero ex rubro, & nigro.

VI.

Color albus ob maiorem cum luce similitudinem est nobilissimus, niger imperfectissimus, viridis respectu oculi gratissimus: niger nullos alios colores recipit, forte quia omnes continet, albus omnes recipit; hic lucis, ille tenebrarum imago est.

VII.

Colores variantur pro varietate lucis, medij, distantiæ, & dispositionis oculi.

VIII.

Colores, & alia obiecta prædicta visus eodem modo quo lumen in medio diffunduntur, *quapropter illis applicari possunt quæcumque de lumine diximus.*

IX.

Species, quæ vulgò intentionales, & virtuales appellantur, & quibus obiectum repræsentatur, sunt inuisibiles in medio diaphano: visibiles verò, cùm terminantur in opaco; vt constat ex speciebus per foramen

traiectis

traiectis in cubiculo clauso, & in alba charta terminatis.

X.

Species eodem modo quo lumen, & color in medio propagantur, & ad oculum perueniunt: his igitur lucis proprietates conueniunt, à qua fortè non distinguuntur.

OPTICÆ
PARS TERTIA
De oculi fabrica, & de visione.

Theorema primum.

TRes humores, & septem tunicæ, continentes tres illos humores, constituunt oculum: humores sunt aqueus, chrystallinus, & vitreus: tunicæ sunt adnata, cornea; sclerotica, quæ cum cornea consolidatiuam componit: vuea, quæ foramen habet rotundum, quod PVPILLA dicitur: choroides, quæ diuersicolor est pro varia cerebri temperie, & vocatur IRIS: aranea quæ chrystallinum humorem complectitur; & retina, quæ vitreum humorem continet.

II.

Humor aqueus est in anteriori parte oculi: vitreus obscurior in posteriore: chrystallinus in media, cuius figura est lenticularis, anteriùs tamen minus curua, posterius fortè hyperbolica, vel circuli minoris portio maior.

III.

Oculum nerui plures mouent; 1. attollit: 2. deprimit: 3. adducit: 4. abducit, 5. & 6. coagitant: 7. tonicè firmat, nisi à 6. præcedentibus simul agentibus illud fiat.

IV.

Pupillæ ambitus constringitur vt nimiam lucem minuat, & dilatatur, vt modicam multiplicet: quod fit constrictione & dilatatione vueæ tunicæ, quæ aqueo humori alterationibus obnoxio innatat.

V.

Iris in felibus, & noctiuagis animalibus lumen continere videtur non chrystallinus humor, cum pupilla nocte illuminata non videatur; alioqui obiecta distinctè cernere nequirent.

VI.

Præcipua, & vltima pars oculi in qua repræsentantur obiecta, & fit visio, est retina tunica: est enim oculus instar parui cubiculi clausi, cuius foramen pupilla, vitrum conuexum, chrystallinus humor: charta post vitrum exposita, retina, quæ recipit species eo intensiores, quo chrystallinus humor conuexus maior, & magis detectus est.

VII.

Retina plena est spiritibus visoriis, oritur à medulla cerebri, & distinctè, ordinatéque species obiectorum recipit, ac repræsentat, quæ in tunica cornea, & chrystallino, vt in conuexo foraminis vitro, confusæ sunt.

VIII.

Omnes tunicæ, præter sclerodem, vueam, & choroidem diaphanæ sunt, cornea tamen retinâ magis diaphana est; hæc enim plus opaci habet quàm diaphani, cùm per eam neque cornea, neque humor chrystallinus, & vitreus videantur.

IX.

Choroides opaca semper in sua superficie concaua læui colorata est, vt patet ex colore pupillæ, cuius fundus in diuersis hominibus varius est, in tauro cœruleus, in fele flauus, &c.

X.

Vuea opaca est, vt luci, & speciebus ingressum nimium interdicat, & sinum oculi tenebrosum reddat.

XI.

Choroides & sclerodes opacitate suâ cameram oculi speciebus recipiendis adaptant, eam obumbrando.

XII.

Humores omnes pellucidi sunt, maximè verò chrystallinus, nec aranea, & hyaloides multum à perspicuitate suorum humorum differunt.

XIII.

Diameter circuli corneam tunicam basis instar terminantis, vel arcum illius maximum subtendentis vix hexagoni latere minor, vixque tetragoni latere maior: cuius quantitas explorabitur globulo vitreo obiectum eadem magnitudine referente.

XIV.

Axis opticus transit per centra omnium humorum, & tunicarum, quamuis tunicæ sint excentricæ: neruus autem opticus non iacet in axe optico, sed sinistrorsum vergit in oculo dextro, & dextrorsum in sinistro.

XV.

Perfecta visio non minorem distantiam postulat, quàm quæ axi-

bus continentur, cum quibus nerui optici rectos angulos efficiunt.

XVI.

Inter visum & visile necesse est medium diaphanum intercedere: quod visile debet esse imperuium, satis magnum, oppositum, & illustratum, alioqui non videbitur.

XVII.

Oculus optimè videt è tenebris; cuius visio non fit irradiatione Galenica; non solâ obiecti præsentia; non solâ compassione, vel sympathia; non emissitijs radijs; nec per συναγκείαν, sed per species, seu imagines rerum in retina susceptas, quæ in chrystallino humore sæpius decussantur.

XVIII.

Visio est actio elicita ab interno vitæ principio, quæ per simplex medium fit rectis lineis, quæque nihil suapte vi exterius operatur.

XIX.

Visio ab vtroque oculo simul in vnam rem conspirante fortior est quam ab altero tantùm.

XX.

Oculorum acies in vnum duntaxat punctum quod distinctè conspiciatur, figi potest: nequit autem fieri vt plura simul æquè perspicuè videantur.

XXI.

Visio fit vel simplici aspectu, vel intuitu, seu obtutu ex prænotione, seu anticipata notione: aspectus autem simplex fit per quemlibet pyramidis opticæ radium, obtutus verò per solum axem: ille fit in instanti; hic in tempore, cum primo aspectu formæ rerum non perfectè comprehendantur, & absoluta rei comprehensio fiat diligenti intuitu, vel syllogismo, vel anticipata notione: quapropter visus nequit perfectam visionem producere sine ope sensus communis.

XXII.

Visus ab obiecti præsentia pendet, quamuis res absens vt præsens videri possit; specie diuinitus in oculo seruata: qui substantias rerum solummodo videt per accidens.

XXIII.

Visio confusa naturâ distinctam antecedit; qua primò post simplicem aspectum, lux & color distinguuntur: sed proprietas vnica è visibilibus per se sola nequit à visu appprehendi: non enim color, aut lumen absque magnitudine, &c. quamuis ex proprietatibus istis aliæ alijs citiùs comprehendantur: nam generica ratio obiectorum priùs, & minori tempore quàm specifica percipitur.

XXIV.

Id solum videtur, à quo ad oculum radius opticus extendi potest:

est autem radius opticus illa recta linea, per quam forma rei aspectabilis ad obtutum porrigitur, quique per totius oculi centra transit: qui cum sit viuacissimus dicitur acies oculi, & à reliquis radiis, regis instar, fouetur.

XXV.

Species eiusdem rei potest simul directo, reflexo, & refracto radio ad centrum oculi peruenire.

XXVI.

Optica pyramis est species per medium diaphanum ab obiecto ad oculum perueniens, habens verticem in centro visus, basim autem in ipsa re: quæ maxima dicitur, cum omnia complectitur, quæ oculus vnico aspectu cernere potest.

XXVII.

Axis pyramidis opticæ est recta linea, quæ per verticem, & centrum rectæ basis transit.

XXVIII

Præter axes prædictos, 5. lineæ spectari possunt in oculis, quarum prima duci concipitur ab vnius oculi centro ad alterius centrum, diciturque connectens centra visuum: 2. dicitur connectens extrema neruorum opticorum, quæ ad terminos applicatur, ex quibus pendent orbes oculorum. 3. educitur ab axium opticorum concursu, & connectentem centra visuum bifariam secat; diciturque radius communis. 4. vocatur axis communis, quæ à neruo communi in connectentem extrema neruorum opticorum orthogonaliter incidit. 5. Denique vocatur horopter, quæ parallela est ei, quæ centra visuum connectit, & transit per axium opticorum congressionem.

XXIX.

Horopteris planum est, quod axes secat ad rectos angulos, estque instar tabulæ in visus termino collocatæ, ac directè oculis obuersæ, in quo rei visæ locus apparens statuitur, qui nihil est aliud quàm huius plani, & radii optici per rem visam producti communis intersectio.

XXX.

Optici radij axi viciniores minoribus angulis franguntur, remotiores maioribus, æquidistantes æqualibus, cùm transeunt per albugineum humorem; refringunturque ad perpendiculum.

XXXI.

Radij ab vno puncto visibili obiecti in oculum emissi non sunt plures quàm sex, nec pauciores quàm vnus: sex quidem si radius refringatur in cornea tunica, aqueo humore, vitreo, chrystallino, & retina: vnus autem cum punctum visibile in axe optico iacet.

XXXII.

Radij ex cornea in aqueum si refringuntur, isque sit corneâ rarior, franguntur à perpendiculo; ex aqueo in arcaneam,& humorem chrystallinum ad perendiculum, iterumque ex chrystallino ad concauam vitrei humoris superficiem, seu hyaloidem; denique ex humore vitreo ad retinam, quæ retina radium vltimum primo similem ita reddit, vt visibile in proprio suo loco videatur.

XXXIII.

Radij visorij portio sub qua visio fit, non est punctum indiuisibile, sed habet lõgitudinem sensibilem: iacet autem locus apparens rei visæ in linea formaliter visoria, quæ vltimò appellit ad retinam ex optici nerui meditullio, & medulla cerebri procedentem, spiritibusque vitalibus, & visoriis plenissimam.

XXXIV.

Perfecta visio non minorem distantiam postulat quàm quæ axibus continetur, cum quibus nerui optici angulos rectos efficiunt.

XXXV.

Axes optici debent esse in eodem plano cum linea connectente centra visuum, & coniungente extrema neruorum opticorum.

XXXVI.

Optici nerui sunt in eodem plano cum linea, quæ illorum extrema connectit.

XXXVII.

Motis oculis axes optici loco mouentur, qui sunt in eodem plano cum linea connectente extrema neruorum opticorum, & duabus à neruo communi eidem connectenti conterminis, si cum axe communi conueniant.

XXXVIII.

Radij omnes, qui à proposita quauis recta linea ad centrum visus extenduntur, sunt in eodem plano.

XXXIX.

Axis communis per se immutabilis est: communis autem radius pro quolibet motu oculorum semper variat, præterquam in dilatatione, & constrictione.

XL.

Oculi nequeunt ita dilatari, vt axes firmentur paralleli: qui propiùs terimnari nequeunt quàm vbi cum neruis opticis rectos angulos efficiunt: verùm inter se ad normam concurrere non possunt.

XLI.

Cum radius communis connectenti centra visuum est normalis, axes optici sunt inter se æquales; & cum axes optici sunt inter se æquales, radius communis connectenti centra visuum normalis est.

XLII.

Cum axes optici ad punctum aliquod communis axis congrediuntur, sunt inter se æquales, & cum connectente extrema neruorum opticorum, seu basi isosceles efficiunt, cuius angulum comprehensum axibus coincidentibus axis communis bifariam secat.

XLIII.

Cum axis communis cum duobus opticis concurrit, connectens centra visuum est parallela connectenti extrema neruorum opticorum.

XLIV.

Ab vna re duobus oculis obiecta duæ formantur pyramides, quarum communis basis est res ipsa, quæ spectatur, vertices autem sunt in oculis, quæ quidem mouentur motis obiectis, vel oculis, tametsi per se dicantur immobiles: harum verò axes mouentur mota pyramide, sed in ea situm nonmutãt, licet axis opticus extra pyramidem excurrere possit.

XLV.

Si corpus opacum interiectum inter rem visibilem & aspectum axibus comprehenditur, nullam visibilis partem obteget, aliqua tamen obiecti pars obscuriùs apparebit: si verò axes opticos excedat, aliqua pars visilis non videbitur, alia ab vno tantùm oculo, reliquum ab vtroque conspicietur: quod si eosdem axes non attingit, pars media, & extrema rei visilis ab vtroque oculo videntur, sed partes inter extremas & mediam positæ ab vno tantùm oculo cernuntur.

XLVI.

Horopter est in eodem plano cum axibus opticis, & connectente centra visuum: in quem cum radius communis orthogonaliter incidit, anguli quos facit horopter cum axibus sunt inæquales: quicquid autem in eodem cum axibus existens plano videtur, in horoptere verum, vel apparentem locum habet, quandoquidem horopter est imaginaria linea transiens per concursum axium, in qua videntur quæcumque videntur: cuius planum est instar tabulæ perspicuæ, & directò oculis obuersæ, in qua rerum omnium visarum species, seu imagines opticè, ac veluti proiectione quadam descriptæ esse videntur: hoc autem planum Guido Vbaldus sectionem, alij parietem, vel tabulam, alij vitrum appellant.

OPTICÆ PARS QVARTA.

De modo quo obiecta communia percipiuntur.

Theorema primum.

QVamuis distantiam vnus oculus per se definire nequeat, ex accidenti tamen per vicina corpora intercedentia distantiam cognoscit: sicut & ex axium opticorum latitudine, sed non ex axium coniunctorum angulis.

II.

Æqualibus magnitudinibus ex inæquali distantia visis maior est ratio distantiarum quàm angulorum, sub quibus illæ magnitudines cernuntur, si maior minori comparetur.

III.

Apparentes magnitudines ex quantitate anguli verticalis pyramidis opticæ comprehenduntur, sunt enim inter se magnitudines, vt anguli pyramidum opticarum qui sunt sensibiles, si res visa sensibilis est.

IV.

Veræ magnitudines colliguntur ex collatione anguli pyramidis opticæ, & distantia rei; quæ cum inæquales sunt, non ita se habent vt anguli optici quibus cernuntur, cum sit maior magnitudinum quàm angulorum ratio, & maior verarum quàm apparentium proportio, si maior maiori comparetur.

V.

Rerum magnitudines sunt semper maiores quàm appareant: nec ita sunt apparentes magnitudines, vt distantiæ; illarum enim quàm harum minor est ratio.

VI.

Oculus communis sensus aditus, præsidio magnum & paruum, crassum & tenue, longum & latum, æquale & inæquale cognoscit.

VII.

Rectum ac planum ex vniformi difformi, irregularem curui-

tatem ex difformiter difformi partium à visu distantia; conuexum ex præcipiti partium extremarum recessu; concauum ex minore partium extremarum elongatione quàm in rectis accidat lineis, visus agnoscit.

VIII.

Corporum eminentias, & profunditates exiguas ex vmbris præsertim; asperum & læue ex luminis, specierumque receptione: acutum & obtusum ex eo quod eorum partes à summo fastigio celeri tardove motu prolabi videntur, aspectus discernit.

IX

Circulum oculus deprehendit, quia eius peripheria à centro visus paribus vndique distat radiis: rectilineam figuram ob laterum rectitudinem: polygonam ex maiore angulorum, quàm laterum à visu distantia, solidam verò ex laterum dispositione, vel syllogismo dignoscimus.

X.

Locus rei certus vno oculo designari nequit, qui tamen cognoscitur ex rei distantia, & respectu partium vniuersis; sed præsertim in axium opticorum congressu locus dignoscitur: positionum autem differentiæ ex comparatione medij prospectus intelliguntur, qui ex radio communi ad horizontem librato, eique quæ centra visuum connectit normali, cognoscitur.

XI.

Situs eodem modo cognoscitur, quo distantia, figura, & locus, cum ex iis omnibus componatur.

XII.

Continuum ex non interrupta, discretum ex interrupta partium coniunctione; identitas ex identitate; distinctio ex distinctione specierum in oculos incurrentium; vnitas verò ex continuatione, vel identitate, & numerus ex discretione, vel distinctione cognoscuntur.

XIII.

Motus ex oculi motione, vel ex diuerso corporis situ distinctis temporibus sensibilibus, vel ex loci ipsius mutatione; & aliis quibus distantia, seu spatium, deprehenditur.

XIV.

Velocitas tarditasque motus ex inæqualitate temporis cognoscuntur, quo mobile æquali percurrit spatia; vel ex inæqualitate spatiorum æquali tempore confectorum: si verò motus tardus est, ex comparatione vicini corporis quiescentis deprehenditur; quanquam ea quæ tardè mouentur, non moueri, sed mota esse cognoscuntur: at quies percipitur è visibili locum, ac situm eundem tēpore sensibili obtinente.

XV.

Transparentia syllogismo è rebus post trans corpus interiectum visis: opacitas

opacitas ex aspectus prohibitione; vmbra ex vicinia maioris lucis: tenebræ ex totius luminis absentia colliguntur.

XVI.

Similitudo ex conuenientia; dissimilitudo ex diuersitate visibilium formarum; pulchritudo ex visibilium proprietatum symmetria; turpitudo ex earumdem asymmetria comprehenduntur.

OPTICÆ PARS QVINTA.

De fallaciis aspectus, & reliquis ad Opticam pertinentibus.

Theorema primum.

ÆQualium, & similiter oppositarum magnitudinum propinquior sub maiore, remotior sub minore angulo cernitur; hinc viciniora euidentiùs cernuntur. Vt autem visus deceptiones corrigere possis, quæ ex circumstantiarum ad perfectam visionem necessariarum asymmetria oriri solent, nempe ex illustratione, & distantia maioribus vel minoribus, &c. *Sequentia theoremata accipe.*

II.

Distantiæ minores semper, quàm re ipsa sint, conspiciuntur: & quo remotiores eo semper minores: hinc superiores ædificiorum ordines resupinari videntur, quia radius illos attingens longior est, res enim apparent iuxta modum quo species in oculo recipiuntur.

III.

In rerum distantiis visus maximè decipitur, cùm visile longiùs distat, aut cùm inter hoc & visum nullum visibile corpus intercedit: hinc arborum, & columnarum anteriorem in partem longo ordine dispositarum, quæ longissimè distant, coniunctæ videntur; & qui procul ab amne distant, res vlteriores à citerioribus non distinguunt.

IV.

Visus non deprehendit quantum astra distent à nobis, & cœlum terræ in ambitu horizontis cohærere putat: res enim vt plurimùm propinquiores existimantur, quarum intermedium spatium non percipi-

RR 1

tur: hinc cœlum prope horizontem longiùs quàm iuxta verticem à nobis distare videtur: hinc etiam ignis noctu procul conspectus vicinior apparet, & quæ circa crepusculum prope sunt, remota creduntur, quod & turribus ac montibus per nebulam visis contingit.

V.

Ob temporis breuitatem aspectus veram rei distantiam explorare nequit.

VI.

Eodem conspecta angulo quorum distantiæ non perpenduntur, æqualia existimantur, & quantus est angulus, tanta res apparet: quod autem remotiore loco apparet, maius, quòd propinquiori, minus esse iudicatur: hinc res eadem maior vel minor apparet ob diuersas distantias.

VII.

Recta linea perpendiculariter visui obiecta spectatur vt punctum, directè verò, aut obliquè, vt linea: plana verò superficies perpendiculariter obiecta visui vt linea, directè vel obliquè, vt superficies apparet.

VIII.

Omne visile minus videtur obliquè, quàm directè spectatum: & quo directiùs opponitur, eò perfectiùs videtur.

IX.

Oculo ad id quod videtur accedente, visile augeri putatur, & auctum visile accedere videtur.

X.

Si radij optici per extremitates duarum parallelarum incedant, radiorum longitudines sunt magnitudinibus proportionales: quo totius Geodesiæ fundamentum statuitur, radio enim, altitudo, profunditas, longitudo, & latitudo ignotæ explorantur.

XI.

Fieri potest vt immoto visu, mutatum obiectum æquale semper appareat, moto etiam oculo immutatum obiectum æquale semper videri potest: quod in pluribus casibus Aguilonius l. 4. explicat.

XII.

Est locus, è quo inæquales magnitudines aspectu æquales videntur, & ex quo data magnitudo appareat alterius pars aut multiplex in postulata ratione, quà angulum secare, vel augere conceditur: denique loca dantur, è quibus eadem magnitudo sui ipsius pars, aut multiplex in data proportione cernatur.

XIII.

Res eodem modo apparent quo species, seu imagines illarum oculum ingrediuntur, non autem quo ex obiecto egrediuntur: hinc quæ

sublimíoribus radijs, sublimiora; quæ humilioribus humiliora; quæ dextris vel sinistris, dextra vel sinistra cernuntur. Hoc autem theorema est artis perspectiuæ fundamentum: eapropter enim templorum pauimenta ingredientibus, fastigiata; horizon sublimior quàm sit; mare gibbosum, plana iacentia sub oculo remotiora à visu in altum elata, super oculum incumbentia, ad ima prolabi, porticus, & arborum series in angustum stringi, æqualium magnitudinum sub visu erectarum remotiores, altiùs euectæ: supra visum autem erectæ, depressæ videntur.

XIV.

Quemadmodum parallelæ lineæ propiùs coire videntur, quo longiùs à visu recedunt, ita non parallelæ lineæ ita videri possunt vt parallelæ appareant, possunt etiam duæ lineæ subiecto plano inscribi, quarum intercapedo visui in sublimi posito æqualis vbique appareat: harum autem vna recta erit, alia hyperbolica.

XV.

Si in altera linearum angulum continentium punctum quodpiam assumatur, à quo perpendicularis excitetur ipsius anguli plano, è quouis perpendicularis puncto angulus rectus, acutus, aut obtusus videbitur, si rectus vel acutus, vel obtusus fuerit: quod etiam continget in quolibet puncto perpendicularis, si in altera linearum angulum continentium exteriùs producatur. Item angulus semper æqualis apparebit in quouis puncto rectæ à vertice anguli per oculi centrum infinitè productæ.

XVI.

Angulares formæ ex interuallo spectatæ circulares apparent: circuli verò in eodem cum oculo plano situ ambitus è longinquo recta linea apparebit.

XVII.

Visus in caua circulari superficie constitutus vniuersum ambitum, in conuexa nullam ambitus partem contuetur: extra circuli ambitum in eodem cum circulo plano positus partem hemicyclo minorem intuetur.

XVIII.

Visu existente in linea circuli centro perpendiculariter insistente, omnes diametros æquales videt.

XIX.

Circulus obliquè conspectus vt ellipsis, & ellipsis, quodam oculi situ vt circulus apparet.

XX.

Pars visa sphæræ circulo, & radijs contingentibus definitur: quæ si vno spectetur oculo, hemisphærio minor est: quæ fit eò minor quò propinquior oculus fuerit, tametsi tunc hæc minor sphæræ portio maior appareat.

XXI.

Visus in superficie sphæræ positus totam superficiem concauam, solum autem conuexæ punctum videt: qui si intra sphæram appropinquet, minor portio videbitur, sed apparebit æqualis: eminus autem spectatæ concauæ, vel conuexæ superficies sphærarum planæ videntur.

XXII.

In cylindro, vt se habet circuli portio quæ videtur, ad eam quæ latet, sic visa superficies cylindri ad non visam: pars autem cylindri visa parallelis circumscribitur, cuius medietas videtur, si distantia oculorum æqualis fuerit cylindri diametro: quæ si maior, aut minor est, maior, aut minor pars cylindri spectabitur.

XXIII.

Radij oculorum coni superficiem tangentes omnes, vtrimque in rectis lineis tactiones faciunt, suntque in eo similes omnium circulorum portiones, quas oculus vno aspectu contuetur: in quo cono vt se habet circuli portio visa ad occultam, ita coni visa superficies ad reliquam latentem.

XXIV.

Si axis coni sursum productus centrum visus attingat, vniuersa superficies coni, exceptâ basi, spectabitur: sed apparebit circulus: videbitur autem ellipsis, si latus coni supernè productum in centrum visus incurrat, totaque coni superficies sub aspectum cadet.

XXV.

Res quælibet in ea horopteris parte conspicitur, vbi ipsum radius per centrum ductus attingit.

XXVI.

Quemadmodum res vna vno spectata oculo in vnico loco, & plura vno spectata radio in eodem loco apparent, ita res vna vtroque visu duobus in locis, duæ res in tribus, & 4. locis apparere possunt.

XXVII.

Cum quid apparet pluribus in locis, nullus illorum proprius est locus, & minus perspicue cernitur: fieri verò nequit vt quod vno tantùm videtur oculo, geminum appareat.

XXVIII.

Quæ celerrime mouentur, totum per quod feruntur spacium complere videntur, vel videri nequeunt: quæ verò perniciosissimo motu agitantur, quiescere videntur: & si motus circularis est, eminus spectatus rectus apparet.

XXIX.

Eorum quæ pari velocitate mouentur, remotiora postera fieri, & tardiùs moueri videntur; quod etiam verum esse potest, quando remotiora velociùs agitantur.

XXX.

Si per eandem lineam rectam mobile, & oculus pari velocitate incedant, quiescere videbitur mobile; accedere, si oculus fuerit concitatior; abscedere, si segnior.

Cætera quæ de fallacijs visus, hîc afferri possent, ex sequentibus libris intelligentur: illa verò quæ spectant ad Sciagraphiam, vel Scenographicem, Ichnographiam, Orthographiam, & ad omnia proiectionum genera, peti debent ex arte Perspectiuæ, de qua fusè Vitruuius, Albertus Durerus, Daniel Balbarus, Guido Vbaldus, Steuinus, Agui-lonius, & alij tractarunt: nosque postea dicturi sumus.



OPTICÆ

LIBER II.

SEV CATOPTRICA.

Pars prima de ijs quæ pertinent ad specula in communi, & de speculis planis in particulari.

DEFINITIONES.

I.



POlitio corporum est continuitas partium superficiei politi corporis sine sensibilitate pororum.

II.

Speculum dicitur omne corpus politum operâ artis vel naturæ; est autem multiplex, nempe rectum; concauum, & conuexum sphæricum; concauum & conuexum cylindricum, concauum & conuexum ellipticum, parabolicum, hyperbolicum, pyramidale, conchoideum, hederaceum: estque totuplex, quotuplex esse potest linea, vel superficies concaua, aut conuexa politi corporis; qualis est superficies facta à linea quadratrice, & ab illis lineis, quæ radios parallelos diuergentes, & conuergentes in punctum; & à dato puncto parallelos, diuergentes, & conuergentes per refractionem efficiunt; *de quibus in Dioptrica*

III.

Linea incidentiæ dicitur illa secundùm quam imago obiecti cadit in superficiem speculi.

IV.

Linea reflexionis dicitur illa secundùm quam imago reflexa, propter soliditatem speculi, quam penetrare nequit, reflectitur ad oculum.

V.

Punctus incidentiæ dicitur is, in quo linea incidentiæ cadit in superficiem speculi: idemque est punctus reflexionis, quia radiorum, vel specierum reflexio ad visum fit semper à puncto incidentiæ.

VI.

Perpendicularis super superficiem speculi, à quo fit reflexio, dicitur

linea orthogonaliter erecta à puncto incidentiæ super superficiem speculi illius, à quo fit reflexio, si illa superficies sit plana: si verò concaua, vel conuexa fuerit, tunc illa linea dicitur perpendicularis super ipsam, quæ est perpendicularis super superficiem planam, illam superficiem concauam, vel conuexam in puncto incidentiæ contingentem.

VII.

Superficies reflexionis illa dicitur, quæ continet lineam incidentiæ & reflexionis, & perpendicularem à puncto contingentiæ productam super ipsam speculi superficiem, vel super superficiem illam contingentem.

VIII.

Cathetus incidentiæ est linea perpendiculariter erecta super superficiem planam speculi, aut super lineam rectam contingentem communem sectionem superficiei reflexionis, & superficiei speculi conuexi vel concaui, ducta à puncto, à quo incipit incidentia, vt à centro visus, vel ab alio puncto, ad quem reflexio terminatur.

IX.

Cathetus reflexionis est linea erecta super illam eandem superficiem vel lineam à puncto, ad quem terminatur ipsa linea reflexionis, vt à centro visus, vel ab alio puncto, ad quem reflexio terminatur.

X.

Superficies incidentiæ illa dicitur quæ continetur à linea, seu imagine rei visæ, & à cathetis incidentiæ terminorum illius lineæ.

XI.

Angulus incidentiæ dicitur quem in superficie reflexionis continet linea incidentiæ cum linea, quæ est communis sectio superficiei reflexionis, & superficiei ipsius speculi, vel superficiei speculum in puncto reflectionis contingentis.

XII.

Angulus reflexionis est, quem in superficie reflectionis continet linea reflectionis cum dicta communi sectione.

XIII.

Imago dicitur forma in speculo comprehensa: & facit basim coni optici, vt visibile in visione simplici.

XIV.

Locus imaginis est locus visionis illius formæ, seu locus, in quo illa videtur.

Theorema primum.

Superficies corporum tersorum politorum, cuiuscumque figuræ sint, quolibet suo puncto reflectunt lucem, colorem, & figuram rerum oppositarum secundùm lineam rectam, quia natura agit in omnibus secundùm lineas breuiores.

II.

Omnis reflexio luminis & coloris, siue lucem & colorem debilitet, siue non, fit secundum lineas sensibilem latitudinem habentes.

III.

In speculis planis radij obliquè incidentes semper ad angulos æquales reflectuntur: perpendicularis verò radius in seipsum redit; idémque dicendum de reliquis speculis regularibus, nempe sphæricis, conicis, & cylindricis tam conuexis quàm concauis, in quibus angulus incidentiæ semper æqualis est angulo reflexionis; vt constat ex obiecto, quod per eandem omnino viam immittit species in oculum videntis, per quam oculus immittit species in obiectum visum.

IV.

Visibile per speculum comprehenditur à visu sub lineis breuissimis: quanquam id non sit semper verum in speculis concauis, vt Benedictus in epistolis demonstrauit.

V.

In quolibet speculo, vel corpore cuiuscúmque curuitatis anguli incidentiæ, & reflexionis sunt æquales respectu lineæ tangentis punctum superficiei sphæricæ, in quod radius incidit: debet autem illa linea tangens vlteriùs producta secare cathetum ab obiecto deriuatum.

VI.

Radius incidentiæ, & reflexus & 4. puncta, nempe visibilis, incidentiæ, imaginis, & oculi, sunt in eodem plano.

VII.

Impossibile est simul duo puncta eiusdem rei visæ ab eodem puncto cuiuscúmque speculi reflecti ad idem centrum visus, vel à duobus punctis speculorum planorum vel cōuexorum formam vnius puncti, quamuis ab vno puncto speculi cuiuscumque ad diuersos visus plurium punctorum imagines, & à diuersis vna imago reflecti possit.

VIII.

Specula plana omnium optimè repræsentant obiectum, præsertim si ex chalybe facta fuerint; quæ si perfectè recta, & polita, vix oculo deprehendi possunt, eóque minus videntur quò meliùs repræsentant, quia natura speculi in repræsentandi virtute sita est.

IX.

Obiectum in speculis planis videtur in concursu radiorum cum catheto ducto à quolibet obiecti puncto per speculum in quod incidit perpendiculariter vsque ad concursum radii visualis vlteriùs producti; quia radii reflexi eodem modo post factam à plano speculo reflexionem propagantur, quo emitterentur directi ab eodem obiecto, si per foramen rectà transirent.

X.

X.

Specula plana faciunt radios reflexos eiusdem generis cuius essent, si radij illi fuissent continuati; parallelos, si paralleli fuissent, concurrentes, si concurrissent, & recedentes, si recessissent.

XI.

Locus imaginis, seu puncti visi in planis speculis est in concursu radiorum cum catheto: quod Euclides de quibuscumque speculis concludit; sed aliter Keplerus, & alij recentiores sentiunt.

XII.

In omni reflexione à speculis planis facta, lineæ incidentiæ & reflexionis proportionales sunt cathetis à punctis suorum terminorum demissis, & ipsis basibus in speculorum superficie interiectis.

XIII.

Eadem est distantia loci imaginis à superficie speculi plani sub speculo, quæ est puncti visi ab eadem superficie supra speculum planum existentis.

XIV.

In omni reflexione à speculis planis facta, linea à centro visus ad locum imaginis producta æqualis est lineæ incidentiæ, & reflexionis simul iunctis: ambobus autem oculis vnica imago apparet.

XV.

Altitudines & profunditates tam in conuexis quàm in planis speculis euersæ; dextra sinistra, & contra, nobis apparent: obliquæ verò longitudines videntur quemadmodum se habent.

XVI.

Specula ita disponi possunt, vt intuens, propria imagine non visa, videat imaginem alterius rei non visæ, & in cubiculo discernat, quæ geruntur in aliena domo, vel in plateis.

XVII.

Speculum ex multis planis construi potest, in quo solius aspicientis plures imagines ad modum chorearum appareant, & in quo aspiciens suam imaginem volantem videat, docente Ptolomæo 2. catopt. theor. 6.

XVIII.

Imago eiusdem puncti per duo vel tria specula plana orthogonaliter ad inuicem disposita videri potest: hinc specula quæ dicuntur infinita, desumuntur: quot autem erunt in quocumque polygono æquiangulo & æquilatero specula ad inuicem disposita, toties imago eiusdem puncti videri poterit.

XIX.

A pluribus speculis planis potest imago rei per se visæ, vel non visæ reflecti ad oculum; ab imparibus autem dextra sinistra, & contra: & à paribus dextra apparent dextra; & distantia imaginis à visu constat ex

quantitate omnium linearum incidentiæ, & reflexionis.

XX.

Duo specula plana rectangula, & æqualia ita collocari possunt, vt intuens in vno speculorum suam imaginem videat venientem, & in altero recedentem: docente Prolo. theor. 4.

XXI.

Si vertex montis, aut turris, incidens in speculum planum reflectatur ad oculum; erit vt reflexio ad suam perpendicularem, sic incidentia ad montis altitudinem. Aliter, vt se habet distantia pedis à puncto reflectente speculi, ita se habet distantia speculi, & turris, vel montis, ad eiusdem montis vel turris altitudinem: hinc oritur Geometria Catoptrica, seu ars mensurandi per specula.

XXII.

Ab vno speculo plano ignis accendi nequit, potest à pluribus: vnicum tamen planum ignem ab alijs speculis productum continuare potest.

XXIII.

Optima materia speculorum chalybea: vel cuprea stanno, stibio, auripigmento, tartaro, & halinitro mixta.

XXIV.

Inter puncta imaginis superficiei cuiuscumque speculi incidentis, & speculi oppositi superficiem necesse est infinitas pyramides figurari, conos, & bases hinc inde mutuas habentes.

XXV.

Necesse est superficiem reflexionis erectam esse super speculi superficiem, vel super superficiem speculum illud in puncto reflexionis contingentem: in illa vero superficie centrum visus, punctum visibile, punctum reflexionis, terminusque perpendicularis, & catheti vtriusque reperiuntur.

CATOPTRICÆ

PARS SECVNDA.

De speculis sphæricis, déque cylindricis, & pyramidalibus tam conuexis quàm concauis.

DEFINITIONES,

I.

MAius speculum siue sphæricum, siue columnare & pyramidale, tam conuexum quàm concauum à Vitellione lib. 6. & 7. dicitur,

cuius sphæræ diameter est maior, vel quod est pars maioris columnæ, vel pyramidis, & minus è contrario.

II.

Diameter, & centrum speculi sphærici, diameter & centrum sphæræ dicitur, cuius portio est speculum: *Videantur quæ in Præfatione dicta sunt.*

III.

Diameter visualis dicitur linea à centro visus per centrum speculi sphærici transiens, quæ similiter cathetus reflexionis appellatur.

IV.

Linea recta speculo sphærico conuexo æquidistare dicitur, quæ secundum punctum medium æquidistat lineæ aliquem arcum circuli magni illius speculi secundum medium eius punctum contingenti.

V.

Finis contingentiæ est punctus vbi altera cathetorum secat lineam in puncto reflexionionis speculum contingentem.

VI.

Meta locorum imaginis est punctum, vel linea, vltra quam imago non videtur.

Theorema primum.

In conuexis speculis sinistra apparent dextra & contra: & imago propiùs abest à speculo quàm aspectabile, eoque minor est; tantoque minor quanto minus est speculum; tanto verò maior, quanto visibile est propinquius.

II.

In iisdem speculis aspectabilium imagines conuexæ apparent, eoque conuexiores quo specula conuexiora fuerint.

III.

Specula sphærica, vel alio modo inflexa, composita dici possunt ex pluribus, vel infinitis planis speculis; ideoque se habent in repræsentando, illuminando, & calefaciendo, vt specula plana multiplicata, & tangentia singulas speculorum curuorum partes.

IV.

Anguli incidentiæ & reflexionis cuiuslibet puncti iudicantur penes lineam rectam tangentem punctum in quo desinit radius incidentiæ, & incipit radius reflexionis.

V.

Locus imaginis visæ in speculis sphæricis conuexis ponitur ab antiquis in concursu lineæ reflexionis cum catheto incidentiæ: in concauis in recta linea ducta ab aspectabili ad centrum sphæræ, cuius portio est ipsum speculum. A Steuino 7. prop. Catoptr. in occursu lineæ

ad oculum reflexæ cum linea recta perpendiculari à visibili ducta, super lineam contingentem speculi superficiem in puncto reflexionis, quæ perpendicularis non pergit ad centrum sphæræ, cuius portio speculum existit. A Keplero statuitur in perpendiculari ex re visa in superficiem siue refringentem, siue repercutientem, quatenus distantia punctorum rei visæ per binos oculos, seu per vnius oculi diametrum latitudinis capitur: nisi cum vtriusque oculi eadem fuerit superficies; tunc enim in conuexis speculis, & mediis densioribus imaginem è perpendiculari excedere, ad visum accedere putat.

VI.

Si ab aspectabili puncto per globosi speculi centrum recta infinita ducta sit, imago in recta infinita, & aspectabile punctum æqualiter à speculo distant, apud Steuinum: at minor est distantia imaginis à speculi conuexi sphærici superficie apud Vitell. prop. 37. l. 6. & Euclid. 20. quàm ipsius rei extra. de variis autem locis, & figuris imaginis, pro vario rei visæ situ fusissimè agit Vitellio ab 11. prop. 6. vsque ad 62.

VII.

A superficie speculi sphærici conuexi ex diuersis superficiebus sphærarum composita imagines monstruosæ videntur: tametsi verò ab vnius superficie ignis accendi nequeat, potest à pluribus.

VIII.

Superficies sphæricæ aptissimæ sunt ad rerum plurimarum perspectiuam, seu picturam in parua quantitate repræsentandam: quæ si columnares, seu cylindricæ fuerint, extensas picturas ignotas colligent, & notas facient: at de his speculis Vitellio fuse tractat lib 7. per 60. propositiones: quarum duas vltimas solùm affero.

IX.

In speculis columnaribus vel pyramidalibus conuexis maioribus maiora videntur idola: reique visæ propinquioris imago videtur maior. Quod si perpendiculare fuerit horizonti cylindricum speculum, tantum imaginem producet in longum, quantum deducet in latum, si eidem horizonti parallelum statuatur.

X.

Possibile est speculum cylindricum, vel pyramidale conuexum ita collocari, vt inspiciens videat in aëre extra speculum imaginem rei alterius non visæ. Deinceps verò de speculis sphæricis concauis agamus.

XI.

Radij ab obiecto lucido vel colorato procedentes à conuexis speculis disgregantur; sed à concauis colliguntur.

XII.

Centro visus, vel puncto rei visæ in centro speculi sphærici concaui existente, à quolibet puncto fiet reflexio in ipsum visum: ideoque nihil præter seipsum videbit oculus.

XIII.

Posito visu extra centrum speculi eiusdem, à quolibet puncto speculi fieri potest imaginis alterius reflexio ad visum, præterquam à puncto, cui incidit diameter visualis.

XIV.

Locus imaginis rerum ab eodem speculo reflexarum quandoque est in ipso puncto reflexionis; quandoque vltra speculum; quandoque inter visum & speculum; quandoque in superficie ipsius visus; quandoque retro visum: docentibus Alhazeno, Vitellione & experientia, atque ratione, ex quibus & sequens theorema.

XV.

In eodem speculo eadem est proportio catheti incidentiæ ad rectam à centro speculi ad locum imaginis productam, quæ lineæ à puncto rei visæ ad finem contingentiæ ductæ, ad lineam à fine contingentiæ ad locum imaginis productam.

XVI.

Quilibet punctus diametri circuli magni eiusdem speculi potest esse locus imaginis, quantumcumque producatur.

XVII.

Oculus positus in circumferentia, aut extra circumferentiam non apparet: potest autem visum punctum in speculo concauo seu sphærico à pluribus locis reflexum vnicam imaginem habere: potest etiam duas, & fortè 3. aut 4.

XVIII.

In speculis istis concauis intra centrum speculi eiusque superficiem res in proprio situ, extra verò centrum euersæ apparent: illic maior, hic minor esse videtur imago.

XIX.

In speculis istis, radij paralleli ita circa quartam partem diametri reflectuntur, vt maximè illuminent, & comburant; itaque focum speculi concaui reperies, si noueris diametrum sphæræ cuius speculum portio fuerit.

XX.

Si speculi concaui sphærici diameter duorum pedum regiorum fuerit, non solum in foco circa medietatem semidiametri, sed citra & vltra per spatium 3. aut 4. digitorum comburet ob radiorum multitudinem, & condensationem in toto illo spatio existentem.

XXI.

Difficile est assignare quanta radiorum multitudo necessaria sit, vt ignis generetur ab eis per reflexionem: videat quispiam si possit illud definire dato minimo speculo, quod comburere queat; quale forsitan erit, si pollicis vnius solummodo diametrum habuerit.

XXII.

Illuminatio foci speculi concaui non est sita in indiuisibili, sed vnius saltem lineæ diametrum habet: sunt qui definiant istius foci latitudinem per arcum subtẽdentem angulum 30. minutorum, à radiis ex quolibet puncto reflexis productum; quia solis diameter apparens est tot minutorum: quod si verum est, hyeme quàm æstate focus latior erit, cùm Sol in Capricono existens, sit etiam in perigæo, in quo solas 1100. terræ semidiametros à nobis distat; cùm in apogæo 1181. dum versatur in Cancro, à terræ superficie recedat; hinc fit vt 92745. leucis, quarum quælibet 15000. pedes regios complectitur, hyeme quàm æstate Soli simus viciniores: est enim terræ semidiameter 1145. leucarum.

XXIII.

Fieri possunt concaua specula sphærica quæ ad magnam distantiam comburant, & illumineut, si dentur artifices, & materia; quæ tamen ab hominibus tanta fieri non posse credidero, vt ad spatium dimidiæ leucæ comburant: quot enim obsecro requirerentur homines ad mouendum illud speculum; quanta materia ad illud conficiendum?

XXIV.

Specula prædicta radios candelæ in foco, vel circa focum positæ ad magnam distantiam veluti parallelos, & columnares ita remittunt, vt per 500. pedes remotus solo paruulæ candelę lumine minutissimæ litteræ cognosci, atque legi possint: posset verò tantum esse speculum, & tam perfectè politum, vt per vnam aut alteram leucam litteræ superficiei adhærentes, vel etiam in loco per 2. leucas remoto positæ legi possent: sed industriâ humana fieri nequit, vt litteræ speculo adhærentes, vel alio modo dispositæ in Luna videantur; quapropter mentitur Agrippa cùm secretum illud sibi vendicat.

XXV.

Si densitas seu fortitudo radiorum in angustiori loco se habeat ad fortitudinem eorumdem in latiore superficie contentorum, vt se habent sphæricæ superficies, quibus origo lucis pro centro est, amplior ad angustiorem, & contra: radij solares directi absque vlla reflexione, $7\frac{1}{3}$ terræ propè Solem semidiametris, æquè ac radij Solis à speculo concauo pedali in focum latitudinis vnius lineæ reflexi, comburent. An verò non sit aliud ignis elementum præter illum ignem Solis æthe-

reum,) Philoſophis diſcutiendum permitto: ſuppono autem Solem eſſe in media diſtantia, id eſt 1141. ſemidiametros terrenas à nobis diſtantem.

XXVI.

Speculorum concauorum ope, luna, & alia ſydera in data magnitudine videri, ac proinde homines ab ingenti ſpatio cognoſci, & litteræ tametſi minutæ ab eodem ſpatio, vt à 2. leucis, diſcerni poſſunt: non poteſt tamen obiectum ita multiplicari, ſeu creſcere, vt quis litteras in luna poſitas legat: Opticus tamen determinare poteſt quale & quantum ſpeculum ab Angelis confici debeat, vt litteræ, & alia minutiſſima in luna, vel etiam in ſtellis poſita videri poſſint ab oculo in terra circa ſpeculi centrum collocato.

XXVII.

Speculorum concauorum foci quoad vim illuminandi, calefaciendi, & comburendi, ſe habent vt ipſorum ſpeculorum concauæ ſuperficies, ideoque in duplicata ratione, quemadmodum à diametris quadrata: igitur data ſpeculi ſuperficie vis foci dabitur; ſi tamen priùs alicuius foci vim ſupponamus. Cùm igitur 14000. vicibus diameter ſpeculi è portione terrenæ ſphæræ confecti minor ſit diametro ſpeculi è portione ſphæræ ſtellatæ abſciſſi, & ſpeculi è portione ſphæræ diametrum, vel axem pedalem habentis facti diameter terrenâ diametro 38320000. vicibus minor ſit, & tamen ſpeculum è portione ſphæræ pedalem axem habentis foco ſuo plumbum celerrimè liquefaciat, cogita, quanta vis duorum prædictorum ſpeculorum futura ſit.

XXVIII.

Si firmamentum eſſet ſpeculum, nihil in eo præter ſuum oculum intuens videre poſſet, qui eiuſdem cum dimidio firmamenti magnitudinis appareret: quo poſito ſpeculo, viderint Chymici quid paſſurus ſit globus terrenus, & in quæ principia reducendus.

XXIX.

Si firmamenti concaua ſuperficies eſſet ſpeculum, candelæ 7000. terrenis diametris à terra diſtantis luce ſinguli homines legere poſſent.

XXX.

Si firmamenti ſuperficies concaua ſpeculum ponatur, ſolo candelæ paruulæ lumine vbicumque intra firmamentum poſitæ legere quiſpiam poterit in circulo 7000. terrenis diametris à terra diſtante, id eſt in quarta parte diametri ſphæræ ſtellatæ.

XXXI.

Quo ſpeculum eſt portio minoris ſphæræ, eo aptius eſt vt calefa-

ciat, vel illuminet, & inflammet vi lucidi propinqui: *Plura de loco imaginis, & de omnibus apparentiis imaginum, sicut & de aliis ad concaua specula sphærica pertinentibus Vitellio, 68. propositionibus 8. libri tradidit; pluráque nos 1. tomo in Genesim ex Magino attulimus: solùm addo theorema sequens.*

XXXII.

Imaginum, seu idolorum varij situs, & diuersa loca, quæ in speculis conuexis, & concauis apparent, ita vt aliquando citra superficiem concaui, aliquando intra conspici videantur, vt patet ex manibus, ensibus, & aljis rebus speculo obiectis, & ex eo velut egredientibus, explicari possunt per angulos maiores, aut minores, sub quibus idola, vel potiùs ipsa obiecta cernuntur: nam quæ sub maiori angulo conspiciuntur, accedere, quæ sub minori, recedere videntur, vt primo libro dictum est.

XXXIII.

Lumen, & ignis, beneficio speculorum planorum, & concauorum facilè transferri possunt in antra, & alia loca subterranea, ad quæ radij directi solis, vel alterius lucidi peruenire nequeunt: potestque lumen ter aut quater à tribus aut 4. planis speculis reflexum ignem producere, si in vltima reflexione colligantur radij cum speculo concauo. At verò determinare reflexionem vltimam, vltra quam nulla alia vim comburendi habitura sit, est so ius in Catoptrica peritissimi: tamesi magnitudo speculorum, & distantiæ reflexionum datæ sint: *Hinc reliqua proprietates speculi sphærici concaui concludi possunt: ideoque ad concaua cylindrica progredior.*

XXXIV.

Centro visus existente intra speculum columnare vel pyramidale concauum, à quolibet puncto speculi fiet reflexio ad visum: existente verò extra idem speculum non integrum, à maiore parte superficiei speculi fiet reflexio ad oculum.

XXXV.

A quocumque puncto eiusdem speculi non potest nisi forma vnius puncti ad visum reflecti, ideóque vnica imago videtur: at verò locus imaginis erit aliquando vltra, quandoque citra speculum & visum; quandoque in centro visus, vel in superficie speculi, vel inter visum & speculum, vt in sphæris concauis accidit.

XXXVI.

Communi sectione superficiei reflexionis, & speculi columnaris concaui existente oxygonia, vel circulo, poterunt esse vnum, duo, tria, vel quatuor puncta reflexionis, non autem plura: iuxta quæ, loca imaginum numerabuntur.

XXXVII.

XXXVII.

Omissis reliquis quæ Vitellio de his speculis 9. libro per 38. propositiones docet, addo speculis istis ignem accendi: his autem & conuexis cylindricis, & pyramidalibus siue seorsim sumptis, siue mixtis, faciem, & alia obiecta monstruosa repræsentari, vel monstruosa, & penitus incognita ad iustam forma n, & pulchritudinem quæsitam reuocari posse. *Iam superest vt de speculis è sectione coni genitis agamus.*

CATOPTRICÆ
PARS TERTIA.

De speculis ellipticis, hyperbolicis & parabolicis.

EX sectionibus coni duas omittamus, eam nempe quæ fit plano per axem, & plano basi parallelo, cùm illâ speculum planum, hac autem sphæricum concauum vel conuexum tantummodò generari possit: si verò vnius lateris sectio sit alteri lateri parrallela, parabolica; si non sit paralella, sed occurrat alteri lateri producto supra verticem, hyperbolica; si denique latus vtrumque ita secetur, vt sectio concurrat cum vno latere vltra basim producto, elliptica sectio nascetur. Quibus ab Appolonio demonstratis, sit.

Theorema primum.

Si sectionem parabolicam linea recta contingat, à puncto contactus ducatur recta perpendicularis diametro sectionis productæ ad concursum cum contingente, erit pars diametri interiacens perpendicularem, & peripheriam sectionis, æqualis parti interiacenti sectionem & contingentem.

II.

Omne quadratum lineæ perpendicularis ductæ ab aliquo puncto sectionis parabolæ super diametrum sectionis est, æquale rectangulo contento sub parte diametri interiacente illam perpendicularem & peripheriam sectionis, & sub latere recto ipsius sectionis.

III.

Si in sectione parabolica ab extremitate diametri ex parte peripheriæ sectionis resecetur æquale parti lateris recti ipsius sectionis,

peruenissent, istius speculi occursu coeunt. Vide Lemma Propos. XIX. Hydraulicorum, vbi plura de his sectionibus.

IX.

Si fiat ellipticum speculum, cuius vnus focus sit in centro Solis, alter verò focus in superficie terræ, nullus intra tropicos viuere poterit: imo neque fortassis in vlla parte terræ, quippe quæ calore in hoc foco concepto fortè tota in cineres verti posset.

X.

Duo specula parabolica ita disponi possunt, (si materia nulli igni cedens dari possit) vt radios in punctum, vel saltem in comburentem densitatem collectos, in linea, vel paruula columna in longum producta semper vrentes conseruet: quod vt fiat, minus speculum parabolicum in foco maioris in vertice foramen eiusdem magnitudinis cum minori speculo habentis, sisti debet, quod radios Solis in punctum à maiori coactos, parallelos per prædictum foramen in magnam distantiam remittat, quos postea plano speculo in punctum datum reflectere possis.

XI.

Annulus parabolicus comburere potest; quantæ vero magnitudinis esse debeat ad vim vrendi habendam Catoptricus absque experientia determinare nequit.

XII.

Dato puncto in quo generandum incendium proponitur, facile est assignare speculum parabolicum, quo illud producat: & ellipticum quod punctum lucidum ad punctum datum reflectat.

XIII.

Si fornix alicuius aulæ formam ellipsis concauæ seruet, & quispiam demissè loquatur in alia extremitate, quamuis per centrum, vel etiam plures passus distet, audietur solum in alia extremitate, & in toto spatio intermedio non audietur: similiterque candela in vna extremitate posita, plus in alia extremitate illuminabit quàm in vlla alia parte totius aulæ.

Omitto plurima quæ speculorum regularium, & irregularium ope fieri possunt, quales sunt variæ dictionis alicuius repræsentationes, quæ tametsi vnica sit, verbi gratia, Latina Hebraica, & Græca legi poterit: deinde variæ picturæ, & confectio horologiorum quorumcumque, & alia ludrica propemodum infinita, partim ex sequenti Diaclastica, partim ex Perspectiua poterunt intelligi: eapropter nihil amplius de speculis subiiciam, vt animum Dioptricicis applices, de quibus sequenti libro dicturi sumus.

TTt ii

OPTICÆ.

LIBER TERTIVS, SEV DIOPTRICA.

PRIMA PARS

Dioptricæ principia complectitur.

DEFINITIONES.

I.

Linea incidentiæ dicitur, iuxta quam radius recte diffunditur per medium vnius dinphani, qualis est radius candelæ vsque ad vitrum perueniens.

II.

Refractio est incuruatio eiusdem lineæ ad angulum continendum, vt cum radius Solis peruenit ad vitrum conuexum, quippe qui frangitur in superficie istius vitri.

III.

Punctus refractionis est is, in quo lineæ incidentiæ fit refractio; estque in superficie secundi diaphani à primo diuersi.

IIII.

Linea refractionis est, quæ à puncto refractionis ad centrum oculi extenditurr

V.

Linea perpendicularis hîc dicitur, quæ à puncto refractionis erigitur perpendiculariter super superficiem corporis, à qua fit refractio perpendiculariter producta.

VI.

Cathetus incidentiæ est linea à puncto rei visæ super superficiem corporis, in quo est res visa, & à qua fit refractio, perpendiculariter producta.

VII.

Superficies refractionis est, in qua continentur lineæ incidentiæ, & refractionis.

VIII.

Angulus incidentiæ dicitur minor angulus, quem continet linea incidentiæ cum linea perpendiculari, ducta à puncto refractionis super superficiem corporis, à qua fit illa refractio.

IX.

Angulus refractus dicitur angulus minor, quem continet linea refracta cum dicta perpendiculari.

X.

Angulus refractionis est, quem continet linea refractionis cum linea incidentiæ trans corpus diaphanum, à cuius superficie fit refractio, in continuum producta.

XI.

Directa visio dicitur, cum imago rei visæ sine refractione peruenit ad visum.

XII.

Obliqua verò, cùm ad visum refractè peruenit.

XIII.

Imago refracta est forma rei visæ obliquè perueniens ad visum.

XIV.

Locus imaginis refractæ est, in quo imago refracta visibus occurrit.

Theorema primum.

In omni superficie refractionis necessariò sunt punctum, cuius forma refringitur; punctum refractionis: centrum ipsius visus: & perpendicularis ducta puncto refractionis super superficiem, à qua fit refractio: quæ postrema superficies primæ subiicitur.

II.

Refractio rei visæ, vel radij cadentis à medio diaphano rariore in superficiem densioris, fit ad perpendicularem, quæ ducitur à puncto refractionis super superficiem, à qua fit refractio: si verò cadat à densiori diaphano in rarius, refractio fit à perpendiculari.

III.

Centro visus, & puncto rei visæ per refractionem in diuersis diaphanis loca propria permutantibus, eædem lineæ incidentiæ, & refractionis nomina permutant.

IV.

Imago refracta rei visibilis nunquam occurit visui in loco rei visæ, sed semper extra suum locum.

V.

Omnis forma puncti per refractionem visi comprehenditur in rectitudine lineæ, per quam à puncto refractionis species ad oculum extenditur: idque in linea perpendiculari ducta à puncto rei visæ super superficiem corporis, à qua fit refractio, iuxta doctrinam antiquorum: sed ambobus oculis in eadem refractionis superficie versantibus, & valdè ex obliquo intuentibus imaginem à perpendiculari excedere, & oculis appropinquare Keplerus animaduertit.

VI.

Quo res visæ, vel radij magis distant à perpendiculari ducta à centro visus super superficiem refringentem corporis diaphani, eo maior est refractio. *Aliter.* Quò lux obliquiùs incidit, eo maiori angulo refringitur: attamen refractionum anguli crescunt maioribus rationum incrementis, quàm obliquitas incidentiæ; nam refractiones syderum crescunt circa horizontem præcipitatis incrementorum proportionibus.

VII.

Lucis tenuis, & densioris nulla est differentia refractionis, cæteris paribus; sicut & nulla vtriusque differentia in reflexionibus; *quantum videlicet ad angulos attinet.*

VIII.

Si diuersa visibilia æquidistent ab oculo in diuerso medio, refringentur ad puncta æquidistantia, & æquales refractionis angulos facient: remotius autem refringetur ad punctum remotius, & maiorem refractionis angulum faciet.

IX.

Refractio reddit aliquando colorem, & lucem, vel colorem lucidum, aut lucem coloratam obiecti, non imaginem, vt patet in coronis, virgis, iride, & aliis meteoris: aliâs reddit imaginem, quamuis illa lux colorata, imperfecta imago dici possit.

X.

Imago videtur in medio rariori remotior, & minor: in densiori verò propinquior, & maior: vt constat ex demersis in aquam: & obiecta eò minora videntur in aëre, cum ab oculo posito in aqua cernuntur, quò maiora videntur in aqua ab oculo in aëre constituto: quanto verò rarius est medium, tanto minora & remotiora: quanto densius, tanto maiora, & propinquiora apparent; vnde Cleomedes concludit solem longè maiorem visum iri, si lynceis oculis per solidos parietes spectaretur.

XI.

Locus imaginis tam in speculis reflexione, quàm in perspiciliis, & dioptricis instrumentis refractione mutatur ad rei visæ, vel oculi mutationem: *vt fusiùs posteà dicturi sumus.*

XII.

Si superficies refringens recta est, linea, & oculus sit in perpendiculari exeunte à medio puncto rei visæ super illam superficiem corporis diaphani, vel si punctus rei visæ existat in perpendiculari ducta à centro visus super superficiem diaphani, imo & sphærici, puncti visi nulla fit refractio, & vnica imago videtur: si verò punctus rei visæ iaceat ex-

tra perpendicularem ductam à centro visus, in vno tantum puncto fiet refractio, siue communis sectio superficiei refractionis, & superficiei corporis diaphani refringentis sit plana, siue sphærica.

XIII.

Rei visæ superficies non æquidistans superficiei refringenti visa in medio densiore maior videtur quàm si æquidistaret: ac proinde pars quælibet imaginis videbitur maior re visa sibi proportionali: quod vltimum peræquè verum est de superficie rei æquidistante.

XIV.

Re visa trans corpus diaphanum columnare densius aëre, ita vt centrum visus, & centrum alicuius circuli corporis æquidistantis basibus columnæ & res visa sint in eadem linea recta, imago duplicata videbitur.

XV.

Locus imaginis rei visæ refractionem, existentis in medio secundi diaphani, quandoque est in ipso secundo corpore diaphano, quandoque in ipso puncto refractionis, quandoque inter visum & illud corpus diaphanum, quandoque retro visum: quandoque in ipsa superficie visus, docente Vitellione theor. 16. l. 10.

XVI.

Imago formæ cuiuslibet rei visæ figuratur diuersimodè secundùm figuram superficiei corporis, à qua fit refractio ad visum.

XVII.

Diaphanum aëre densius radios solis ita condensare potest, vt ignis excitetur, quod euidens est in lagenis aqua plenis, & in lentibus crystallinis ex vna, vel ex vtraque parte conuexis, vt in 2. parte dicemus.

XVIII.

Sol, & alia sydera maiora videntur prope horizontem ob refractionem: vnde sæpissimè Sol ellipticus apparet, ob vapores atmosphæræ interpositæ, & obliquitatem incidentiæ radiorum, quippe qui in sphæram atmosphæræ terræ concentricam obliquè incidunt; & ideò Solis altitudo coarctatur, & non latitudo; eoque magè coarctatur, quo vapores minus alti fuerint, cùm solarem conum ad axem opticum magis obliquent: eaque de causa prope horizontem sydera magis à se distare videntur latitudine, quàm altitudine.

XIX.

Refractiones faciunt vt maculas solares statim maiores, & viciniores, statim minores, & magis distantes heliosocopus intueatur, Hinc pro varietate refractionum atmosphæræ, altitudo varia esse iudicatur.

XX.

Ob illas refractiones, qui sunt in sphæra parallela sub polis mundi

constituti, Solem totum æquinoctij tempore vident oblõgum ob cõtractionem: sed & eiusdem meridiani, & paralleli incolis eodem tempore ellipticus, & sphæroides apparere potest, ob varias dispositiones atmosphæræ.

XXI.

Ob easdem, ambo luminaria diametraliter opposita, & eclipsis Lunæ, vnaque Sol conspici possunt: *Verùm quæ spectant ad astrorum refractiones, in optica astronomica afferentur, vbi de dioptricis instrumentis actum fuerit.* Videatur illustris viri Dioptrica, ex qua possint emendari quæ forsan hocce libro minus certa videri possent. Leganturque duo tractatus qui huic volumini colophonem imponunt.

DIOPTRICÆ, PARS SECVNDA.

De dioptricis instrumentis, & de aliis principiis Anaclasticæ.

QVemadmodum opacitas in corporibus reflectentibus requiritur, ita diaphaneitas, seu perspicuitas in refringentibus: quæ si regularia sint, speculorum instar polita, atque læuigata esse debent: alioquin si eorum superficies difformes sint, & perturbatæ, obiectum fideliter repræsentare non poterunt. Debent præterea instrumenta dioptrica coloris & lucis expertia esse, ne imago obiecti illo colore inficiatur, vel nulla ratione videatur: quibus positis, reliqua more solito theorematibus exponemus.

Theorema primum.

Idem corpus potest esse instrumentum dioptricum & catoptricum; cum nullum adeò sit opacum, quin aliquid perspicuitatis habeat, vt constat ex cornubus nigerrimis, & aliis corporibus opacissimis in tenues laminas extensis: & contra.

II.

Quidquid fit instrumentis catoptricis, fieri potest dioptricis; quibus videlicet vtimur ad obiecta repræsentanda, lucem colligendam, vt faciliùs tam lunæ quàm stellarum luce legere possimus, & ad calorem, & ignem excitandum.

III.

Tot sunt superficies siue regulares, siue irregulares anaclasticorum instrumentorum, quot sunt catoptricorum.

IV.

Quo densius fuerit instrumentum dioptricum, & quò plus opa-

cuitas

citatis immixtæ habuerit, radius in illud difficilius ingreditur, cum opacitas ad vim illuminatiuam ita se habere videatur, quo medium densius, & fortius ad virtutem motiuam: Secus tamen dicendum, si radij eò faciliùs in diaphanum ingrediantur, quo densius fuerit, vt nobilis Mathematicus existimat.

V.

Dari possunt diaphana, quæ radios à puncto dato diuergentes ad datum punctum refringant; vel parallelos efficiant: & quæ parallelos quoscumque in dato puncto colligant, iterumque ex dato puncto parallelos reddant.

VI.

Crystalli, vel alia diaphana, æquè ac specula, ita fabricari possunt, vt ex quolibet quodlibet repræsentetur; nempe ex grano sinapis elephas: ex pulcherrimo vultu maximè deformis, & contra: & quæ toties obiectum multiplicent, quoties volueris: vel quæ multiplicatum, vt vnum quidpiam referant.

VII.

Eadem est refractio radiorum siue ingredentium, siue egredientium: quorum refractiones in crystallo, & vitro sunt proximè æquales, & vsque ad tricesimum inclinationis gradum sunt ferè proportionales inclinationibus: est autem angulus refractionis in crystallo vsque ad prædictum terminum quàm proximè tertia pars inclinationis in aëre, quæ sumitur ex angulo inter perpendicularem superficiei, & quemcumque radium prædictam perpendicularem in puncto superficiei secantem.

MONITVM.

Ita sentiebat Keplerus cum aliis, donec Vir Illustris in sua Dioptrica nos docuisset veram refractionis proportionem; quam prop. 24. Ballisticæ, pag. 79. explicauimus, rursusque in duobus tractatibus Diopticis ad calcem librorum istorum Opticorum explicatam habes: iuxta quam omnia, (si quæ contraria reperiantur in hisce libris) emendenda sunt.

VIII.

Maxima crystalli refractio est circiter 48. graduum, quæ à maxima inclinatione radij incidentis oritur: nam quo maior, aut minor est hæc inclinatio, eò maior aut minor est refractio: licet refractiones exquisitè pensitatæ non sint proportionales inclinationibus in aëre.

IX.

Radij à diuersis punctis in idem superficiei densioris refringentis punctum incidentes, ita se mutuò secant, vt situm mutent, ac si sectio fieret sine refractione.

X.

Si radij plus 42. gradibus intra corpus crystalli super vnam eius superficiem inclinati eam penetrare nequeant, possint tamen reflecti, vmbræ contra Solem proiici poterunt.

XI.

Radij penetrando linearem angulum prismatis ex triangulo æquilatero vitreo, vel crystallino formati iucundissimos colores iridis producent: si verò vitrei corporis angulus inter oculum, & visibile positus rectus fuerit, non transmittet radios visiles ad oculum.

XII.

Prismatis angulo supino quæ sunt, videntur supra, prono infra, dextro dextra, sinistro sinistra.

XIII.

Licet punctum quodlibet lucidum vel coloratum radiet in orbem, cùm tamen diameter instrumenti dioptrici nullam habet sensibilem proportionem cum prædicti puncti distantia, radij extrema dioptrici contingentes paralleli censentur: quorum vnicus occurrenti superficiei curuæ perpendicularis esse potest.

XIV.

Radij puncti visibilis propinqui diuergentes; plurium verò punctorum conuergunt ad centrum oculi, vel lentis vitreæ, siue crystallinæ; quæ vel conuexa est, vel concaua, vel mixta: & quæ duplicem habet magnitudinem, nempe corporis, & figuræ: iuxta quam dicitur esse parua, vel magna pars circuli, vel sphæræ: quo verò minor est circulus, eo conuexitas, & concauitas maior est, & contra.

XV.

Radij paralleli incidentes in lentem conuexam portionis minoris quàm 30. graduum, perpendiculariter obiectam, concurrunt cum radio perpendiculariter incidente post sesquidiametrum sphæræ circiter: qui si paralleli, & perpendiculares penetrent planam basim prædictæ lentis inuersæ, infra superficiem conuexam concurrent cum perpendiculari radio, ferè diametro conuexitatis.

XVI.

Si radij intra prædictum corpus non sint paralleli, sed versus densum conuexi terminum conuergant, in breuiori distantia à conuexo, quàm est diameter conuexitatis, ad punctum concurrent: at si punctum radians propius fuerit conuexo, diametro conuexitatis, radij puncti illius refracti diuergent in corpore denso.

XVII.

Radij ex vno radiante puncto paralleli in lentem vitream vtrimque

conuexam perpendiculariter obiectam incidentes propiùs post lentem concurrunt ad vnum punctum quàm sit diameter circuli, qui format auersam superficiem: & propiùs quàm sesquidiameter obuersæ Quod si conuexitas vtraque ex eodem circulo fuerint, concursus post lentem fiet in puncto, quod abest semidiametro obuersi conuexi ferè, hoc est in centro eius.

XVIII.

Si fuerint inæquales conuexitates, concursus post lentem in illa distantia continget, quæ inter vtriusque conuexitatis semidiametros versatur: quæ erit maior semidiametro minoris, quia altera superficies est de maiori circulo; quæ si de æquali fuisset, semidiametri mensura in hoc interuallo fuisset: minor autem erit diametro minoris; quia superficies minoris non est sola: denique minor erit semidiametro maioris, quia si superficiei minoris circulus æqualis fuisset, in hoc interuallo fuisset; nunc autem non æqualis, sed minor est.

XIX.

Longinqui puncti de re visibili radij proximè lentem concurrunt: propinquioris puncti radiorum concursus post lentem est remotior: cuius ope visibilium externorum pictura in pariete, vel charta in cubiculo clauso ad punctum concursus specierum posita, licet inuersa, bellè repræsentatur, sed quæ alterius lentis, vel plani speculi beneficio possit erigi: distinctissima verò pictura semidiametrum, vel diametrum lentium ostendet.

XX.

Vt se habet diameter picturæ ad eius distantiam à lente, sic ferè se habet diameter rei visæ ad eius etiam distantiam à lente: cùm radij visibilis se mutuò secent penè in vno puncto proximè centrum lentis: cùm igitur anguli ad verticem sint æquales, habent etiam bases cruribus vtrinque proportionales: eapropter rei visibilis distantia lente conuexa possumus vnica statione metiri.

XXI.

Quæcumque lens, vel quodlibet perspicilium facit radios de directis certi generis refractos eiusdem, vel alterius generis, toties idem facit radios de directis istius posterioris generis refractos prioris generis: sic enim tam per specula quàm per dioptras radij solis fiunt de parallelis concurrentes, & de concurrentibus paralleli: hinc conclude diopticorum instrumentorum ope de nocte litteras ad stellarum radios legi, & candelæ lumen longissimè proijci posse.

XXII.

Lens illa ad ignem excitandum aptissima est, quæ obiectum maximè distans, vt solem, lunam & stellas distinctissimè repræsentat, cum vtrobique radij omnes tam visibilis quàm calefacientis in vnum pun-

ctum confluant: verùm deinceps agendum est de lentibus, quatenus vt perspicilia visioni succurrunt.

DIOPTRICÆ
PARS TERTIA.

De perspiciliis visionem iuuantibus.

SVpponendum est axes visorios per centra pupillæ, & humorum transeuntes in naturali motu, vel quiete parallelos esse; voluntariè autem ad propinquiora videnda contorqueri. Secundò visionem illam esse distinctam, qua partes rei subtilissimæ in conspectum veniunt: confusam, in qua partibus maioribus apparentibus minores confusis inter se terminis oblitterantur: claram, cum res in multo lumine; obscuram denique, cum in tenui lumine videtur. Tertiò crystallinum humorem esse lentem vtrinque conuexam hyperbolicâ fere connexitate, & tunicam retiformem esse concauam papyri vice post crystallinum, quæ picturam obiecti excipit, eâque afficitur: an verò in huius picturæ sensione visio formaliter consistat, vlteriùs inquirendum: quidquid sit, cum vtraque retina similiter afficitur, vnica res percipitur, duæ verò, si dissimiliter pingantur. Reliqua theorematibus prosequamur.

Theorema primum.

Retiformis eundem situm retinens non potest tam à propinquis quàm à remotis pingi; debet igitur accedere ad crystallinum humorem vt remota, & ab ea recedere vt propinqua distinctè videamus, nisi hunc accessum & recessum in ipso crystallino statuamus. Hic autem motus constrictione processuum ciliarium pectinatim distinctorum, veluti quodam diaphragmate latera oculorum contrahente, & figuram oculi in ellipsoidem vertente fieri potest, vt retiformis à crystallino recedat: sicque eorumdem processuum dilatatione latera oculi ampliante, & oculum in lenticularem figuram conuertente fundus retiformis ad crystallinum accedere potest: ideóque fortè humores fluxiles sunt, & excepto crystallino dilatari possunt.

II.

Senes & alii propinqua confusè, & remota distinctè vident, quorum retina magis ad crystallinum accedit: myopes contraria de causa propinqua distinctè, & remota confusè; iuuenes verò qui mouent retinam, prout necessarium est, vtraque distinctè vident.

III.

Conuergentibus vnius puncti radiosi radiis versus oculum distincta visio fieri nequit, sed tantùm parallelis, aut diuergentibus.

IV.

Interualla inter oculum & rem minutam sunt in euersa proportione angulorum visoriorum; id est, quo longiùs visibile recedit, hoc minori angulo cernitur; & ideò minus, remotius apparet: maius autem & propinquius, cùm sub maiori videtur angulo, cùm rei distania cognoscitur, & ignota est eiusdem magnitudo; vel cùm ignotâ distantiâ magnitudo cognoscitur.

V.

Per lentes conuexas, oculo posito intra propinquitatem puncti concursus radiorum ab vno visibilis puncto fluentium, visibile repræsentatur in suo situ, id est erectum, si sit erectum, & contra.

VI.

Quælibet per conuexas lentes erecta repræsentatio visibilium erectorum remotorum est necessariò confusa; & tanto confusior, quantò lens conuexa ab oculo remotior: erecta tamen propinquorum repræsentatio senibus distincta est; & oculus in puncto concursus parallelorum collocatus videt propinqua adhuc erecta: quamuis in puncto concursus radiorum à puncto rei defluentium, punctum illud per lentem distinctè non videat, sed omnium confusissimè.

VII.

Punctum euersionis, in quo se secant binæ lineæ binis punctis rei visibilis in centrum oculi confluentes, est inter visibile & lentem, non autem inter lentem & oculum, qui constitutus extra punctum ad quod concurrunt vnius visibilis puncti radij, visibilis puncta per lentem conuexam euerso situ videt.

VIII.

Oculus presbytæ nil penè euersarum rerum per lentem conuexam distinctè videt; videt autem oculus myopis in certa remotione oculi à concursu radiorum vnius puncti rei visibilis: quia illius oculi assuefacti sunt ad radiationem parallelam puncti remoti: huius verò oculi ad radios sensibiliter ab vno puncto diuergentes.

IX.

Vnica superficies conuexa paruo circulo, in cogendis radiis ad punctum æquipollet duabus lentis superficiebus conuexis ex vno circulo duplo maiore desumptis.

X.

Omnis per conuexam lentem erecta imago visibilis rei, est necessariò maior iusto.

XI.

Oculus quo fuerit remotior à conuexa lente versus punctum concursus eò videt angustiorem hemisphærij partem per lentem, eamque partem eo minorem æstimat.

XII.

Oculus visibile longinquum respiciens propè lentem, vbi recesserit eminus, versus concursus punctum, maius quàm prope videbit.

XIII.

Oculus idem visibile conspicatus per duas lentes conuexas, singulas seorsim, si fuerit distantia ab oculo in eadem proportione ad suæ conuexitatis diametrum; per vtramque lentem seorsim videbitur eadem magnitudine: sin variata erit proportio, maius videbit per lentem, cuius distantia in proportione fuerit maior.

XIV.

Oculus, quo longiùs extra punctum concursus abierit, hoc euersa minora videt; sed duobus conuexis maiora, & distincta, sed euersa videntur; quamuis erigi, & erecta super papyrum depingi possint: tribus autem conuexis non solum erigi, sed maiora, distinctaque videri possunt.

XV.

Si radii ab vno puncto radiante paralleli, vel diuergentes, ingressi fuerint in cauam densioris superficiem, & punctum illud extra centrum superficiei fuerit, diuergunt magis per corpus densi. si vero propiùs fuerit lenti centro cauitatis, diuergentes, refractione factâ, minus diuergent intra corpus densum.

XVI.

Diuergentes intra corpus densius versus cauum eius terminum, eo pertransito diuergunt ampliùs: quod similiter contingit radiis per corpus densum parallelis, & radiis diuergentibus versus lentem, quocumque ad lentem situ puncti radiantis, si lens vel vtrimque caua vtcamque, vel altrinsecus etiam plana fuerit: statim enim atque lentem pertransierunt, magis diuergunt.

XVII.

Visibilia longinqua lente satis caua in vno puncto ab oculo myopis collocata, distincta, sed minora repræsentantur; quod si longius recesserit ab oculo caua lens, pauciora visibilia per cauam ad oculum veniēt, & minora repræsentabuntur, quantisper lens non propinquior fiet rei visibili quàm oculo.

XVIII.

Si caua lens proximè oculum applicanda sit, vt cùm naso perspicilia feruntur, tum cuique sua propria est ad visionem efficiendam: quod si propter nimiam cauitatem lens aliqua proximè oculum, visibilia confusa reddit, ex aliquo interuallo distincta reddit, & contra.

DIOPTRICÆ
PARS QVARTA.

De tubis, qui vulgò Batauici, vel Hollandici, aut Galilæi vocantur: seu de iunctis lentibus cauis, & conuexis.

SVpponendum est tubum, de quo hic, esse cylindricum opacum cauum, cuius bina ostia vitris perspicuis claudumtur, estque instrumentum oculare ad res longinquas cominus aspiciendas, cuius vitrum vnum visibile, aliud oculum respicit. Linea vero per vtriusque vitri centra conuexitatem, & cauitatum transiens vna, & eadem esse debet, vt vitra parallela sint: his positis sit

Theorema primum.

Si caua lens radiationes vnius puncti quæ traiecta lente conuexâ refractionem passæ conuergunt, intercipiat antequam illæ veniant ad punctum sui concursus: aut punctum concursus prorogabitur in longinquum, aut radiationes incedent porro parallelæ, aut denique rursum diuergent.

II.

Visibilia lente caua & conuexa maiori quantitate super papyro depingi possunt, quàm per solam conuexam, sed euersa.

III.

Quemadmodum cum duplici speculo parabolico comburi posset in infinitum, data materiâ igni resistente, idem fieri posset duplici lente, quarum vna conuexa parallelos radios in punctum cogeret, & caua proximè focum posita radios de concurrentibus parallelos efficeret: quod similiter continget cum vnico speculo parabolico, & vnica lente caua.

IV.

Cauâ lente proximè oculum posita, quæ solitaria confusa præstaret visibilia; quæcumque lens maiori circulo conuexa in vna certa remotione à caua distinguit, & auget visibilia.

V.

Conuexo posito in quacumque distantia ab oculo, quodcumque cauum, quod solitariè applicatum oculo, confusa præstet visibilia,

quodque sit minori circulo cauum quàm quo vtitur conuexum, in certa distantia, situ inter oculum & conuexum distincta exhiberet visibilia.

VI.

In instrumentis maiora & distincta exhibentibus visibilia, nulla caua lens valde longè abest à punctis concursus, post lentem conuexam existentibus.

VII.

Proposita lente conuexa, cauarum lentium oculo proximè applicatarum, quæ minori circulo caua est, ea longius à conuexo distat, & propiùs ad punctum concursus applicanda est.

VIII.

Cauum vnum & idem proximè applicatum, vt cum conuexis diuersis distincta exhibeat, ab omnium illorum concursibus æquali interuallo debet abesse.

IX.

Proposita lente caua prope oculum lentes magno circulo conuexæ longam requirunt distantiam à caua, & oculo, paruo breuem: & quo maiori vel minori, eo longiorem, aut breuiorem.

X.

Proposito conuexo caua minoris circuli repræsentant visibilia maiora, maioris minora.

XI.

Lens caua breuissimo interuallo longiùs digressa à conuexa, multum auget visibilia.

XII.

Proposita lente caua proximè oculum, conuexarum lentium, quæ minori circulo conuexa est, minora repræsentat visibilia, quæ maiori, maiora: igitur visibilia pro libito magna repræsentari possunt, cum aucta proportione circulorum cauitatis, & conuexitatis, augeantur visibilia.

XIII.

Inæquali lentium distantia, repræsentantur visibilia æquali augmento magnitudinis; breuiori tamen instrumento maiora repræsentabuntur, si conuexo minori existente, maior fit proportio inter conuexitatem & cauitatem, quàm in longiori instrumento.

XIV.

Posito concauo, clariùs maiori, seu latiori conuexo, quàm minori, similiterque posito conuexo, per cauum maioris circuli, quàm per minoris cauum, visibilia repræsentantur.

XV.

Portionis de hemisphærio, per lentes visæ pars media & perpendiculari proxima fortiùs, seu clariùs videtur, quàm limbus circumcirca: &

& angustâ lentis conuexæ portione, cæteris paribus, distinctiora repræsentantur visibilia, lata verò, confusiora.

XVI.

Visibile in sublimi, in profundo, à dextra, vel sinistra, & vbicunque volueris, cerni potest: quod fit cùm lentis cauæ diameter pupilla latior est, & satis lata, vt oculus à centro eius iusto spatio ad latera migrare possit.

XVII.

Posito cauo, duo conuexa similia applicata inuicem proximè, pro vno, ferè dimidiant longitudinem instrumenti, quod eorum conuexorum vnum solùm habet: & simul quantitatem speciei minuunt, quæ per aliquod artificium mensurari potest.

XVIII.

Vnica superficies concauo paruo circulo in disgregandis radiis ferè æquipollet duabus superficiebns concauis ex circulo duplo maiore desumptis.

XIX.

In lente, quæ æqualibus circulis hinc conuexa est, inde caua, omnes radij qui perpendiculari intra corpus paralleli incedunt, æqualibus angulis in vtraque superficie refringuntur, & refracti retinent diuergentiam, aut parallelitatem eandem.

XX.

Radij vnius puncti in lentem simul conuexam & cauam eodem circulo incidentes, si punctum longinquum fuerit, transita lente conuergunt: si propinquus diametro circuli, diuergunt ampliùs quàm ab origine.

XXI.

Si cauitas ex maiori circulo fuerit, quàm conuexitas, radij puncti longinqui traiecta lente conuergunt; plus quidem (seu post breuius interuallum quàm si solùm conuexum esset) si cauitatis circulus maior fuerit triplo circuli conuexitatis: minus verò (& post maius interuallum) si minor triplo fuerit. *Aliter*. Cauitas maioris circuli derogans conuexitati minoris, præstat effectum conuexitatis circuli valdè magni; dicatur *meniscus*: æquipollet lenti purè conuexæ: punctum autem menisci reperietur, si tantùm elongetur concursus, quantum lens attenuatur.

XXII.

Si cauitas ex minori circulo fuerit quàm conuexitas, radij vnius puncti diametro post conuexum collocati diuergunt ampliùs transita lente. *Aliter*. Conuexitas maioris circuli derogans cauitati minoris,

Xxx

præstat effectum cauitatis circuli valdè magni.

XXIII.

Si cauitas lentis vnâ superficie conuexæ centrum suum habuerit interius centro conuexi; radij puncti etiam longinqui per lentem efficiuntur diuergentes. Illa verò æquipollet lenti purè cauæ circulo valdè magno.

XXIV.

Diuersi generis lentes puræ, associatæ, inuicémque contiguæ, æquipollent lenti mixti generis, & tandem lenti puræ: Instrumétum autem fieri potest magni circuli conuexo, quod breuius sit vulgaribus, vno videlicet conuexo intus latente: sicut & instrumentum magni circuli cauo, ita vt etiam superet circulum conuexi, quod visibilia maiora solitis instrumentis referat, intus nempe cauo, vt priùs conuexo, geminato.

XXV.

Conuexo parui circuli, etiam minoris circulo concaui apud oculum, parari potest instrumentum longissimum, quod præstet ingentia visibilia.

XXVI.

Manente eadem distantia lentis ab oculo, & linea ex oculo in lentis vmbilicum per centra conuexitatum, vel cauitatum transeunte, refractiones contingunt proximè eędem, vtram velis dissimilium superficierum lentis oculos obuertas: effectus autem sequi potest, tametsi vitrum vtrumque tam quòd ad oculum, quàm quod ad visibile vergit, cauum, vel conuexum, vel vitrum ad oculum conuexum, ad visibilia cauum fuerit.

XXVII.

Tota perfectio quartæ istius partis, & totius ferè Dioptricæ sita est in lentibus, & alijs medijs assignandis, & exhibendis, quæ radios à puncto dato recedentes, seu diuergentes ad punctum datum refractione colligant, vel parallelos, aut magis diuergentes reddant: radios etiam data inclinatione, seu conuergentia ad se inuicem accedentes ad punctum datum refringant, vel parallelos, aut quomodocumque diuergentes, vel etiam magis aut minus conuergentes efficiant: parallelos denique in punctum datum constrigant, vel conuergentes, aut diuergentes pro libito reddant.

XXVIII.

Lentibus, & alijs instrumentis dioptricis quodlibet à quolibet repræsentari potest, elephas, aut domus à grano milij, & granum milij à domo, &c. cum pro varia vitrorum, & crystallorum præparatio-

ne & figura, radij, & species cuiuslibet obiecti quocumque modo in quemlibet locum mitti, & sub quolibet angulo visũ ingredi possint.

XXIX.

Quemadmodum specula conuexa radios eo magis disgregant, & calorem, ac imagines obiectorum minuunt, quo conuexiora sunt: & vt concaua radios congregant, & calorem, ac imagines augent; ita lentes crystallinæ, & alia diaphana densiora magis concaua lumen, calorem, ac species magis disgregant, & minuunt; lentes verò conuexæ radios congregant, & calorem, ac imagines amplificant.

XXX.

Si refractiones sint inclinationibus quibuscumque proportionales, vt vult Maurolycus, qui maximo inclinationis angulo, quem rectum putat, angulum refractionis tribuit $\frac{1}{4}$ vnius recti continentem, refractiones erunt vniformiter difformes, hoc est proportionem Geometricam seruabunt. *Deinceps autem paucis de refractionibus astronomicis agamus.*

XXXI.

Certum est regionem aëris inferiorem ob vapores quibus condensatur, æthereâ densiorem esse, atque adeò in conuexa superficie istius aëris singula cœli puncta, vel singulos syderum radios in eam obliquè incidentes refringi.

XXXII.

Vt parallaxes deprimunt, ita refractiones astra eleuant; vtque illis varias à terra planetarum distantias, ita his mediorum proportionem ad inuicem, vt aëris ad aquam, quoad eorum densitatem, & altitudinem, aëris à terra inuestigare licet. Vnde Keplerus concludit aquam aere 153330468 2. densiorem esse; atque adeo cyathum aquæ totidem aëris cyathis æquiponderare: ex eo quod in inclinatione 80. graduum refractio ex aëre in aquam sit 19.17. ex æthere verò in aërem 59. & per consequens ex æthere in aquam 19.18: proportio itaque est eadem quæ 1. ad 1177 $\frac{7}{11}$, sed aëris altitudini tantummodo leucam tribuit.

XXXIII.

Variæ sunt aeris refractiones pro varia aeris densitate, & altitudine in diuersis locis, vel temporibus: vnde Hollandi 17. diebus ante legitimum tempus supremum solis marginem sub 76. gradibus altitudinis poli viderunt, dum per nouam Zemblam quærerent fretum, quo transirent in Oceanum Scythicum, & Orientalem: qui cùm Solem vltimò vidissent anno 1596. die 3. Nouembris, Sol qui tantùm redire debebat 11. Februarij anni sequentis, 24. Ianuarij visus est.

XXXIV.

Colores auroræ, seu crepusculorum tam matutinorũ quàm vesper-

tinorum, iridis, & aliorum meteororum tam refractione, quàm reflexione formantur: cùm enim diaphaneitas vaporum opacetur, & exhalationum opacitas perspicuitati iungatur, catoptrici, atque mesoptici instrumenti rationem habent; vt contingit in speculis vitreis tam planis quàm concauis, & conuexis, qui vnam, vel plures imagines reflexione, & vnam vel plures refractione repræsentant. Ex quibus reliqua poteris intelligere, quæ ad opticam astronomiam pertinent.



OPTICÆ
LIBER QVARTVS.
DE PARALLAXIBVS.

PRÆFATIO.

PARALLAXIS, seu diuersitas aspectus, est apparentis loci à vero distantia, quæ nascitur ex linea à centro terræ vsque ad phænomenon in sublimi conspectum, & ex linea ab oculo, vel superficie terræ ad idem phænomenon producta; has autem lineas instrumenta meteoroscopica exhibent, illam videlicet perpendiculo, hanc verò dioptra: quibus positis sequuntur.

DEFINITIONES.

I. Linea veri loci est quæ à centro mundi per phænomenon vsque in firmamentum ducitur.

II. Linea visi, seu apparentis loci est quæ ab oculo prospicientis per phænomenon vsque in sphæram stellatam protenditur.

III. Verus locus phænomeni est punctum firmamenti, quod linea visi loci terminat.

IV. Vera distantia phænomeni à vertice est arcus verticalis circuli inter verticem seu zenith loci, & verum locum phænomeni interceptus. *Aliter*, Est angulus in centro mundi contentus à gnomone, & linea veri loci.

V. Visa distantia, seu apparens à vertice est arcus inter zenith, & visum locum phænomeni. *Aliter*. Est angulus contentus à gnomone, & linea visi loci.

VI. Parallaxis verticalis est arcus verticalis circuli inter verum, & visum locum phænomeni. *Aliter*. Est angulus contentus à lineis veri, & visi loci in phænomeno.

VII. Vera declinatio phænomeni est declinatio loci veri: seu arcus à polo mundi per locum verum descendentis portio inter locum verum & æquinoctialem.

VIII. Ascensio recta vera est ascensio recta loci veri cometæ, seu æquinoctialis ab initio ♈, vsque ad arcum veræ declinationis.

IX. Ascensio recta visa est ascensio recta loci visi, seu arcus æquinoctialis ab initio ♈ vsque ad arcum visæ declinationis.

X. Parallaxis declinationis est differentia inter arcus veræ, & visæ declinationis.

XI. Parallaxis ascensionis est differentia veræ, & visæ ascensionis, siue arcus æquinoctialis inter arcus veræ, & visæ declinationis.

XII. Distantia vera phænomeni ab aliquo est arcus circuli maximi inter astrum & locum visum phænomeni.

XIII. Parallaxis distantiæ est differentia inter veram, & visam distantiam.

XIV. Arcus motus veri est quem transit locus cometæ verus.

XV. Arcus motus visi est quem transit locus cometæ visus.

XVI. Parallaxis motus est arcus quo differunt arcus veri, & arcus visi motus.

XVII. Differentia parallaxium verticalium est arcus inter loca visa, siue angulus quem in phænomeno continent duæ lineæ visi loci, & veri.

XVIII. Differentia parallaxium latitudinis est differentia inter duas latitudines visas. *Quibus ex triplici Scipionis ordine adductis, eiusdem propositiones affiramus.*

Propositio prima.

QVando phænomenon est in linea à mundi centro ad verticem prospicientis, linea tum veri, & visi loci, vna & eadem linea sunt.

Prop. II.

Quando phænomenon est in linea à centro mundi ad verticem prospicientis nulla tum est parallaxis, cum vna & eadem sit linea ve-

ri, & visi loci; vnde & est idem visus & verus locus, adeoque nulla inter eos differentia, arcusve intercedit, quæ erat parallaxis. Item lineæ veri & visi loci nullum continent angulum; parallaxis enim est angulus ab illis contentus.

Prop. III.

In parallaxi distantia visa phænomeni à vertice est maior quàm vera.

Prop. IV. Problema I.

Cùm tria in hoc negotio occurrant; distantia visa: distantia vera, & parallaxis, datis duabus quibuscumque eorum tertium indagare. Hinc si ex distantia visa detrahamus parallaxim, habebimus distantiam veram, scilicet phænomeni à vertice. Si ex distantia visa detrahamus distantiam veram, habebimus parallaxim: si distantiam veram, & parallaxim componamus simul, habebimus distantiam visam.

Prop. V.

Parallaxis verticalis, seu locus verus, & visus in verticali circulo in eodem verticali sunt non in alio, & alio verticali.

Prop. VI.

Si duo vel plura phænomena sint in eadem loci linea, quod eorum est propinquius terræ, maiorem habet parallaxim; quod remotius, minorem.

Prop. VII.

Si duo vel plura phænomena fuerint in linea veri loci: quod eorum propinquius est terræ, maiorem habet parallaxim: quod remotius minorem.

Prop. VIII. *Probl.* II.

Data parallaxi phænomeni, dataque in verticali circulo distantia eius à vertice indagare quot milliariis distet à centro terræ. Supponitur verò notum quot quæsitorum milliariũ sit semidiameter terræ.

Prop. IX. *Probl.* III.

Data distantia visa phænomeni à vertice, nec non dato quot milliaribus distet idem phænomenon à centro mundi, inuestigare eius parallaxim.

Data distantia visa phænomeni à vertice nec non dato quot milliaribus distet idem phænomenon, à centro mundi inuestigare eius parallaxim.

Prop. X. Probl. IV.

Data vera distantia phænomeni à vertice, & à centro terræ in milliaribus, indagare eius parallaxim.

Prop. XI.

Si ad lineas loci visi phænomeni alicuius ab eodem terræ puncto ductas lineæ à centro mundi perpendiculares agantur, maxima perpendicularium est, quæ incumbit lineæ contingenti terram in dato puncto, reliquæ eo minores quo lineæ ad quas ducuntur propius ad verticem accedunt.

Prop. XII.

Maxima parallaxis fit ad lineam terram contingentem; cæteræ minores quo propiores sunt vertici, nulla tamen datur parallaxis minima. *Videantur 19. modi quibus parallaxis verticalis inuestigatur apud Claramontium; qui deinceps agit de differentia parallaxium verticalium.*

Prop. XIII. Probl. V.

Determinare in verticali circulo communi duobus terræ locis triplicem situm, in quorum altero differentia parallaxium, vel duorum locorum visorum aggreget duas parallaxes, in altero sit ea differentia vnicæ parallaxi æqualis, in altero differentia ea ipsa vna cum maiori duarum parallaxium reliquam ac maiorem componet parallaxim.

Prop. XIV.

Differentia parallaxium verticalium, quæ in puncto circuli verticalis intermedio inter vertices duorum terræ locorum fit, est maxima omnium differentiarum aliarum dictis terræ locis accidentium, minima autem est, quæ fit in linea tangente terram in remotiore dictorum duorum terræ locorum, id est, in horizonte puncti remotioris interiecta, inter eas verò differentiæ maiores sunt, quo propiores sunt puncto inter vertices medio, minores quo propiores lineæ contingenti, siue horizonti.

Prop. XV. Probl. VI.

Data differentia parallaxium verticalium, & distantia visa phænomeni à vertice alterutrorum duorum terræ locorum, quorum inter se distantia sit data (scilicet quot gradibus, circuli maximi inter se distent) indagare vtriusque loci parallaxim. *Hic autem propositionem 11. & 12. repetit: postea verò de parallaxibus ad æquinoctialem agit.*

Prop. XVI.

Verticalis parallaxis ex qua parallaxis ascensionis rectæ nascitur, potest parallaxi ascensionis rectæ ex se nascente esse æqualis; potest esse ea maior, vel minor.

Prop. XVII.

Data sola quantitate parallaxis verticalis non potest cognosci parallaxis rectæ ascensionis.

Prop XVIII. Probl. VII.

Data parallaxi verticali phænomeni vnà cum distantia eiusdem à vertice visa, atque angulo azimuthali, reperire parallaxim ascensionis rectæ; supponitur autem nota eleuatio poli loci obseruationis.

Prop. *XIX.* Prop. *VIII.*

Data parallaxi verticali, declinatione visa, ac distantia visa phænomeni à vertice, & eleuatione poli loci vbi fit obseruatio, indagare parallaxim ascensionis rectæ.

Prop. *XX. Probl. IX.*

Data parallaxi ascensionis rectæ vnà cum distantia visa phænomeni à vertice: necnon eleuatione poli, & angulo azimuthali inuestigare parallaxim verticalem. Eadem inuestigabitur, si pro triangulo azimuthali constiterit declinatio visa phænomeni, proindéque eius complementum.

Prop. *XXI.*

Parallaxis verticalis semper maior est parallaxi declinationis, quæ ex ipsa nascitur.

Prop. *XXII.* Probl. *X.*

Data parallaxi verticali cum reliquis tribus datis prop. 18. vel data eadem parallaxi verticali cum reliquis datis prop. 19. inuestigare rallaxim declinationis.

Prop. *XXIII.* Prop. *XI.*

Data parallaxi declinationis vnà cum distantia visa phęnomeni à vertice, & angulo azimuthali, necnon eleuatione poli indagare parallaxim verticalem.

Prop. XXIV.

Cùm arcus verticalis in quo est phænomenon, adeóque parallaxis verticalis idem cum meridiano est, nulla tum est parallaxis ascensionis rectæ. *Vnde cùm verticalis in quo phænomenon reperitur, idem fuerit cum meridiano, parallaxis verticalis, & parallaxis declinationis eadem erunt:* deinceps verò de differentia parallaxium ad æquinoctialem.

Prop. *XXV*

Vt parallaxes ad æquinoctialem nascuntur ex parallaxibus verticalibus, ita differentiæ parallaxium ad æquinoctialem nascuntur ex differentiis parallaxium verticalium.

Prop. XXV. Probl. XII.

Datis declinationibus, & ascensionibus rectis ex parallaxi visis, ideóque differentia parallaxium ascensionum phænomeni respectu duorum terræ locorum, quorum notæ sint poli eleuationes, notáque sit longitudinis inter eas differentia, si qua datur, reperire eius

Phæno-

phænomeni parallaxim verticalem quoad vtrumque locum: supponitur verò, præter alia, notum etiam punctum eclipticæ quod in meridiano tum reperitur.

Prop. XXVII.

Cum ex parallaxi locus verus à viso differt, phænomeni declinatio maior videtur australiori terræ loco, minor Septentrionali: seu visa declinatio australiori loco; & maior minùs australi loco: *alioqui si minor videatur, erit refractio.*

Prob. XXVIII. *Prob.* XIII.

Ex datis distantiis visis phænomeni à duorum terræ locorum verticibus eodem tempore obseruatis, & datis Azimuth inuestigare verticales parallaxes amborum locorum sigillatim. Supponuntur notæ locorum terræ longitudines, & latitudines.

Prob. XXIX. *Probl.* XVI.

Ex iisdem datis, quæ in 26. prop. parallaxes alio modo inuestigare. *Iisdem ferme propositionibus ea discutiuntur, quæ de parallaxibus ad eclipticam docet.*

Prop. XXX.

Verticalis parallaxis ex qua parallaxis ascensionis rectæ nascitur, potest parallaxi ascensionis rectæ ex se nascenti esse æqualis, potest ea maior, & minor esse.

Prop. XXXI.

Data sola quantitate parallaxis verticalis non potest cognosci parallaxis rectæ ascensionis.

Prop. XXXII.

Parallaxis verticalis semper maior est parallaxi latitudinis, quæ ex ipsa nascitur.

Prop. XXXIII. *Prob.* XV.

Data distantia verticis à polo mundi, & angulo azimuthali quocúnque in eo vertice facta ab arcu verticali ad phænomenon quodcúnque datum: datóque puncto eclipticæ, quod in meridiano tum reperitur, inuestigare arcum inter verticem, & polum eclipticæ, & angulum, quem prior angulus verticalis continet cum arcu à vertice ad eclipticæ polum ducto.

Probl. XXXIV. *Prop.* XVI.

Data parallaxi verticali phænomeni vnà cum distantia visa eiusdem à vertice, atque angulo azimuthali, nec non distantia poli mundi à vertice, reperire parallaxim longitudinis pariter, & latitudinis: supponitur verò datum punctum, quod est in meridiano.

Prop. XXXV. Probl. XVII.

Data parallaxi verticali, & reliquis quæ in præcedente, & pro distantia visa, latitudine visa indagare parallaxim longitudinis.

Prop. XXXVI. Probl. XVIII.

Data parallaxi longitudinis vnà cum distantia visa phænomeni à vertice, nec non eleuatione poli, & angulo azimuthali, inuestigare parallaxim verticalem. *Idem fiet*, si pro angulo azimuthali constiterit latitudo visa phænomeni: supponitur autem semper notum qui punctus eclipticæ sit in meridiano.

Prop. XXXVII. Probl. XIX.

Data parallaxi latitudinis vnà cum distantia visa phænomeni à vertice, & angulo azimuthali, nec non eleuatione poli, & puncto, qui in ecliptica, indagare parallaxim verticalem.

Prop. XXXVIII.

Cum verticalis in quo est phænomenon, atque phænomeni parallaxis verticalis transit per locum eclipticæ, nulla tunc est parallaxis longitudinis: *Imo & parallaxis latitudinis, eadem est cum verticali.*

Prop. XXXIX.

Cum arcus verticalis transit per polos eclipticæ, secat eclipticam in 90 gradu ab horizonte ad punctum vbi secatur à dicta verticali, & gradu 90.

Prop. XL.

Cum phænomenon apparet in 90 gradu eclipticæ ab ascendente, nullam tunc patitur longitudinis parallaxim.

Prop. XLI. Probl. XX.

Ex loco viso locum verum secundum longitudinem phænomeni deducere; item secundum ascensionem rectam reperiatur locus visus phænomeni cum fuerit in grad. 90. ab ascendente, idem enim erit locus verus longitudinis ex præcedente. Similiter reperiatur locus visus phænomeni secundùm ascensionem rectam cum fuerit in meridiano, & habebimus locum pariter verum horum secundùm eandem ascensionem rectam.

Prop. XLII. Probl. XXI.

Parallaxim phænomeni secundùm longitudinem, & secundùm ascensionem rectam deprehendere, sumptis veris locis, vt in proxima; tum extra grad. 90. eclipticæ ab ascendente pro longitudinis parallaxi, extra meridianum pro parallaxi ascensionis obseruetur phænomenon, habebimusque locum visum inter quem & verum differentia erit parallaxis quæsita.

Prop. XLIII. Probl. XXII.

Visum locum phænomeni tum ad æquinoctialem, tum ad eclipticam inuestigare, quod armillâ Ptolomæi ad eclipticam: armilla verò æquatoria Tychonis, vel similibus instrumentis ad æquinoctialem peragitur: ex distantia quoque à duabus stellis fixis vtrumque locum visum deducere licet. *Deinceps verò de differētijs parallaxiū ad eclipticā.*

Prop. XLIV. Probl. XXIII.

Datis longitudinibus & latitudinibus phænomeni alicuius visis, & sic data differentia parallaxium ad eclipticam respectu duorum terræ locorum, qui vel secundùm altitudinem poli differant, vel solùm, secundùm accessum ad Orientem recessumve, vel secundùm vtramque rationem, at differentiæ eiusmodi, siue plures, siue vna tantùm datæ sint, reperire parallaxim phænomeni verticalem ad vtrumque terræ locum, & demum verum eius locum. Præter dicta, dari debet punctum eclipticæ in meridiano, siue innotescat ex dato tempore, & hora obseruationum, siue ex stella in meridiano tempore obseruationum existente, siue alio quouis modo. *Quo problemate nititur Scipio vt cometas sublunares esse probet.*

LEMMA I.

Ex datis longitudine, & latitudine phænomeni declinationem eius reperire. Datur enim arcus complementi latitudinis phænomeni ex data latitudine, datúrque arcus inter polum eclipticæ, & polum mundi, & datur angulus quem in polo eclipticæ duo illi arcus continent: metitur autem eiusmodi angulum arcus inter punctum longitudinis datæ phænomeni & principium ♋. ergo datur eiusdem trianguli basis, quæ est complementum declinationis phænomeni arcus, scilicet inter polum mundi, & phænomenon.

LEMMA II.

Dato complemento declinationis phænomeni, & dato arcu distantiæ verticis à polo mundi, nec non angulo, quem duo illi arcus in polo mundi continent, reperire arcum à vertice ad phænomenon, scilicet distantiam phænomeni verticalem, seu complementum altitudinis eiusdem verticalis. Dantur enim duo arcus trianguli, & angulus quem continent, dabitur itaque basis quæ est distantia quæsita phænomeni à vertice.

Prop. XLV.

Iisdem suppositis differentiis longitudinis, & latitudinis visarum, siue iisdem suppositis locis visis phænomeni ad duo terræ loca, quorum altitudo poli diuersa, eo maiores erunt parallaxes, quo minus polorum altitudines inter se distiterint: quousque angulus quem

arcus verticalium parallaxium in loco phænomeni vero, vbi se secant, continens, fuerit acutus. *Sequens propositio litteris indiget. Nunc autem agendum est de parallaxi distantia phænomeni ab aliqua stella.*

Prop. XLVI.

Quantacumque sit parallaxis verticalis phænomeni dati, potest illud ab aliqua stella æqui distare secundùm locum visum, atque secundùm locum verum (& ita omni parallaxi distantiæ carere) & magis distare, & minus distare. *Videantur 2. lemmata.*

Prop. XLVII.

Ex sola quantitate parallaxis distantiæ non potest inferri quantitas parallaxis verticalis.

Prop. XLVIII. Probl. XXIV.

Data distantia verticali phænomeni, & distantia data eiusdem verticis à stella, nec non dato angulo, quem in vertice continent duo arcus dictæ distantiæ stellæ, & distantiæ Phænomeni à vertice, & data præterea distantiæ parallaxi, si quæ est, inuestigare parallaxim verticalem.

Prop. XLIX. Probl. XXV.

Data distantia verticali visa phænomeni, data distantia eiusdem visa à stella, dataque eiusdem distantiæ parallaxi, & data distantia stellæ eiusdem à vertice, indagare eandem parallaxim verticalem.

Prop. L. Probl. XXV.

Data parallaxi verticali phænomeni distantiáque eius visa à vertice nec non à stella, cuius itidem stellæ à vertice distantia nota sit, vel cum parallaxi verticali datæ sint distantiæ à vertice obseruatoris tum phænomeni, tum stellæ, sitque datus angulus ab illis arcubus contentus, inuestigare parallaxim distantiæ, distantiámque veram, & visam.

Prop. LI. Probl. XXVI.

Data parallaxi distantiæ visæ, data phænomeni distantiá à stella aliqua fixa, & dato angulo, quem in loco veri phænomeni continet cum arcu verticali arcus distantiæ veræ phænomeni ab eadem stella, inuestigare parallaxim verticalem.

Prop. LII. Probl. XXVII.

Data parallaxi distantiæ visæ datæ phænomeni à stella aliqua fixa, & dato angulo, quem in loco viso continet cum arcu verticali arcus distantiæ visæ phænomeni ab eadem stella inuestigare parallaxim verticalem. *Nunc vero de differentia parallaxium distantia phænomeni ab aliqua stella dicamus, quæ etiam nascitur ex differentia parallaxium verticalium.*

Prop. LIII. *Probl.* XXVIII.

Cum duo terræ loca latitudine solùm, non etiam longitudine discrepauerint, & phænomenon tempore obseruationum fuerit in meridiano: obseruatæ verò sint distantiæ visæ eiusdem phænomeni ab eadem stella fixa, & constet tempus obseruationum, inuestigare parallaxim verticalem phænomeni ad vtrumque locum; notâ tamen altitudine poli vtriusque loci.

Prop. LIX. *Probl.* XXIX.

Iisdem datis cum phænomenon fuerit extra meridianum, quærere easdem parallaxes verticales; at præterea dari debent distantiæ visi phænomeni ab vtroque vertice; siue duo terræ loca differant sola latitudine, siue latitudine & longitudine nempe datis. *Duæ sequentes propositiones litteris indigent. Qui plura volet, Scipionis Antitychonem legat*, quo contendit præteritorum annorum cometas fuisse sublunares. Cùm autem hocce tractatu singula prosequamur quæ ad visum pertinent; notandum est parallaxes non solùm in cœlis, verùm etiam vbique deprehendi, verbi gratia in cubiculo, in quo si ex duobus locis candelam spectaueris, illam duobus locis diuersis respondentem inuenies: idem continget si digitum statim vno, statim altero cernas oculo, deprehendes enim digitum tuum ab oculo sinistro conspectû in alio loco videri, quàm ab oculo dextro. Quod etiam experieris duabus candelis, diuersitas enim vmbrarum aspectuum differentiam repræsentabit: nam sicut eo minor est parallaxis, quò astrum à nobis remotius, & puncto verticali propinquius fuerit, ita diuersitas vmbrarum eò minus sensibilis est, quo longiùs corpus opacum distat à candelis: vnde quis parallelismum instituere poterit inter vmbrarum varias proiectiones, & visuum diuersitatem. Quod quia facillimum est, huic libello finem impono, postquam terminos præsenti schemate explicauero, quorum ignorantia nonnullos ab ista parte Optices reuocare posset.

Z M F K A E D C

Itaque AD semicirculus terram repræsentat, cuius centrum C: ZK circulus cœlum octauum refert, habens idem centrum C. CAZ est semidiameter firmamenti; CA semidiameter terræ, quæ 14000 in semidiametro firmamenti continetur: punctum Z est zenith, seu punctum verticale. Iam verò E sit *phænomenon*, CE ducatur vsque in

M, & A E vſque in F. Linea C E M eſt *linea veri loci*; A E F eſt *linea viſi loci*. M *verus locus*; F *locus viſus*. *Diſtantia vera phænomeni à vertice* eſt angulus A C E, qui idem eſt cum angulo Z C M. *Diſtantia viſa* eſt angulus Z A E.

Cùm autem angulus exterior Z A E æqualis ſit duobus interioribus A C E, A E C, erit angulus A E C differentia inter angulum Z A E, viſam diſtantiam, & A C E veram diſtantiã. Quæ differentia, quive angulus A E C dicitur *parallaxis verticalis*. Arcus Z M eſt *vera diſtantia verticalis*. *diſtãtia viſa* eſt arcus Z F. *Parallaxis* eſt arcus M F, nẽpe differentia inter verã, & viſam diſtantiam. Vbi ſemper eſt ſupponendũ, ſemidiametrũ terræ nullam habere ſenſibilem proportionem ad firmamenti ſemidiametrum. Quo poſito, ducatur C K parallela rectæ A E F, anguli alterni A E C, E C K, ſeu M C K erunt æquales; at A E C eſt parallaxis verticalis, igitur & M C k, cui cùm M K ſit æqualis, cùm ſit vtérque totidem graduum, ſequitur arcum M k eſſe parallaxim verticalem exactè. Cùm autem A C ſit inſenſibilis ad circulum Z K, F K etiam erit inſenſibilis: ideóque puncta F, k, quoad ſenſum pro eodem puncto: & arcus M K pro M F habebuntur: igitur M F eſt parallaxis, id eſt differentia inter verum, & viſum locum, motum, vel arcum.

Rurſus eodem ſchemate prop. 8. 9. & 10 explicabo, vt hæc meliùs intelligantur: itaque 8. propoſitio docet qua ratione ex data parrallaxi phænomeni, & eius à vertice diſtantia ſcire poſſimus quot milliaribus diſtet à centro terræ. Sit igitur phænomenon E, cuius diſtantia viſa à vertice ſit angulus Z A E, & data parallaxis angulus A E C: ſcies quot milliarium ſit C E, ſi producas E A in directum, & ad eam ſic productam ducatur à puncto C, perpendicularis C I, quoniam datur angulus Z A E, datur etiam angulus ei ad verticem C A I, cuius cum ſinus ſit oppoſitum latus C I in triangulo rectangulo A I C, eſt C I latus notum in partibus, quarum ſinus totus A C eſt 100000. Quarum ergo partium eſt C A, earumdem notum erit C I per regulam aureã. Et quoniam datur in triangulo rectangulo C I E, datur angulus acutus I E C, & latus C I, dabuntur quoque reliqua duo latera, adeoque C E; vnde patebit quot milliarium ſit diſtantia phænomeni à centro terræ. Ex viſa autem diſtantia phænomeni à vertice, & diſtantia phænomeni à centro terræ datis, cognoſcemus parallaxim per nonam prop. hac ratione. Sit igitur notum quantus ſit angulus Z A E; & quot milliarium ſit C E, inueſtigandus eſt angulus A E C: cùm autem detur angulus Z A E, datur angulus ei ad verticem C A I, & latus

CA, igitur & alia latera dãtur, ac proinde latus CI ex 29 Regiomõtani dabitur in iisdem milliaribus, quibus constat CA. Notum est etiam quot sit milliarium CE; cùm igitur in triangulo rectangulo CIE, duo latera CE, CI data sint, anguli acuti cognoscentur, ac proinde angulus parallaxis quæsitus CEI, vel MEF notus erit. Denique ex vera distantia phænomeni à vertice nota & notis milliaribus, quibus distat à centro, ita illius parallaxim indagabimus. Sit datus angulus ZCM, vel ACE vera distantia à vertice; notúmque sit quot milliarium sit CE, indagare oportet angulum CEA; quoniam nota sunt duo latera seorsum CA, CE, constat enim quot milliarium singula sint, & continent angulum ACE datum, erunt quoque noti reliqui duo anguli AE singillatim, ex prop. 49. l. 1. triangul. Regiom. adeóque notus erit angulus IEC, qui est parallaxis quæsita.

Cæterùm alia plurima de parallaxibus apud Kepl. in Optica Astronomica videri poterunt, nec enim omnia hocce breui compendio possunt afferri; cui finem impono, cùm artem Perspectiuæ breuissimè proposuero.



DE ARTE

PERSPECTIVÆ

LIBER QVINTVS.

PRÆFATIO.



TAMETSI Anaglyptica, Sculptoria, Cælatoria, Statuaria, & Plastica miros effectus edant, his tamen Perspectiua longè nobilior censenda, cùm sit illarum veluti mater: vt enim ectypa fiunt ex protypis, ita hæc ex designationibus, siue proiectionibus: ex quibus consurgunt omnes partes Architecturæ, nempe ordinatio, dispositio, eurythmia, symmetria, decor, & distributio siue œconomia, tresque dispositionis species, ichnographia videlicet,

ſeu formæ in plano deſcriptio; orthographia, hoc eſt erectæ frontis imago operis faciem oſtendens: & ſciographia, ſeu ſcenographia, id eſt frontium compoſitio per apparentiam linearum tanquam in vnum concurrentium. Pictura vero maximè pendet ex arte Perſpectiuæ, cum illa nihil aliud eſſe videatur quàm ſolidorum in planas tabulas proiectio, ſiue delineationem ſpectes, ſiue lumen, vmbram, & colorem.

Perſpectiua autem eſt ars repræſentandi obiecta prout apparent: adeo vt pictor ille ſit perfectior, qui magis oculos fallit; hinc figuræ ſecundùm Geometricas rationes factæ, à figuris Perſpectiuæ differunt, vt veræ ab apparentibus.

Repræſentatio obiectorum prout apparent, eſt germana pictura, & ſectio pyramidis; quæ fit à ſpeciebus ab obiectis in oculum deriuatis, & in plano, ſeu vitro medio ſui veſtigium relinquentibus: hinc illi modi deducuntur, quibus ignarus cancellis, vel talco, ſpeculis, &c. quidpiam depingere poteſt.

Delineatio obiecti, ſeu pictura eodem modo variatur, quo plani ſectio: quæ totuplex eſſe poteſt, quotuplex erit obiectum, vel ſitus, & diſtantia obiecti, & tabulæ pyramidem viſualem ſecantis: ſed maximam varietatem afferre videtur verticis pyramidis mutatio, quo manente, viſio non mutatur, quacumque facta in baſi pyramidis mutatione.

Quemadmodum Aſtronomi, & Geographi certis punctis & lineis vtuntur, vt explicent quæ contingunt in cæleſti, ac terreſtri globo, ita Perſpectiui quaſdam lineas, & puncta ſtatuunt, quibus artem exprimant; præcipuæ vero lineæ ſunt linea terræ, quæ ponitur in vltima parte tabellæ, & linea horizontalis quæ ducitur in eadem cum oculi altitudine.

Linea terræ determinat res pingendas, eſt communis plano perſpectiuo, & geometrico, & eſt terminus inter prædictum planum, & obiectum.

Linea horizontalis tria puncta continet, nempe punctum oculi, hoc eſt primarium, & alia duo hinc inde oppoſita, & in æquali à primario puncto diſtantia. Hîc autem ea ſolùm afferemus, quæ à Steuino in Sciagraphia demonſtrata ſunt.

DEFINI-

DEFINITIONES.

I. Sciagraphia est rerum extantium plana imitatio, quæ tamen eminens quoque videatur.

II. Si corpus à plano horizontali ita secetur, vt in eo communes sectiones aut reuera, aut cogitatione dumtaxat exstantium superficierum appareant, apparens forma Ichnographia dicitur.

III. Si corpus plano ad horizontem recto ita secetur, vt in secante communes sectiones ipsius & superficierum aut reuera, aut cogitatione dumtaxat exstantium appareant, apparens forma Ortographia dicitur.

IV. Adumbrandum dicitur id cuius Sciagraphia optatur: & huius expressa sciagraphia, vmbra.

V. Pauimentum est planum in quod adumbrandum insistit.

VI. Oculus est punctum quod oculi visibile respicientis munus obire fingitur.

VII. Opterocathetus est recta ab oculo ad pauimentum perpendicularis, eiusque in pauimento terminus peda dicitur.

VIII. Opterometros est recta opterocatheto æqualis.

IX. Vitruum est planum infinitum quod inter oculum, & adumbrandum constituitur; in quo adumbranda forma vmbram suam exhibere sumitur.

X Vitri basis est ipsius, & pauimenti communis sectio.

XI. Radius est recta ab oculo procedens.

XII. Concursus est punctum quo vmbræ parallelarum rectarum, quæ adumbrandæ proponuntur, concurrunt.

XIII. Et rectæ, quæ ad idem concursus punctum coëunt, concurrentes dicuntur.

XIV. Recta in pauimento à peda ad vitrei basim dapedogramme dicitur: atque eius in vitruo tactus, dapedogrammaphe.

XV. Si à dato in pauimento adumbrando puncto infinitæ contra dapedogrammen parallela vitrei basim intersecet, harum intersectio prima vitrei basis sectio dicitur.

XVI Si recta datum, adumbrandum in pauimento punctum cum pedâ connectens vitrei basim intersecet, hæc secunda vitrei basis sectio dicitur.

Zzz.

Definitiones.

I. Adumbrandum physicum punctum, eius vmbram in vitreo physico, & oculum physicum in eadem recta consistere.

II. Datum in vitreo punctum, lineam, planumve vmbræ suæ vice fungi.

PROPOSITIONES.

I.

Recta inter duas vmbras adumbrandorum punctorum interiecta, est vmbra rectæ ad dicta puncta terminata.

II.

Adumbrandæ parallelæ lineæ per vitreum eisdem parallelum conspectæ habent vmbras in vitreo parallelas.

III.

Si adumbrandæ parallelæ rectæ per vitreum ipsis non parallelum conspiciantur, illarum vmbræ continuatæ concurrent in eodem puncto radij adumbrandis rectis paralleli: & si adumbrandæ pauimento parallelæ sint, punctum concursus eadem altitudine supra pauimentum extat quâ oculus.

IV.

Si rectæ parallelæ, omnes quidem ad pauimentum, nulla autem ad vitreum parallelæ, inter se verò ita situ variatæ vt illarum vnus ordo alteri non sit parallelus, adumbrandæ proponuntur, illarum diuersa puncta concursus æqualiter vitrei basim supereminent.

V.

Adumbrando in pauimento puncto, & vitreo eidem perpendiculari, & peda, & opterocatheto datis, eius vmbra inueniri potest: sicut & vmbra adumbrandi in aëre supra pauimentum exstantis puncti.

VI.

Vitreo circa vitrei basim tanquam axem, & opterocatheto circa pedā ita conuersis, vt opterocathetus rectæ in vitreo vitrei-basi perpēdiculari perpetuò parallela sit vmbra adumbrandi in pauimento puncti eodem loco in vitreo semper existet. *Reliqua de oculo, & alijs punctis inueniendis vide apud Steuinum, Aguilonium, & alios Perspectiuos, præsertim verò apud Guid Vbaldum, qui sex libris demonstrat qua ratione*

puncta, linea, superficies, & corpora in sectione repraesentari debeant: ideoque pauca tantùm hic delibabimus.

VII.

Pluribus modis quodlibet repræsentari potest, quorum 23. Guid-Vbaldus demonstrat: tot autem figurarum describendarum rationes esse possunt, quot sunt modi repræsentandarum duarum imaginum sese in dato puncto intersecantium, nam inuento tali concursu, punctum quæsitum dabitur: inuentis autem pūcti & lineā terminantibus, aut in medio eius existentibus lineæ per inuēta puncta duci poterunt, quarum extrema superficies, ac proinde corpora repræsentabunt.

VIII.

Omne punctum obiecti repræsentatur in vitro, seu tabula secundùm eam rationem, qua species illius ad oculum perueniens, & transiens per planum concipitur aliquod sui vestigium relinquere; punctum verò, vel linea recta oculo in directum opposita, solum punctū; reliquæ verò lineæ, sicut & superficies recta oculo secundùm longitudinem opposita, lineam, omnis autem alia superficies, superficiem in plano relinquit, ac depingit: linea enim transitu suo punctum, superficies lineam, corpus denique superficiem facit.

IX.

Quotiescumque superficies est parallela vitro, in eo depingi concipitur cum omnibus lineis in illa expressis secundùm figuram ei similem, quam habet; ideóque geometrica, seu realis figura à perspectiua, seu apparente non differt: quando verò obliqua est, hæ duæ figuræ differunt inter se.

X.

Cùm res quælibet eò minor, aut maior apparere soleat, quò sub minori, vel maiori cernitur angulo, circulus ab oculi centro descriptus demonstrabit quantò fenestræ, quæ sunt in vertice turris, fenestris æquales, quæ sunt in ima turris parte, his minores appareant; & quantò maiores fieri debeant, vt in vertice, vel alia quapiam turris parte semper æquales appareant.

XI.

Rei cuiuslibet vmbra, ac proinde pictura exhibetur, si cognoscatur punctum lucidum lucem emittens in corpus opacum, lineâ enim perpendiculari à puncto opaco, lineis item ductis per punctum lucidum, & opacum, & per extrema duarum priorum linearum perpendicularium, concursus istarum linearum dabit punctum vmbræ à puncto opaco proiectæ; eadémque ratione reliquis punctis exhibitis, si-

gura totius vmbræ dabitur.

XII.

Præter communem pingendi, ac repræsentandi modum in triplici visionis genere fieri possunt imagines, & picturæ ab obiectis maximè diuersæ, quæ tamen perfectissimè repræsentent obiectum ex dato puncto: sic enim in visione directa fiunt perspectiuæ inuersæ, quæ tantummodo referunt obiectum ex puncto dato. Qua ratione omnia quæ continentur in plana superficie horizontali centum leucarum depingi possunt in plano pedali, si nempe super illam superficiem pedali altitudine oculus erectus fuerit. Deinde si imago depicta sumatur pro obiecto depingendo: & ea quæ sunt in plano horizontali pro pictura, fiet imago longitudinis centum leucarum repræsentans obiectum pedale. Hinc si caput depictum sit pedale, quod pro pictura supra planum horizontale statuatur, supra quod prædictum caput depingatur, prout species concurrentes ab obiecto ad oculum, vltra picturam capitis incidunt in illud planum, dabitur pictura longissima referens caput breuissimum: quantumcumque enim imago sit in se difformis, semper oculo perfectè repræsentabit obiectum, quoties idem pyramidis specierum vertex in eo recipietur, quem obiectum faceret.

XIII.

Cylindrus aptissimus est, quo difformes imagines ita videantur, vt obiecta perfectè referãt; colligit enim lineas inter se distantes, quemadmodum vitra polygona res inter se distantes in vnum corpus, & locum colligunt: quamuis & vnum corpus etiam diuidant, & in totidem constituant locis diuersis, quot facies habuerint. Ex quibus colligi potest quomodo triplici visione vna dictio, vel integra sententia Latinè vel Gallicè scripta varijs linguis, & in pluribus locis legi, vel plures in vnicam linguam, vnicumque locum coalescere queant.

XIV.

Obiectum depingendum, vel imago ex eo puncto spectanda est, ex quo immotus oculus vno intuitu totum obiectum, vel totam imaginem commode spectare possit: an verò hæc distantia sit illa, ex qua obiectum facit angulum 60. graduum in oculo terminatum, hoc est triangulum æquilaterum, vt plurimi arbitrantur: an linea diametralis obiecti visi: an angulus 40, 20, 10, aut 5, graduum plus, minus, generaliter determinari nequit, cùm tanta sit oculorum diuersitas, vix vt duo reperiantur, qui ex vna distantia obiectum, aut imaginem spe-

ctent æqualiter. Omitto varia instrumenta, quibus vtuntur Perspectiui, vt singula visione directâ, vel per speculum, aut per diuersa media refractionis spectata intueantur, vt summa cum animi voluptate istis omnibus propositionibus ita (mi THEOTIME) vtaris, nihil vt esse possit in singulis Opticæ libris, quod ad Dei præpotentis gloriam non referas, dum ruri vitam degis Angelicam, & iugi feruentium orationum exercitio ad æternitatem properans nihil aliud præter amorem diuinum ἰώμενος, ἐθελόπονος, ἢ θεόστοργος amplecteris.

MONITVM PRIMVM.

SI per otium licuisset, præcedenti libro subiunxissem adumbrationis explicationem & praxim; cuius solius propositiones nunc accipies. Est igitur Scenographia locorum inuentio, vbi radij omnes visorij ad quodlibet visibile destinati planum diaphanum inter oculum, & visibile positum penetrant.

PRIMA PROPOSITIO.

VT tota distantiarum linea ad partem eius inter visibile & diaphanum, ita oculi altitudo ad altitudinem imaginis visibilis horizontalis in communi sectione plani oppositi ad illud destinati, & diaphani.

II. PROPOSITIO.

VT tota linea distantiarum ad partem eius inter diaphanum & oculum, ita altitudo puncti sublimis ad altitudinem imaginis eius in communi sectione diaphani, & radij ad illud destinati supra imaginem basis eius.

Quare si fiat vt tota linea distantiarum ad partem eius inter tabulam & visibile horizontale, ita altitudo oculi ad aliud, habebitur locus visibilis horizontalis in communi sectione diaphani, & plani optici ad illud directi.

Deinde si fiat vt tota distantiarum linea ad partem eius inter oculum & diaphanum, ita puncti sublimis vel eminentis altitudo ad aliud, habebitur altitudo imaginis eius in communi sectione diaphani, & optici plani ad illud directi supra imaginem basis eius.

Hæc autem quarta proportionalis vel Geometricè ex lineis, vel ex numeris per auream regulam, vel organo facile reperietur: & in communi fectiones plani optici & diaphani dabitur locus imaginis cuiuflibet vifibilis. Et hoc eft geminum totius artis fundamentum.

MONITVM II.

DVm illum amici fingularis tractatum expectabis, accipe duos alios tractatus eruditiffimos Clariffimorum Anglorum, primum nempe Gualteri Vverneri; fecundum viri nobilis, fubtiliffimique Philofophi D. Hobs, qui ex proprijs hypothefibus refractiones profequitur; erit igitur ille primus tractatus liber fextus: fecundus verò feptimus liber Opticæ, qui duo libri plurimum iuuabunt, atque perficient quæ libro tertio præcedenti continentur.



LIBER SEXTVS.

PROBLEMA

AD

TABVLAS REFRACTIONVM.

EX OBSERVATIS CONSTRVENDAS,

sequenti processu apo lictico soluendum.



N visione Refractâ, Angulo Refractionis quocunque, in cuiuscunque generis Mediis, per obseruationem cognito, alium quemlibet requisitum per simplicem Analogismum exhibere. Atque adeo, si opus fuerit, reliquos omnes (solo, rationis communis ex termi i probatis constitutæ adminiculo) cum angulis suis incidentiæ, & refractis, conformatos, in Tabulam ordinatam redigere.

DEFINITIO I.

Visio, quæ vnius oculi adminiculo fit, *singularis*, quæ vtriusque, *Coniugata*, vocetur.

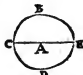
SVPPOSITIO I.

IN Visione, siue singulari, siue coniugatâ (quod ad præsens Problema attinet) obiectum radians, *Punctuale*, siue minimum Visibile intelligatur, idque in medio densiori, oculis in rariori existentibus, collocatum.

DEFINITIO II.

IN Visione coniugata, recta illa distantia, quæ est inter Oculorum centra (quoniam super punctum illius Medium liberè, & nunquam

circulariter est conuertibilis vt vel parallela, vel perpendicularis, vel alio quocunque situ obliquo, ad Planum contactus, pro videntis arbitrio, applicari possit, ad exemplar diametri Pupillæ in Visione singulari) *Diameter visualis* vocetur. Et punctum eius intermedium (centro Pupillæ Analogum) *centrum visuale.*



Vt sint puncta C,E oculorum centra, & sit circulus B C D E oculus imaginarius per illa centra transiens; sitque recta C E, scilicet distantia inter oculorum centra: & oculi imaginarij diameter, *Diameter visualis*, & oculi imaginarij centrum A, *Centrum visuale.* Hinc fit, vt in visione coniugatâ per binos solummodo radios laterales, qui oculorum pupillas penetrantes ad ipsorum centra C & E, rectâ perueniunt, ac terminantur, omnis fieri intelligatur Visio.

SVPPOSITIO II.

Diameter visualis, ab ipsorum oculorum potiùs quàm pupillarum centro, sumenda erat, quia distantia illa quæ est inter pupillarum centra in obiecti punctualis intuitione, pro obiecti distantiâ alterabilis est, scilicet in obiecti propinquitate contractior, in longinquitate extensior. Quæ variatio distantiæ oculorum, (vtcunque pupillæ, ex oculorum in sedibus suis osseis, & immobilibus obuolutione contorqueantur & distrahantur) oculorum centris immotis non contingit. Quare non tantùm in sequentibus (quæ ad particularem hanc quæstionem spectant) sed generaliter in doctrinâ opticâ, siue directâ, siue reflexâ, siue refractâ, vbi de Visione coniugatâ agitur, tanquam principium per se manifestum, & certum statuendum est, *Diametrum Visualem sibi perpetuò constantem, & æqualem esse.*

DEFINITIO III.

IN Visione coniugatâ, recta linea quæ in Plano contactûs, inter duo puncta, in quibus lineæ radiosæ ab obiecto vtrinque ad oculos procedentes, tum incidunt, tùm refringuntur. Ac proinde inter duo plana refractionis, in quibus lineæ illæ radiosæ refractæ ad oculum deferuntur, comprehenditur (quia diametro visuali perpetuò parallela existit, & similem cum diametro spatij circularis, vel elliptici incidentiæ, in visione singulari conformitatem obtinet) *Diameter incidentiæ*, & punctum eius medium, *Centrum incidentiæ*, vel *centrum Refractionis* appelletur.

DEFI.

DEFINITIO IV.

IN Visione coniugatá, si Planum per Diametrum visualem Plano contactûs Parallelam, ipsum contactûs Planum ad rectos angulos secans ductum intelligatur, & in recta linea, à centro visuali ad Planum contactus, vel Diametrum perpendiculari, in plano isto producta, obiectum positum sit. Et in eodem item plano duæ lineæ Radiosæ ab obiecto vtrinque egredientes in planum contactûs incidunt, & à punctis incidentiæ, in quibus refringuntur, Refractæ ad oculos procedant, Planum istud idcirco *Planum refractionis oculare* vocetur.

DEFINITIO V.

ET linea ista Recta, ab obiecto ad centrum visuale, inter lineas radiosas refractas media (ipsa refractionis expers) *Linea interradiosa directa* vocetur.

DEFINITIO VI.

ET quia linea ista interradiosa planum contactûs ab obiecto ad centrum Visuale recta pertransit, visio quæ in Plano Refractionis Oculari, per tres istas lineas fit, *Visio coniugata Recta vocetur.*

PRO DEFINITIONE 2.3.4.5.6.



OBiectum. B. Oculi D & S.
Diameter visualis. D Q S. } ad def. 2.
Centrum visuale. Q.
Diameter incidentiæ F C G. } ad def. 3.
Centrum incidentiæ C.
Lineæ Radiosæ refractæ. B F D. & B G S.
Linearum radiosarum partes incidentes. B F. & B G.
Linearum radiosarum partes refractæ. F D, & G S.
Linea interradiosa directa. B C Q.
Lineæ interradiosæ pars incidens. B C. } ad def. 5.
Lineæ interradiosæ pars refracta. C Q.

Aaaa

Planum per Diametrum Visualem D S, oculos scil. D & S, atque obiectum B transiens, planum contactûs in diametro incidentiæ F G ad rectos angulos secans, *Planum Refractionis oculare*, subintelligendum est. } ad def. 4.

Delineatio quintilatera D F B G S, vnà cum interradiosâ directâ B C Q, *Visionis coniugatæ rectæ* integra descriptio est. Nam per tres lineas D F B; S G B, Q C B in plano refractionis oculari fit visio coniugata recta vt est in definitione. } ad def. 6.

DEFINITIO VII.

IN visione coniugatâ rectâ (Obiecto in medio densiore, oculo in rariore positis) excessus bipartitus (bina scilicet segmenta) diametri visualis supra basim trianguli per linearum radiosarum partes incidentes, ad ipsum diametrum rectâ productas facti ex linearum in rariore & magis dilatatæ constitutionis medio prouenien s, *Radiositatis dilatatio* vocetur.

Linearum radiosarum partes incidentes à diametri incidentiæ terminis. F G. ad diametrum visualem rectâ productæ B F M. B G N. . . . .

Triangulum per lineas productas factum M B N. huius basis. M N.

Radiositatis dilatatio. D M + N S. } ad def. 7.

DEFINITIO VIII.

IN visione coniugatâ, si diametro visuali plano contactûs parallelâ collocatâ, planum per centrum visuale transiens tum diametrum, tum planum contactûs, ad rectos angulos secet, & in plano illo obiectum ex altera parte, extra centri visualis perpendiculum positum sit, & per diametri visualis terminos (ipsos sc. oculos) atque obiectum ducta sint duo plana, planum contactûs ad rectos angulos secantia, & se mutuò in obiecti perpendiculo intersecantia, & in duobus hisce planis ab obiecto vtrinque ad oculos delatæ sint duæ lineæ radiosæ, in diametri incidentiæ terminis refractæ, duo ista plana, *Refractionis radiosa Plana* vocentur.

DEFINITIO IX.

CVm autem linea ab obiecto ad centrum visuale, in centro incidentiæ refracta, linea interradiosa refracta fit, in plano intermedio per centrum visuale & obiectum transeunte ducta. Planum illud intermedium, *Planum refractionis interradiosæ* appelletur.

DEFINITIO X.

ET cum linea interradiosa, pars scil. illius incidens, obliquè in planum contactûs incidat, visio quæ in tribus istis planis per tres prædictas lineas refractas fit, *Visio coniugata obliqua* nominetur.

AD DEFINITIONEM 8. 9. 10.

PLanorum contactûs & Refractionis intermediæ communis sectio L G. Perpendiculum incidentiæ & Refractionis. M C N. Obiectum. F. Perpendiculum obiecti. F G. Diameter visualis D E S. Centrum visuale. E diameter incidentiæ. B C H Centrum incidentiæ. C. Lineæ radiosæ refractæ F B D & F H S. Linearum radiosarum partes incidentes. F B. & F H. Linearum radiosarum partes refractæ. B D. & H S. Linea interradiosa refracta. F C E. Lineæ interradiosæ partes, incidens. F C. Refracta. C E. Perpendiculum oculorum D Y. & S X. Perpendiculum centri visualis. E L.

Duo plana refractionis radiosæ D Y B G F. & S X H G F, planum contactûs ad rectos angulos secantia in rectis lineis Y B G & X H G. } ad def. 8.

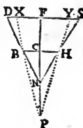
Planum refractionis interradiosæ. E L C G F. planum contactûs ad rectos angulos secans in rectâ lineâ. L C G. } ad def. 9.

Delineatio quintilatera D B F H S, vnâ cum lineâ interradiosâ refractâ E C F, pro visionis coniugatæ obliquæ integrâ descriptione habenda est. Nam per tres lineas refractas D B F. S H F. & E C F. in tribus refractionis planis (deff. 8. & 9. descriptis) existentes, fit *visio coniugata obliqua*, vt videre est in definitione. } ad def. 10.

SVPPOSITIO III.

Ex tribus lineis refractis, quæ ab obiecto ad diametrum visualem procedunt, cùm duarum Radiosarum refractio cum refractione transuersâ siue oculari composita atque implicata sit, sola verò interradiosa simplicis refractionis capax sit. Ex lineâ interradiosâ tantùm, ad planum contactûs, siue, quod idem est, ad perpendiculum incidentiæ & refractionis habitudine, Anguli incidentiæ & Refracti constituendi, & eorum differentiæ & æqualitates sumendæ sunt. Quod non in præsenti tantùm quæstione, sed generaliter in visione coniugatâ obliquâ intelligendum, & supponendum est.

LEMMA.

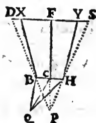


Si duorum triangulorum Isoscelium B P H, & B N H: altitudinum inæqualium C P, & C N. quæ super eadem basi B H constituuntur, latera P B & P H, & N B. N H ad rectam lineam D S, basi B H parallelam producantur, duo triangula P X Y, N D S basium inæqualium. X Y, D S constituentia; trianguli producti altitudinis maioris X P Y. minor erit basis X Y. Eius verò cuius altitudo minor est, D N S. basis maior erit D S.

DEFINITIO XI.

In visione coniugatâ obliquâ, si planum per diametrum visualem & diametrum incidentiæ ei parallelam ductum intelligatur, & in plano illo lineæ interradiosæ pars refracta directè continuetur donec pars à centro incidentiæ ad terminum continuationis lineæ interradiosæ parti incidenti æqualis sit, & à termino continuationis per diametri incidentiæ terminos in prædicto plano, ductæ sint duæ rectæ lineæ triangulum super diametrum visualem constituentes (cuius basis) per lemma (diametro minor erit) Excessus bipartitus (bina scil. segmenta) diametri visualis, supra Trianguli istius basim, *Radiositatis dilatatio*, in casu isto visionis coniugatæ obliquæ, censendus est.

Visionis coniugatæ obliquæ delineatio D B Q H S.



Planum refractionis oculare. D B P H S.

Lineæ interradiosæ pars refracta F C, à centro incidentiæ C, ad distantiam C P. lineæ interradiosæ, parti incidenti Q C æqualem, certa continuata C P.

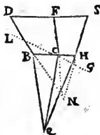
Lineæ rectæ P B X & P H Y, à puncto P. per diametri incidentiæ terminos B & H ad diametrum visualem in plano oculari recta productæ triangulum X P Y super basim X Y constituentes.

Excelsus diametri Visualis D S supra basim. X Y (iuxta definitionem) radiositatis dilatatio, bina scilicet segmenta. D X + Y S.

DEFINITIO XII.

IN visione coniugatâ obliquâ, quoniam linearum Radiosarum partes refractæ, quæ ab oculis ad diametri incidentiæ terminos procedunt & à terminis illis rectâ continuatæ in obiecti perpendiculo coincidentes locum imaginis in coincidentiæ puncto constituunt. Lineæ idcirco interradiosæ vnà cum Radiosis rectâ continuatæ, pars illa quæ à centro incidentiæ ad imagidem terminatur, *Linea imaginaria* vocetur.

AD DEFINITIONEM XII.



VIsionis coniugatæ obliquæ delineatio. D B Q H S. Planorum contactûs, & refractionis communis sectio L C G. Obiecti perpendiculum Q G: (vbi debet intelligi recta connectens puncta Q G) linearum radiosarum partes refractæ. D B, & S H, à diametri incidentiæ terminis B, & H, in planis suis rectâ continuatæ in obiecti perpendiculo Q G coincidunt. Coincidentiæ punctum N locus imaginis est.

Lineæ interradiosæ pars refracta F C. à centro incidentiæ C in plano suo recta continuata ad imaginem N. Linea igitur C N, lineâ imaginaria est.

DEFINITIO XIII.

LIneæ interradiosæ quæ partes suas similes, æquales habent, vt partes incidentes inter se æquales, & partes refractas in visione

obliquâ; vel directas in visione rectâ, inter se item æquales, *similiter æquales* vocentur.

AXIOMA.

IN visione siue singulari, siue coniugatâ, anguli refracti angulis incidentiæ æqualibus respondentes, æquales sunt, & Anguli refracti maiores, maioribus incidentiæ angulis, minores minoribus respondent.

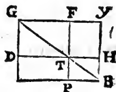
THEOREMA I.

IN visione singulari obliquâ, si perpendicula obiecti, oculi, & interstitij, in diuersis Visionis actibus, æqualia fuerint, anguli incidentiæ æquales erunt.

Sit in actu visionis aliquo, planorum contactûs, & refractionis communis sectio DH.

Et in plano refractionis, in mediis suis, obliquè posita sint obiectum B & oculus G.

Sitque obiecti perpendiculum BH: Oculi GD.



Ac proinde interstitij perpendiculum DH, siue quod ei æquale est, GY.

Ductaque sit in plano refractionis ab obiecto B ad oculum G, linea radiosa BTG, in puncto incidentiæ & refractionis T refracta.

Et ad punctum T in eodem plano, ducatur incidentiæ & refractionis perpendiculum PTF.

Erit inde angulus incidentiæ BTP, & refractus ei respondens GTF.

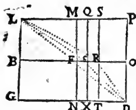
In actu visionis alio quocunque, sit planorum contactûs, & refractionis communis sectio BK.

Et in plano refractionis ducta sint tria perpendicula DK, LB, LP, perpendiculis tribus similibus BH, GD, GY actus prioris, æqualia.

Et ad punctum D collocetur obiectum, & ad punctum L oculus.

Ductaque sit in plano refractionis ab obiecto D ad oculum L, linea radiosa DCL in puncto incidentiæ & refractionis C, refracta.

Et per punctum illud C in eodem plano, ducatur incidentiæ & refractionis perpendiculum XCQ.



Erit inde angulus incidentiæ D C X, & L C Q angulus refractus ei respondens. His constitutis, probandum est, angulos incidentiæ D R T, & D C X æquales esse.

Si æquales non sunt, erit angulus D C X angulo D R T; vel maior, vel minor. Sit primum si fieri potest maior.

Sumpto igitur puncto incidentiæ R, ductisque perpendiculo T R S, & lineæ radiosæ parte incidente D R, sit angulus incidentiæ D R T, minor angulo incidentiæ D C X.

Ductâque lineæ radiosę parte refractâ R L, fiet angulus L R S, refractus angulo incidentiæ D R T respondens.

Cùm sit igitur angulus incidentię D R T minor angulo incidentię D C X, erit (per Axioma) angulus refractus L R S minor refracto L C Q. Est autem recta L S maior quàm recta L Q.

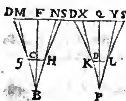
Æqualibus igitur existentibus rectis R S, & C Q, est angulus L R S maior angulo L C Q.

Erit ergo Angulus L R S & minor & maior angulo L C Q, quod est impossibile. Non est igitur angulus D C X maior angulo D R T.

In simile absurdum inciditur, supposito angulo D C X, angulo B T P minore, & sumpto angulo aliquo incidentię vt P F N maiore quàm sit angulus D C X. Itaque in visione, &c. Quod erat probandum.

THEOREMA II.

IN Visione coniugatâ rectâ, si lineæ interradiosę in diuersis visionis actibus similiter ęquales fuerint, Radiositatis dilatationes, ęquales erunt.



Sit primò visionis coniugatæ rectę actus aliquis D G B H S, in plano refractionis oculari (secundum def. 6.) constitutus.

Et in plano illo linearum radiosarum partes incidentes B G, & B H. à diametri incidentię terminis G, & H, ad diametrum visualem directè continuentur, triangulum M B N super basim M N constituentes.

Est igitur (per def. 7.) Excessus bipartitus diametri visualis D S supra basim M N. (bina scil. segmenta) D M + N S radiositatis dilatatio in hoc actu.

Secundò, ſit actus alius quicunque D K P L S, in plano refractionis oculari (per def. 6.) conſtitutus, ſitque P R æq. B C & R Q æq. C F.

Et in plano illo, linearum radioſarum partes incidentes P K, P L, à diametri incidentiæ terminis K & L ad diametrum viſualem directè continuentur Triangulum X P Y ſuper baſim X Y conſtituentes.

Eſt igitur (per def. 7.) Exceſſus bipartitus diametri viſualis D S, ſupra baſim X Y (bina ſcil. ſegmenta) D X + Y S, radioſitatis dilatatio in hoc ſecundo actu.

His conſtitutis dilatationes iſtas radioſas D M + N S, actûs primi, & D X + Y S, ſecundi, æquales eſſe probandum eſt.

Angulus G B C, angulo K P R. (per Theor. 1.) æqualis eſt, & angulus H B C angulo L P R, item æqualis.

Angulus igitur G B H trianguli M B N angulo K P L trianguli X P Y æqualis eſt.

Perpendiculum item B C F, perpendiculo P R Q ex hypotheſi æquale eſt.

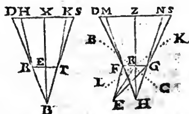
Baſis igitur M N, baſi X Y æqualis eſt.

Exceſſus igitur diametri viſualis D S, ſupra baſim M N, ſcil. D M + N S qui radioſitatis dilatatio actus primi eſt, exceſſui diametri viſualis D S, ſupra baſim X Y ſcil. D X + Y S qui radioſitatis dilatatio actus ſecundi eſt æqualis eſt. Quod probandum erat.

THEOREMA III.

In duobus viſionis coniugatæ, altero rectæ, altero obliquæ actibus ſi lineæ interradioſæ, directa, in viſione rectâ, refracta in obliquâ, ſimiliter æquales fuerint, diameter incidentiæ vnius, diametro incidentiæ alterius æqualis erit.

Sit viſionis rectæ actus D R B T S in plano refractionis (ſecundũ def. 6.) conſtitutus.



In quo, obiectum B, diameter viſualis D X S, lineæ refractæ B R D, B T S, linea interradioſa directa. B E X & diameter incidentiæ. R E T.

Et ſit viſionis obliquæ actus D F E G S, in duobus planis refractionis radioſæ & tertio interradioſæ (ex præſcripto def. 10.) conſtructus.

In quo, planorum contactûs & refractionis interradioſæ ſectio cõmunis B C. Incidentiæ & refractionis perpendiculum L R K. obiectum

iectum Q. Diameter visualis DHS, lineæ radiosæ refractæ. QFD, HGS. linea interradiosa refracta ERZ. & diameter incidentiæ FRG.

His positis probandum est diametros incidentiæ duorum actuum RET, FRG, æquales esse.

In actu visionis rectæ DRBTS linearum radiosarum partes incidentes BR, BT, à diametri incidentiæ terminis R.T. directe producantur ad diametrum visualem triangulum super diametrum constituentes HBK.

Erit igitur (per def. 7.) excessus diametri DS supra basim trianguli producti HK, bina scil. segmenta DH + KS radiositatis in hoc actu dilatatio.

Deinde in actu visionis obliquæ DFHGS, per diametrum visualem DS, & diametrum incidentiæ illi parallelam. FG. ductum sit planum refractionis oculare, & in plano illo lineæ interradiosæ pars refracta ER, à centro incidentiæ. R, directe continuetur ad distantiam RH, lineæ interradiosæ parti incidenti RH æqualem.

Et à puncto H, per diametri incidentiæ terminos F, G, ducantur rectę lineæ HM, HN, ad Diametrum visualem DS Triangulum super eam constituentes, MHN.

Erit igitur (per def. 11.) excessus diametri visualis DS, supra basim trianguli MN, bina scil. segmenta DM + NS radiositatis dilatatio in hoc visionis obliquæ actu.

Si iam planum contactus per incidentiæ diametrum FG ductum intelligatur secans rectam HZ, in puncto R ad angulos rectos & obiectum concipiatur in puncto H. posita erit (per def. 6.) constructio ista DFHGS, visionis coniugatæ rectæ actus.

Erunt igitur (per theorema 2.) dilationes radiosæ DH + KS in actu proposito & DM + NS, in actu hoc constituto, æquales.

Est igitur MN basis trianguli MHN, æqualis basi HK, trianguli HBK.

Et sunt (ex hypothesi & constructione) triangulorum MHN & HBK, perpendicula ZRH, & XEB similiter æqualia.

Sunt igitur triangula MHN, & HBK, ac proinde triangula FHG & RBT inter se similia & æqualia.

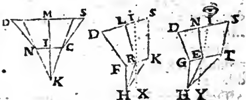
Est igitur diameter incidentiæ FG in actu visionis obliquæ, diametro incidentiæ RT in actu visionis rectæ, æqualis. Quod erat probandum.

THEOREMA IV.

IN duobus vtcunque diuersis visionis coniugatę obliquę actibus si lineę interradiosę similiter ęquales fuerint, diametri incidentiæ ęquales erunt.

In actu visionis obliquę primo DGHTS sit linea interradiosa refracta HEN & angulus incidentiæ HEY. Diameter incidentiæ GT.

In actu visionis obliquæ secundo DFHKS, sit lineæ interradiosa refracta HRL lineæ interradiosæ prioris HEN, similiter æqualis.



Sit vero angulus incidentiæ HRX, angulo incidentiæ prioris HEY, vtcunque inæqualis, sitque diameter incidentiæ FK.

Probandum est, diametrum incidentiæ FK diametro incidentiæ GT æqualem esse.

Theorema hoc superioris tertij immediatè consectarium est.

Descripto enim visionis rectæ actu DNKCS, in quo linea interradiosa directa KIM, lineis interradiosis refractis HEN & HRL similiter æqualis sit, & incidentiæ diameter NC. Erit (per theor. 3.) incidentiæ diameter GT incidentiæ diametro NC æqualis; & incidentiæ diameter FK eidem NC, æqualis.

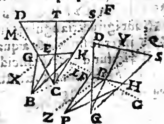
Sunt igitur incidentiæ diametri GT, FK inter se æquales. Quod probandum erat.

THEOREMA V.

IN duobus vtcunque Visionis coniugatæ obliquæ actibus si lineæ interradiosæ similiter æquales fuerint, lineæ eorum imaginariæ æquales erunt.

Sit actus primus DGBKS, & sit planorum contactûs & refractionis interradiosæ communis sectio ML & obiecti perpendiculũ BL.

Tres igitur rectæ lineæ DG. TE. SK. in planis suis refractionis à tribus terminis diametri incidentiæ G. E. K. directè continuatæ concurrent in puncto aliquo perpendiculi BL. Sit punctum concursûs C.



Est igitur punctum C, locus imaginis; & lineæ interradiosæ pars continuata EC linea imaginaria (per def. 12.)

Sit actus secundus D F P H S. Et sit planorum contactûs & refractionis interradiosæ communis sectio M C, & obiecti perpendiculum P C.

Tres igitur rectæ D F. Y R. S.H. in planis suis refractionis à tribus terminis diametri incidentiæ F.R.H. directe continuatæ concurrent in puncto aliquo perpendiculi P C. sit punctum concursûs G.

Est igitur (per def.12.) Punctum G. locus imaginis, & lineæ interradiosæ pars continuata R G. linea imaginaria.

His constitutis, lineas istas imaginarias E C. & R G. inter se æquales esse probandum est.

In triangulo primo D C S, recta linea D T S, minus rectâ G K, ad ipsam G K, est vt recta T E. ad rectam E C.

Et in triangulo secundo D G S, recta D Y S minus rectâ F H, est ad ipsam F H vt recta Y R ad rectam R G.

Sunt autem rectæ D T S & D Y S diametri visuales inter se æquales.

Et rectæ G K & F H. diametri incidentiæ (per theorema 4.) item sunt æquales.

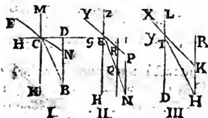
Et rectæ T E, & Y R. linearum interradiosarum partes refractæ (ex hyp.) sunt æquales.

In duobus igitur istis analogismis tres primi termini primi analogismi, scil. D T S minùs G K. G K. T E tribus primis terminis secundi scil. D Y S minùs F H. F.H. Y R. æquales sunt.

Quartus igitur primi E C. linea imaginaria actûs primi, quarto secundi R G, lineæ imaginariæ actûs secundi æqualis est, quod erat probandum.

THEOREMA VI.

IN duobus vtcunque diuersis visionis coniugatæ obliquæ actibus, linearum interradiosarum partes incidentes, lineis suis imaginarius proportionales sunt.



In actu primo sit planorum contactus & refractionis interradiosæ communis sectio H D, perpendiculum incidentiæ & refractionis K C M.

Et in plano refractionis interradiosæ ab obiecto B, ad centrum visuale F ducta sit linea interradiosa refracta B C F.

Et ducto obiecti perpendiculo B D, pars refracta E C directè con-

tinuetur ad perpendiculi punctum N.

Erit ergo (per def.12.) recta C N. linea imaginaria.

In actu secundo sit planorum communis sectio G F. & perpendiculum incidentiæ & refractionis H E Z.

Et in plano refractionis interradiosæ, ab obiecto N. ad centrum visuale Y. ducta sit linea interradiosa refracta N E Y, quæ partes suas N E incidentem, & E Y refractam partibus actûs primi B C incidentis, & C F refractæ inæquales habeat, & pars incidens N E cum perpendiculo H E angulum incidentiæ N E H faciat, angulo incidentiæ B C K actûs primi, inæqualem.

Et ducto obiecti perpendiculo N F, pars refracta Y E directè continuata sit ad perpendiculi punctum P.

Erit ergo (per def.12) recta E P linea imaginaria.

His constitutis probandum est linearum interradiosarum, in duobus actibus, partes incidentes B C & N E lineis suis imaginariis N C & P E proportionales esse.

Fiat actûs cuiuspiam tertij delineatio, in quâ interradiosæ pars incidens H T. interradiosæ parti incidenti B C actus primi æqualis sit. Et angulus incidentiæ H T D angulo incidentiæ B C K primi, item æqualis. Interradiosa vero pars refracta T X interradiosæ parti refractæ E Y secundi æqualis.

Ducto igitur obiecti perpendiculo H R, & lineæ interradiosæ parte refractâ X T directè continuatâ ad perpendiculi punctum K erit recta linea T K huius tertij actûs linea imaginaria.

Cùm sint autem anguli incidentiæ H T D & B C K æquales, sunt (per Axioma) anguli refracti L T X, M C F æquales.

Ergo anguli ad verticem D T K, K C N, æquales sunt.

Ergo anguli H T K, B C N quoque æquales.

Existentibus igitur rectis lineis H T & B C, item angulis H T K & B C N, erunt rectæ T K & C N, lineæ scilicet duorum actuum imaginariæ inter se æquales.

Porrò cùm lineæ interradiosæ, actûs secundi, pars incidens N E interradiosæ parti incidenti B C actûs primi facta sit vtcunque inæqualis. ponatur hæc illâ maior.

Erit igitur interradiosæ parte incidente actûs tertij quoque maior.

Sumatur in rectâ N E punctum Q pro loco obiecti, ad distantiam E Q interradiosæ parti incidenti H T æqualem, quæ pro interradiosæ parte incidente hîc sit.

Et ab obiecto Q. agatur perpendiculum Q T lineam imaginariam priorem E P, secans in puncto R.

Erit ergo recta E R linea imaginaria interradiosæ parti incidenti Q E debita.

In constructione ista quæ (per def. 10.) pro visionis obliquæ actu habenda est, linea interradiosa refracta Q E Y, lineæ interradiosæ refractæ H T X actus tertij, similiter æqualis est.

Ergo (per theor. 5.) linea imaginaria E R huius, lineæ imaginariæ T K illius æqualis est.

Sunt ergo rectæ lineæ Q E & E R, rectis H T & T K. sigillatim æquales.

Rectas autem H T & T K. rectis B C & C N æquales esse, supra probatum est.

Sunt igitur rectæ Q E & E R rectis B C & C N æquales.

Est autem recta N E ad rectam P E, vt recta Q E, ad rectam E R.

Est igitur recta N E ad rectam P E vt recta B C ad rectam C N.

Sunt igitur in duobus visionis obliquæ actibus propositis linearum interradiosarum partes incidentes X E & B C, lineis suis imaginariis E P & C N proportionales. Quod erat probandum.

THEOREMA VII.

IN visione refractâ secantes complementorum angulorum incidentiæ, secantibus complementorum angulorum refractorum incidentiis respondentium proportionales sunt.

Vt in visione coniugatâ persistamus, sit primò planorum contactûs & refractionis interradiosæ communis sectio H G. perpendiculum incidentiæ & refractionis per incidentiæ centrum C. transiens, K C L.

Et in plano refractionis, sit linea interradiosa refracta B C D. angulus igitur incidentiæ est B C K, & refractus ei respondens, L C D.

Et lineæ interradiosæ pars refracta D C directè continuata secet perpendiculum in puncto F.

Erit inde angulus F C K angulo refracto L C D æqualis.

Erit ergo angulus B C G anguli incidentiæ complementum, & angulus F C G. anguli refracti complementum.

Positâ igitur rectâ C G pro radio, siue sinu toto, erit B C secans complementi anguli incidentiæ, & F C secans complementi anguli refracti.

In actu secundo sit planorum intersectio GE, & perpendiculum incidentiæ & refractionis per incidentiæ centrum R transiens, XRY.

Et in plano refractionis ducta sit linea interradiosa refracta QRS, angulos faciens cum perpendiculis suis XR & YR, incidentiæ quidem QRX. refractum verò YRS. angulis actûs primi vtcunque inæquales.

Differentiâ istâ angulorum inter duos actûs constitutâ, & quod reliquum est huius descriptionis, processu priori omnino simili peracto, erit recta QR secans anguli QRE complementi anguli incidentiæ, & recta TR secans anguli TRE complementi anguli refracti.

Secantes iam istas QR. & CB. complementorum angulorum incidentiæ, secantibus TR, FC. complementorum angulorum refractorum proportionales esse manifestum est.

Sunt enim QR & BC linearum suarum interradiosarum partes incidentes, & TR, FC. lineæ imaginariæ incidentiis istis debitæ.

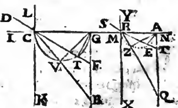
Sed (per theor. 6.) lineæ incidentes, lineis suis imaginariis proportionales sunt.

Ergo secantes QR & BC complementorum angulorum incidentiæ, secantibus TR, & FC, complementorum angulorum refractorum proportionales sunt. Quod erat probandum.

THOREMA VIII.

IN visione refractâ sinus angulorum incidentiæ, sinibus angulorum refractorum incidentiis respondentium proportionales sunt.

Resumptâ duorum actuum superiore descriptione, in primo, super rectâ CG vt diametro, describatur peripheria CVTG, rectas lineas BC & FC secans in punctis V & T. ducanturque rectæ GV, GT.



Erunt inde anguli CGV & CGT, angulis BCK & FCK, angulis scilicet incidentiæ, & refracto æquales.

Erunt igitur CV. & CT angulorum incidentiæ & refracti sinus CV. scilicet anguli incidentiæ CGV sinus, & CT anguli refracti CGT sinus.

In secundo super rectâ RN vt diametro, describatur peripheria

RZEN, rectas QR & TR secans in punctis Z & E, ducanturque rectæ NZ & NE.

Erunt inde anguli RNZ & RNE angulis QRX & TRX; angulis scilicet incidentiæ, & refracto æquales.

Erunt igitur rectæ RZ & RE angulorum incidentiæ & refracti sinus. RZ scilicet anguli incidentiæ RNZ & RE anguli refracti RNE sinus.

His constitutis probandum est sinus angulorum incidentiæ c v, & R z, sinibus angulorum refractorum CT & RE proportionales esse.

In actu primo est	BC ad CG vt GC ad CV.
Et	FC ad CG vt GC ad CT.
Est ergo (per lemma sequens)	BC ad FC vt CT ad CV.
In secundo est	QR ad RN vt RN ad RZ.
Et	TR ad RN vt RN ad RE.
Ergo (per Lemma)	QR ad TR vt RE ad RZ.
Sed (per Theor. 7.) est . .	BC ad FC vt QR ad TR.
Ergo est	CT ad CV vt RE ad RZ.

LEMMA AD PRÆCEDENTEM.

SI in duobus analogismis trium terminorum medij termini æquales fuerint, termini extremi reciprocè proportionales erunt.

Si sint analogismi. . Primus . . . vt B ad C. ita C ad D.
Secundus . . vt F ad C. ita C ad G.
Erit . . . . . vt B ad F. ita G ad D.

Est enim rectangulum BD æquale rectangulo CC, & rectangulum CC, æquale rectang. FG. quare rectangulum BD æquale est rectangulo FG.

Ergo . . . vt B ad F. ita G ad D. vt est enuntiatum.

COROLLARIVM.

THeorema hoc, problematis, processûs huius initio præfixi, totius scil. præsentis negotij fundamentale est. Si enim angulo cuicunque, siue incidentiæ, siue refracto, ex suppositione dato vel sumpto, angulus respondens per obseruationem dioptricam acquisitus sit. Ratio quam sinus anguli suppositi, ad sinum anguli obseruati ei respondentis habet (per Theorema) eadem est, quæ sinus angulorum omnium de genere suppositi, ad sinus angulorum om-

nium de genere obseruati sigillatim eis respondentium obtinent. Communi igitur istâ ratione constitutâ, manifestum est angulos omnes incidentiæ à minimo ad maximum, cum angulis suis refractis, atque angulis refractionum vtrisque congruis Calculo Analogistico, vel (altero rationis termino ad numerum decuplatum, siue sinum totum reducto) solo multiplicationis opere in tabulam ordinatam redigi posse. Vnde patet problematis initio propositi solutio.



OPTICÆ

OPTICÆ
LIBER SEPTIMVS.
HYPOTHESES.

1. OMNIS Actio est motus localis in agente, ficut & omnis Passio est motus localis in Patiente. Agentis nomine intelligo Corpus, cuius motu producitur effectus in alio Corpore; Patientis, in quo motus aliquis ab alio Corpore generatur. Exempli gratiâ. dum clauus, vt aiunt, clauum pellit, motus pellentis est actio eius, motus pulsi, est pulsi passio. Item dum Carbo ignitus calefacit hominem, etsi neque Carbo, neque homo suo loco exeat, neque ideo moueatur, est tamen aliquid materiæ siue Corporis subtilis in Carbone, quod mouetur, & motum ciet in medio, vsque ad hominem; & est in homine stante immoto, motus aliquis in partibus internis inde generatus. Motus autem hic in partibus hominis internis est calor; & sic moueri, Calefieri, hoc est pati; & motus ille qui est in partibus Carbonis igniti, est actio eius, siue calefactio; & sic moueri, calefacere.

2. Visio est passio producta in vidente per actionem obiecti lucidi vel illuminati.

3. In visione, neque obiectum, neque pars eius quæcunque transit à loco suo ad oculum. Vt motus possit motum generare ad quamlibet distantiam, non est necessarium, vt corpus illud à quo motus generatur, transeat per totum illud spatium, per quod motus propagatur; sufficit enim vt parùm, imò insensibiliter motum, protrudat id quod proxime adstat; nam id quod adstat, pulsum suo loco, pellit quoque quod est proximum sibi, atque eo modo motus propagabitur quantum libueris.

4. Lucidum omne vndiquaque à quotlibet simul aspicientibus videri potest.

5. Medium rarius voco quod minus contumax est aduersus motum recipiendum. Densius quod magis. Aerem autem rariorem suppono quàm aquam, quàm vitrum, quàm cristallum.

PROPOSITIO I.

Omne lucidum dilatat ſe, tumeſcitque in molem maiorem, iterumque contrahit ſe, perpetuam habens ſyſtolem & diaſtolem.

QVoniam enim (per hypotheſin quartam) lucidum omne ſimul vndiquaque videtur, viſio autem (per hypotheſim ſecundam) fiat ab actione lucidi, & eſt (per hypotheſim primam) omnis actio motus localis in Agente, ſequitur, eſſe in lucido motum verſus omnes partes ſimul. Quia vero lucida dum videntur non diſperguntur vſque ad oculos vndiquaque videntium, (ſic enim perderentur) reſtat vt partes lucidi quas oſtenſum eſt moueri verſus omnes partes ſimul, ſe iterum recipiant. Hoc autem idem eſt ac ſi diceremus totum lucidum tumeſcere, & iterum ſe contrahere alternis vicibus, ſiue habere perpetuam ſyſtolem & diaſtolem. Quod erat probandum.

Videtur autem, quam in omni corpore lucido obſeruamus & appellamus ſcintillationem nihil aliud eſſe quàm hanc ſyſtolem & diaſtolem.

PROPOSITIO II.

Motus à lucido ad oculum propagatur per continuam reiectionem partis medij contiguæ.

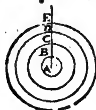
SVppoſuimus (hypotheſi tertia) neque obiectum, neque partem aliquam eius quamcunque in viſione tranſire ad oculum; neque vllus alius modus quo motus ad diſtantiam propagetur excogitari poteſt, præter illum quem propoſuimus, ſequitur ergo illum eſſe.

PROPOSITIO III.

Conſiderare quomodo fiat lumen, & quid ſit?

SIt propoſitum lucidum, Corpus ſolare, cuius centrum A; ſemidiameter A B, cui circumſcribatur orbis Concentricus cuius

crassities B C, (orbem voco solidum contentum inter duas sphæricas superficies Concentricas) Rursus orbi B C circumponatur orbis alius Concentricus C D, & huic alter D E, & eodem modo quotcunque alij, quilibet cuilibet æqualis; quoniam ergo exteriores circumferentiæ semper maiores sunt interioribus, erunt reciprocè crassities interiorum orbium maiores quàm exteriorum, quare maior est B C quàm C D, & C D quàm D E. Quoniam iam per primam, sol dilatat se, & tumescit in molem maiorem, supponamus solem in diastole, siue tumescentia æquare totam sphæram cuius semidiameter est A C; necesse ergo est vt medij pars quæ erat in orbe B C exeat in locum sibi æqualem proximum, nempe in orbem C D, idque eodem tempore; nam quo instante incipit motus à B versus C, necesse est vt incipiat motus à C versus D, & à D versus E, & ab E prorsum, quare si statuatur oculus in qualibet distantia à sole puta in E, quo instante incipit sol dilatare se in B, eodem ferietur oculus in E. vnde propagabitur motus ad retinam, & inde per connatum retinæ neruum opticum vsque ad cerebrum; & hoc fit eodem instante, quo motus incipit in B; Præterea est in Cerebro vt in cæteris omnibus quæ patiuntur; reactio sua, vnde motus à cerebro propagatur retro per neruum opticum in retinam, inde per easdem lineas versus solem quibus ante à sole versus retinam. Atque omnis hic processus erit factus (vt iam demonstrauimus fieri à sole ad oculum) in instante. Manifestum ergo est in omni visione propagari motum à lucido ad oculum & ad cerebrum, & inde retro ad partes extra oculos in instante. Manifestum item est, motum qui sic à lucido propagatur debiliorem esse longè quam propè; cum enim B C sit maior quam C D; & C D quam D E, sit tamen tempus propagationis à B ad C, idem quod à C ad D, vel à D ad E, velocior est motus propagatus in B C quàm in C D, & in C D quàm in D E; & sic deinceps.



Hactenus motum à lucido qualis sit considerauimus, iam quomodo talis motus & quando vocatur lumen considerandum est.

Primò si nulla esset visio, nihil esset quod vocaremus lumen: nam cœci nati, loquentem de lumine & coloribus non intelligunt; lumen ergo non dicitur motus ante visionem, hoc est antequam perueniat ad cerebrum. Deinde motum in cerebro quod vocamus lumen, non sentimus in ipso cerebro, sed foris ante oculos. Motum ergo à lucido non vocamus lumen antequam retrò à cerebro per reactionem propagetur per neruum opticum & oculos ad medium inter-

oculum & lucidũ. Lum:n ergo eſt apparitio ante oculos motûs illius qui propagatur à lucidi diaſtole ſiue tumeſcentiâ ad cerebrum, & inde retrò per oculos ad medium. Eſt ergo lumen lucidi phantaſma, ſiue imago concepta in cerebro. Confirmatur autem etiam experientiâ, eo quod in omni concuſſione cerebri quo fit motus aliquis per neruum opticum extrorſum, vt quando oculus percutitur apparet lumen quoddam ante oculos. Ex his quæ dicta ſunt faciemus breue Corollarium.

COROLLARIVM.

Lumen eſt phantaſma à lucido. (Idem ſentiendum de coloribus qui ſunt lumen perturbatum.)

Lumen propagatur ad quamlibet diſtantiam in inſtante.

Lumen quo longius eo debilius propagatur.

MONITVM.

Difficultas maxima in lumine concipiendo tam veterum, quàm Neotericorum Philoſophorum ingenia torſit, quibus ſpero ſatisfactum iri, ſi conſiderent vix ac ne vix quidem à nobis clarè, diſtinctéque concipi quidpiam niſi motus, aut figurarum ope. Quas ſi quis diligenter perpendat, & motum compoſitiones intelligat, nil in tota Philoſophia facilius, nil ad demonſtrationem accommodatius, & hominum ingenio congruentius eſſe fatebitur.

DEFINITIO RADII.

Radium appello viam per quam motus à Lucido per Medium propagatur. Exempli gratiâ. Sit Lucidum A B, à quo moto ad C D, pars Medij quæ interiacet inter A B & C D, protrudatur ad E F: & à parte Mʃdij quæ erat inter C D & E F, promotâ vlterius ad G H, propellatur pars illa quæ erat inter E F, & G H, vlterius ad I K, & ſic deinceps, ſiue directè, ſiue n͡on, puta verſus L M. Spatium iam quod continetur inter lineas A I O L, & B K M, eſt id quod voco Radium, ſiue viam per quam motus à Lucido per Medium propagatur.



PROPOSITIO IV.

Radius est spatium solidum.

QVoniam enim Radius est via per quam motus projicitur à Lucido; neque potest esse motus nisi Corporis; sequitur Radium locum esse Corporis; & proinde habere tres dimensiones. Est ergo Radius spatium solidum.

DEFINITIO RADII DIRECTI ET REFRACTI.

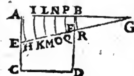
Radius directus est qui sectus plano per axim, exhibet in plano secante figuram parallelogrammam (vt A K.) Radius Refractus est qui componitur ex directis angulum facientibus, vnà cum parte intermediâ; (vt Radius A M, Refractus dicitur, quia componitur ex directis A K, & K L, vnà cum parte I K O.)

DEFINITIO LINEÆ LVCIS.

Lineam vnde Radij latera incipiunt (exempli gratiâ, lineam A B, vnde incipiunt latera A I & B K) appello lineam Lucis simpliciter. Linearũ autem quæ à lineâ Lucis continuâ protrusione deriuantur (quales sunt C D, E F, &c.) vnamquamque appello lineam Lucis eousque propagatam.

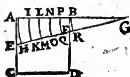
CAVSA PHYSICA RADIORVM DIRECTORVM.

QVandoquidem Radius habet tres dimensiones, demus ipsi perspicuitatis gratiâ latitudinem aliquam notabilem A B: perspicuitatis inquam gratiâ; quia Radius à minimo lucido deriuatus, est insensibilis, & tamen Radius.

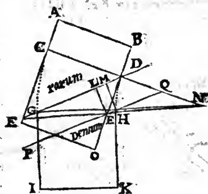


Iam si A B protudat ante se Medij partem sibi proximam versus C D, omni suo puncto æquè velociter, necesse est vt describatur parallelogrammum, siue Radius directus A D, tanquam si A B esset latus cylindri volutati ab A B, versus C D. Quamdiu autem Medium vniformè est, hoc est, æquè vbique permeabile, nulla ratio excogitari potest quarè A B non propagaret motũ omni sua parte æqre velocem: ideoque ratio patet quare in eodem medio radius semp

est directus. Quod si A B non moueretur omni suâ parte æquè velociter, sed inæqualiter, puta pro ratione rectæ A E ad rectam B F, non propagabitur motus per viam siue spatium parallelogrammum A B C D, neque erit E F linea lucis propagata: sic enim A B quam supponimus esse in materiâ tenuissimâ, distraheretur in quantitatem sese maiorem. Vt sciamus autem per quam viam propagabitur motus hic ab A B inæqualis, putemus ipsam A B esse (non vt ante latus cylindri, sed) latus frusti coni, habentis diametrum maioris basis A E, minoris verò B F. Iam si frustum hoc Coni prouoluatur, circuli basium eius tanquam duæ rotæ inæquales describent duos circulos A K, B R, quorum centrum commune erit vertex Coni, puta punctum G. Reliquæ autem partes intermediæ describent singulæ singulos circulos, quales sunt I K, L M, N O P Q, extremis A H, B R, concentricos. Via ergo quâ motus inæqualis propagatur ab A B, non est directa, vt A D, sed qualis continetur lineis rectis A B, H R, & circularibus A H, B R, nempe portio Sectoris.



His positis, putemus rectam E D disterminare duo media, quorum vtrumuis, puta superius, sit rarum, alterum densum; & ab A B lineâ lucis, venire obliquè Radium directum, siue parallelogrammum A D. Statim atque ventum est ad contactum Densi in D, progressus erit inæqualis (propter medium biforme, cum C sit in raro, D in Denso) nempe tardior à parte D, velocior à parte C, in ratione C E ad D F, vel C G ad D H. Via ergo quâ motus propagatur à C D, est per portionem Sectoris C G D H; & est G H linea lucis propagata omni suâ parte ad medium densum, & æqualis ipsi C D, vel A B. Si igitur ad G H in punctis G & H, ducantur perpendiculares G I, H K, erit progressus directus; & totus Radius erit spatium conclusum intra figuram A C G I K H D B. Patet ergo ratio physica quare Radius refringitur, consistens in eo, quòd medium est biforme.



Notandum est quoque rectas E F, M H, perpendiculares ad E D

esse inter se æquales (quod demonstrare non est difficilè, sed verbosum.) Ex quo sequitur, datis L F (quæ est quantitas demersionis termini D in medio denso,) & A B (quæ sumitur arbitrio nostro pro linea lucis,) statim dari G H pro lineâ lucis propagatâ in medium densum. Ductâ enim rectâ F H parallelâ ad E D, & applicatâ longitudine A B, ita vt alter terminus sit in rectâ E D, alter in F H, fiet G H linea lucis propagata eousque: à quâ ductæ perpendiculares G I, H K, designant Radij partem refractam. Neque refert ad effectum refractionis in quâ parte rectæ E D statuatur punctum G, cum tota E D, sicut & A B vel G H intelligenda sit vt insensibilis. Commodiùs tamen ponetur G in ipso puncto E, & H, in eâ parte rectæ F H, quam longitudo A B determinat, vt A E in medio raro continuetur cum G I parte refractâ in medio denso.

PROPOSITIO V.

Radius incidens perpendiculariter in superficiem planam considerari potest tanquam linea Mathematica, sed incidens in eandem obliquè considerandus est vt habens latitudinem.

Sit radius A B C D habens latitudinem A C cadens perpendiculariter in planum B D, consideratur ergo vt via qua motus propagatur, in qua eadem omnia accidunt lateri A B, quæ lateri C D; nam & vtrumque latus est perpendiculare ad planum B D, & æqualis est operatio ab A ad B, & à C ad D, vel à tota A C ad totam C D. Quare æquè considerare motum possumus in A B, vel in C D, vel in tota linea A B C D. Possumus ergo considerare radium A B C D sine latitudine, hoc est vt linea Mathematica, sed in incidentia obliqua vbi operatio ab F ad planum in H, in maiori est distantiâ quam ab E in G non potest considerari E F G H vt linea Mathematica, quia sic consideraretur E F vt punctum Mathematicum, quod tamen consideratur vno termino operari longius quam altero, hoc est consideratur vt habens terminos, hoc est, non vt punctum. Itaque si consideraremus lineam obliquè incidentem, vt Mathematicam, consideraremus E F vt punctum & non punctum, quod est absurdum.

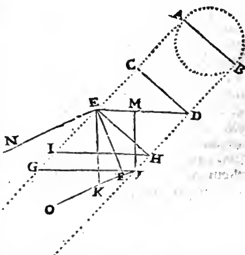
minus lucis B erit immersus in medium densum quanta est distantia minima inter rectam E D, & sibi parallelam G F L, siue quantitate lineæ L M, tunc cum alter terminus est in superficie eiusdem medij densi. Ducta igitur rectâ à puncto E ad rectam G L, eadem longitudine qua est linea lucis A B, vel C D, quæ sit E F, erit iam E F linea lucis propagata, eo vsque. Quoniam autem latera radij exeunt à lineâ lucis perpendiculariter, ducantur perpendiculares ad ipsam E F, rectæ E N, F O, propagabitur lux inter parallelas E N, F O. quare E F N O erit radius refractus, & cadet necessario latus E N inter E I, & perpendicularem ad planum, quæ est E K, & latus F O inter B D productam, & perpendicularem ad idem planum, sibi conterminam. Iam si pro latitudine A B sumamus latitudinem radij minorem quauis magnitudine data, demonstratio hæc eadem existens applicabitnr lineæ E N, vt E N sit ipse radius refractis versus perpendicularem E K. Quare radius & medio raro, &c. Quod erat probandum.

PROPOSITIO VII.

Radius è medio denso incidens obliquè in medium rarius, cuius superficies est plana, refringitur in partes auersas à perpendiculo.

SIt E D in superficie planâ medij rarioris, ita vt quod est supra E D sit medium densius, quod infra rarius. Sitque in medio denso linea lucis (puta solis diametrum) A B à qua exeat radius cuius latera A E, B D sint ad A B perpendicularia, & ad planum E D obliqua. Propagato igitur altero lucis termino ad planum E D in puncto D; alter terminus non propagabitur simul ad planum in puncto E, sed tantum ad C, ita vt A C sit æqualis D B. Productâ rectâ D B, fiat D H æqualis rectæ C E. Si igitur medium

mutatum non esset quando terminus lucis A propagatus esset ad E, alter terminus deberet esse in H. immersus scilicet sub plano E D, quanta est distantia minima inter punctum H, vel C, & rectam E D, vel inter eandem rectam E D, & sibi parallelam I H. Quoniã vero supponitur medium sub plano E D rarius quàm quod supra, & propagari motum faciliùs in raro quam in denso; tunc quando lineæ lucis terminus A est in E, erit alter terminus B vltra H, puta in L, immersus in medium rarum quanta est distantia minima inter rectam E D, & sibi parallelam G L, hoc est quantitate lineæ L M. Ductâ igitur rectâ à puncto E ad rectam G L, eâdem longitudine qua est linea lucis A B vel C D, quæ sit E F, erit iam E F linea lucis propagata eo vsque. Ductis igitur E N, & F O perpendicularibus ad E F, erit per postulatum superius, radius propagatus in medio raro secundum parallelas E N, & F O. Cadit autem E N ita vt angulum faciat maiorem cum perpendiculo E K quam facit linea directa E G. Et F O similiter facit maiorem angulum cum sibi contermino perpendiculari si duceretur, quam facit ea quæ est in directum cum B D, hoc est refringitur radius E F N O in partes auersas à perpendiculo. Iam si pro A B lineâ lucis sumatur magnitudo omni magnitudine proposita minor, quod demonstratur de lineâ latâ A B E F N O, demonstrabitur de ductâ A E N. Quare radius refringitur ab E in N, in partes scilicet auersas à perpendiculo. Et propterea radius è medio denso, &c. Quod erat probandum.



PROPOSITIO VIII.

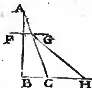
Si radius incidat in planum medij rarioris, talis naturæ, vt facilius propagetur in ipso, quam in denso vnde venit, ea propor-

tione quam habet diameter quadrat ad latus eiusdem, sitque angulus inclinationis semirectus, non fiet refractio in medio raro, sed linea refracta erit in superficie planâ amborum mediorum Communi.

SIt linea lucis A B in medio densiori, à qua propagetur radius, cuius latera A E, B D perpendicularia sint ad A B, incidat autem latus A E in planum E D ita vt faciat angulũ cum recta E D, semirectum nempe A E L. Sitque medium infra E D rarius quam quod supra, ita vt propagetur lux velocior in ipso quam in medio denso, ea proportione quam habet diameter quadrati ad latus eiusdem. Dico lineam refractam fore E M, nempe iacentem in ipso plano E D.

Quoniam enim angulus A E L est semi-rectus, erit quoque C E D semi-rectus, & quia angulus E C D est rectus, erit C D E semi-rectus. Quare rectæ C D, C E sunt æquales. Est ergo C D E H quadratum, & vt C H diameter ad C D latus, ita C D, vel A B, vel E H, ad C K, vel K H. Supponitur autem progressum lucis in medio raro habere proportionem ad progressum in denso quam habet diameter ad latus, hoc est, C D, vel E H, vel A B, ad K H. Quando ergo terminus lucis A est in E, terminus B (qui si medium non esset mutatum deberet esse in H, immersus profunditate K H) erit propagatus ad N, ita vt profunditas eius siue distantia inter E D & G N, nempe perpendicularis E F, sit æqualis rectæ C D, vel E H, vel A B, est autem A B linea lucis. Quare etiam E F est linea lucis propagata. Exit ergo radius refractus ab ipsa E F perpendiculariter, quare E M est linea refracta, eadem cum E D. Itaque si radius incidat, &c. Quod erat probandum.

Patet hinc ratio, quare Dominus des Cartes, docens nos quomodo vitri refractio experiunda est per triangulum rectangulum pag. 138, iubet angulum acutiorem statuendum in eam partem, vnde auertitur linea refracta vt in hoc exemplo. Quia F I G est perpendicularis ad A B & inclinata ad A C, ita vt linea F I refringatur ad H, necesse est vt angulus A minor sit semirecto, aliter enim I H caderet vel in I C, vel intra triangulum.

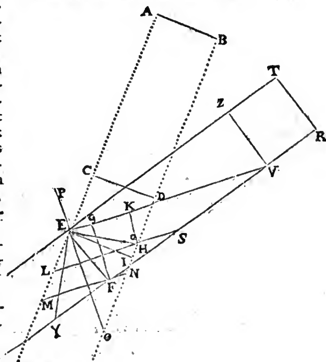


Resistentia enim vitri ad resistentiam aëris maior est quam pro ratione diametri ad latus. Plus enim refrangit vitrum quam aqua, aqua vero refrangit secundum rationem diametri ad latus, vel saltem ferè.

PROPOSITIO IX.

Si radius incidat ad planum medij densioris, cuius talis sit natura vt tardius propagetur lux in ipso quam in raro vnde venit, ea proportione quam habet latus quadrati ad diametrum; in omni inclinatione erit angulus refractus minor semirecto.

SIT medium rarius quod est supra E D, & medium densius quale supponitur quod est infra. Cadat autem radius ab A B lineâ lucis in planum ED, in angulo inclinationis AEP semirecto. Quoniã ergo radius AE, refringitur versus perpendicularem, cadet linea

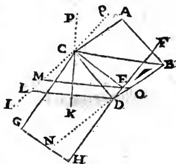


refracta inter E M & E O, quare cum sit angulus O E M semirectus, erit radius refractus in angulo inclinationis semirecto, minor semirecto. Quod si angulus inclinationis minor esset semirecto A E M, recta faceret angulum cum perpendiculo E O minorem semirecto, refractus igitur multo minor esset semirecto. Quare angulus refractus in angulo inclinationis semirecto vel eo minore, minor est semirecto. Sit iam angulus inclinationis maior semirecto quicunque T E P. Dico angulum refractum hic quoque minorem esse semirecto. Supponimus A B, & T R, lineas lucis æquales, vt radij ab ipsis differant sola inclinatione, æquales ergo sunt E F & E I, nempe æqualibus A B, & T R, coniunctæ per parallelas æquales. Quoniam autem angulus A E P est semirectus, erit quoque C E D semirectus, ideoque cum E C D sit rectus, etiam C D E erit semirectus. Quare rectæ E C, C D æquales erunt, & C D E I, quadratum, & vt C I diameter ad C D latus, ita E I ad I S, hoc est E F ad I S. Ducatur F G perpendicularis ad E D, minor erit F G quam E F, minor ergo est ratio G F ad I S quam diametri ad latus. Fiat ergo vt E F ad I S, siue vt diameter ad latus, ita F G ad aliud H K perpendicularem ad planum idem E D. erit ergo H K minor quam I S: quia ergo E F est profunditas quam acquisiuisset terminus lucis R, existente termino T in E si medium non esset mutatum, erit iam ex supposita qualitate medij K H profunditas eius. Si ergo ducatur L H parallela ad E D, erit lineæ lucis alter terminus in E, alter in L H, quoniam autem linea lucis æqualis est rectæ E I, terminus eius in rectâ L H cadet inter punctum H, & punctum in quo E I & L H se mutuo intersecant. Sit ergo linea lucis E Q, ad quam ducta perpendicularis in puncto E, nempe E Y erit linea refracta Quoniam ergo Y E Z est angulus rectus, item M E I angulus rectus, si dematur angulus communis Y E I, erit angulo I E Z æqualis angulus M E Y, qui cum angulo Y E O facit angulum M E O semirectum. Minor est ergo angulus refractus Y E O semirecto. Quapropter etsi inclinationis angulus maior sit semirecto, erit angulus refractus semirecto minor. Itaque siue angulus inclinationis sit maior vel minor, vel æqualis semirecto, (hoc est in omni inclinatione) in ratione mediorum suppositâ, angulus refractus erit semirecto minor. Quod erat probandum.

PROPOSITIO X.

Angulus refractionis qui fit à radio intrante in medium densum versus perpendiculum, æqualis est angulo refractionis, quem idem radius refractus facit exiens in idem medium rarum, in partes à perpendiculo auersas.

SIt medium rarum quod est supra rectam C B, quod infra, densum. Sit autem linea lucis A B, à quo exit radius cuius latera A C & B D. Completo rectangulo A B C D, si medium non esset mutatum, esset C D linea lucis propagata; sed quia medium sub C B densius est quam supra, erit lineæ lucis terminus B, minùs in ipsum immersus quàm punctum D. Sit ergo linea lucis propagata C E, ita vt C E æqualis sit ipsi A B vel C D. Ductis ergo perpendicularibus ad C E, rectis C G, E H, erit C G linea refracta, & I C G angulus refractionis versus perpendiculum C K. Rursus sit medium densum quod est infra L D, rarum quod supra, & sit G H linea lucis propaganda à denso in rarum, quando iam terminus lucis H est in D, si medium non esset mutatum, deberet alter terminus lucis G esse in F, sed propter raritatem medij in quo iam est ille terminus vlterius ad C, pro ratione mediorum suppositâ, hoc est pro ratione distantiæ inter L D & C B ad distantiam inter M E & eandem C B, est igitur iam C D linea lucis propagata ad densi & rari confinia, quoniam ergo A C & B D sunt perpendiculares ad ipsam C D lineam lucis, erit C A linea refracta, & A C Q angulus refractionis auersus à perpendiculo C P. Restat probandum angulum A C Q æqualem esse angulo I C G, quod facile est, sunt enim verticales. Quare angulus refractionis, &c. Quod erat demonstrandum.



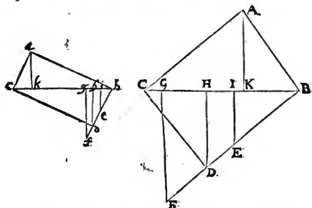
Facile quoque demonstratu est radium transeuntem à medio raro per medij densioris plana opposita, in medium rarum simile priori, habere partes ante ingressum & post exitum sibi inuicem parallelas.

PROPOSITIO XI.

Si sint duæ quælibet inclinationes radiorum ab eodem medio raro ad idem medium densum vel contra, superficies autem mediorum communis sit plana, progressus lucis in primo medio, ad progressum lucis simul factum in secundo habebit eandem rationem, in vnâ inclinatione quàm in alterâ.

SInt duæ quælibet inclinationes radiorum A C, & *a c*, in angulis diuersis, A C B & *a c b*, ad planum *c b*, C B, à punctis autem *b*, B, ducantur *b f*, B F, rectæ radiis *a c*, A C, parallelæ, sumptisque in *b f*, B F, rectis *b d*, B D, iisdem radiis, *a c*, A C, æqualibus, compleantur parallelogramma *a b c d*, A B C D. Sitque medium quod est infra, *c b*, C B, (quod voco medium secundum) non eiusdem naturæ cum medio quod est supra (quod voco medium primum) sed vel densius, hoc est in quo tardior fit propagatio motûs, vel rarius, hoc est in quo velocior fit propagatio motûs. Sit iam progressus lucis in medio primo, in alterâ quidem inclinatione, recta, *a c*, in altera verò recta A C, vel si progressum hunc lucis velimus mensurare in perpendiculari ad planum *c b*, C B, sit in altera inclinatione *a k* in alterâ A K. Sit autem progressus lucis in medio secundo eodem tempore, maior vel minor quam in primo, in altera quidem inclinatione *b e* (scilicet si densius sit secundum medium quam primum, vel *b f* si rarius.) Aut

si velimus progressum hunc mensurare in perpendiculari ad planum *cb*, CB, sit *ie*, progressus ille in densiori medio, *gf* in rariori: in alterâ autem, sit progressus lucis BE in densiori, BF in rariori, vel mensurando perpendiculariter IE in densiori medio, GF in rariori. Dico esse vt inclinata *ac*, ad inclinatam *be*, vel *bf*; hoc est, vt perpendicularis K, ad perpendicularem *ie*, vel *gf*, in inclinatione vnâ ita esse inclinatam AC, ad inclinatam BE, vel BF, hoc est, perpenpendicularem AK ad perpendicularem IE, vel GF, in alterâ.

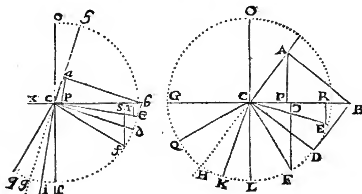


Quoniam enim idem est medium in quo *ac*, & in quo AC, æquè velox est motus ab *a* ad *c* motus ab A ad C. tempus ergo quo fit motus ad *a* ad *c*, est ad tempus quo fit motus ab A ad C, vt recta *ac*, ad rectam AC. Similiter quoniam idem est medium in quo *be*, & in quo BE, æquè velox est motus à *b* ad *e*, & à B ad E, tempus ergo quo fit motus à *b* ad *e*, est ad tempus quo fit motus à B ad E, vt recta *be* ad rectam BE, sed tempus quo fit motus à *b* ad *e*, æquale est tempori quo fit motus ab *a* ad *c*. item tempus quo fit motus à B ad E, æquale est tempori quo fit motus ab A ad C. tempus ergo quo fit motus ab *a* ad *c*, est ad tempus quo fit motus ab A ad C, vt recta *be* ad rectam BE. Est autem supra ostensum, tempus motûs ab *a* ad *c*, esse ad tempus motûs ab A ad C, vt recta *ac* ad rectam AC, in eadem ergo sunt ratione *ac* ad AC, & *be* ad BE. Eâdem methodo demonstrari potest esse vt *ac* ad AC, ita *bf* ad BF. Porro quoniam est vt *ac*, hoc est *bd*, ad *be*, ita AC, hoc est BD ad BE, & vt *bd* ad *dh* vel *ak* (propter similitudinem triangulorum *bdh*, & *bei*) ita *be* ad *ie*, atque etiam vt BD ad DH vel AK, ita BE ad IE, erit vt *ak* ad *ie*,

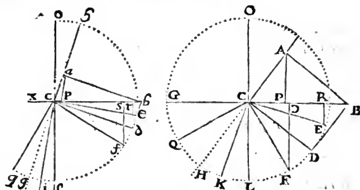
ad *ie*, ita AK ad IE. eadem quoque viâ ostendi potest esse vt *ak* ad *gf*, ita AK ad GF. Quare vt est inclinata *ac*, ad inclinatam *be* vel *bf*, & vt perpendicularis *ak* ad perpendicularem *ie* vel *gf*, in vna inclinatione, ita est inclinata AC, ad inclinatam BE vel BF, & perpendicularis AK ad perpendicularem IE, vel GF in altera inclinatione. Itaque si sint duæ quælibet inclinationes, &c. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XII.

Si sint duæ qualibet inclinationes radiorum ab eodem medio raro ad idem medium densum, vel contra, sitque superficies mediorum communis plana, erit vt sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in vnâ inclinatione, ita sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in alterâ inclinatione.



SIt planum *cb* CB commune duorum mediorum, quorum primum siue id quod est supra *cb* CB sit rarum, alterum siue medium secundum infra *cb* CB densum. Sint autem *ac* & AC radij inclinati ad planum *cb* CB in angulis inæqualibus *aco* & ACO. Sit autem radius refractus ab *ac*, recta *ck*, & angulus refractus *kcl*, & radius refractus ab AC, recta CK, & angulus refractus KCL. Dico vt sinus anguli inclinationis, *aco* ad sinum anguli refracti *kcl*,



ita esse sinum anguli inclinationis A C O ad sinum anguli refracti, K C L ducatur *ab* recta perpendicularis ad *ac*, quæ secet planum in puncto *b*, (secabit autem quia angulus *acb* est minor recto) huic æqualis fiat A B, & ita applicetur vt sit altera eius extremitas in plano C B, & sit perpendicularis ad A C in puncto A, & compleantur parallelogramma *abcd* & A B C D. Ducatur *ce* perpendiculariter ad radium refractum *ck* in puncto *c*, & C E perpendiculariter ad radium refractum C K in puncto C. Sit autem *ce* æqualis *cd* vel *ab*, sicut & C E æqualis C D, vel A B. Itaque ductus circulus centro *c*, interuallo *ce* transibit per *d*, & ductus circulus centro C interuallo C E transibit per D. Iam quoniam *ce*, & C E sunt perpendiculares ad radios refractos *ck* & C K, & æquales lineis lucis *ab* & A B, ductæ *ap* & A P perpendiculares ad planum *cb* C B, erunt progressus lucis in medio raro, in propositis inclinationibus, & *er* E R progressus lucis in medio denso. Sed est per præcedentem, vt *ap* ad *er* in vna inclinatione, ita A P ad E R in altera inclinatione. Secundo, sit medium primum, nempe quod est supra planum *cb* C B densum, quod infra, rarum. Vbi radij refracti ad partes auersas à perpendiculo, sint *cq* & C Q & ad ipsos perpendiculares sint *cf* & C F æquales lineis lucis *ab* vel A B, & ad planum *cb* C B sint perpendiculares *ff* & F S. Similiter probabitur esse, vt *ap* ad *ff*, ita A P ad F S. Sed *ap* & A P sunt sinus angulorum propositarum inclinationum, & *er* E R sunt sinus angulorum refractorum in medio denso, sicut *ff* & F S sunt sinus angulorum refractorum in medio raro. Quod sic probatur. Anguli *oca*, & *acb* simul sumpti sunt æquales recto, item *abc* & *acb* simul sumpti faciunt rectum. Ergo dempto communi angulo *acb* re-

manet *abc* æqualis angulo inclinationis *oca*; ducto igitur circulo, cuius semidiameter sit *ba* erit *ap* sinus anguli inclinationis. Eodem modo probatur AP esse sinum anguli inclinationis; sunt enim *ab* & AB æquales per constructionem. Rursus quoniam angulus *kce*, & *lcb* est vterque rectus, dempto communi angulo *lce* remanet *ecb* æqualis angulo *kcl* refracto, quoniam ergo *ce* est æqualis *ab* erit *er* sinus anguli refracti. Eâdem methodo ostenditur ER esse sinum anguli refracti in alterâ inclinatione. Porro vbi medium secundum rarius est primo, angulus *qcf* & *lcb* est vterque rectus, dempto ergo communi angulo *lcf* remanet angulus *fcb* æqualis angulo refracto *qcl*. Est ergo *ff* sinus anguli refracti; & per eandem rationem FS est sinus anguli refracti in inclinatione altera. Quoniam ergo est vt *ap* ad *cr*, vel *ff* in vnâ inclinatione, ita AP ad ER vel FS in alterâ inclinatione, erit vt sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in vna inclinatione, ita sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in alterâ inclinatione, siue refractio fiat versus perpendiculum, siue ad partes à perpendiculo auersas. Igitur si sint duæ quælibet inclinationes, &c. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

IN maiore angulo inclinationis maior est angulus refractus, in minore minor. Maioris enim anguli maior semper est sinus. Et est iam ostensum, esse vt sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, ita sinum alterius anguli inclinationis, ad sinum anguli in illa inclinatione refracti.

PROPOSITIO XIII.

Si duo radij æqualiter inclinati procedant ad planum diuersi medij, alter à medio raro in densum, alter à medio denso eodem, in medium rarum, sinus anguli refracti in raro, sinus anguli inclinationis, & sinus anguli refracti in denso erunt continuè proportionales.

SIt CB planum diuidens duo media, quorum primum sit rarum, secundum densius, & sit AC radius inclinatus ad planum CB.

in quocunque angulo A C B, ducatur A B perpendicularis ad A C secans planum in B, & compleatur parallelogrammum A B C D. Quo tempore igitur pūctum A venit ad planum in C, eodem, si media essent eiusdem naturæ, immergeretur punctum B subter planum, profunditate perpendiculari D H, sed quoniam densius statuitur mediū infra planum quàm supra, sit immersum punctum B profunditate tantum E I. Est igitur linea lucis iam C E facta æqualis rectæ A B, & ductà K C perpendiculari ad C E, & L C ad C B erit angulus refractus K C L, cui ostensus est in præcedente, æqualis E C I. est ergo anguli refracti in denso sinus E I. Et quia angulus A B C æqualis est angulo inclinationis, vt ostensum est in præcedente, & huic æqualis est B C D erit recta D H ducta perpendicularis ad C B sinus anguli inclinationis. Et habet D H ad E I rationem eam quam requirit semper eandem, eorundem mediorum diuersitas. Supponamus iam medium primum esse densius secundo, sitque inclinatio radij A C eadem quæ ante: quo tempore ergo punctum A est in superficie medij rari ad C erit punctum B immersum in raro, profunditate G F maiore quàm est D H. Scilicet pro ratione mediorum, quam supposuimus esse vt D H ad E I. Est igitur F G ad D H, vt D H ad E I. Sunt itaque continuè proportionales F G, D H, E I; sed ostensum est in præcedente angulum B C F esse angulo refracto in raro L C M æqualem, quare F G est sinus anguli refracti in raro, sicut D H est sinus anguli inclinationis, & E I sinus anguli refracti in denso. Itaque sinus anguli refracti in raro, sinus anguli inclinationis, & sinus anguli refracti in denso, sunt continuè proportionales. Ideoque si duo radij æqualiter inclinati, &c. Quod erat probandum.

ALIA DEMONSTRATIO EIVSDEM PROPOSITIONIS.

SIt planum media separans G B F, & super rectâ G B F diametro constituatur circulus G H F E, cuius centrum B. Sit autem quod

est supra diametrum, medium rarum, quod est infra densum; ducatur A C per centrum in angulo quocunque inclinationis dato A B H in medio raro, cui æqualis est angulus C B E in medio denso, & sinus anguli inclinationis est M A vel O C. Iam supponamus radium A B venientem è raro in densum, refringi in radium B D, hoc est, versus perpendicularem, vtcunque. Sinus ergo anguli refracti in denso est D R ducta à circumferentia in D perpendiculariter ad B E, & huic æqualis est L I. Rursus supponamus radium, venientem à medio denso in rarum secundum inclinationem quam habet D B, erit ille radius refractus in medio raro, ad B A, vt ostensum est Propositione 10. Et manifestum satis est per se: eadem enim est via à D per B ad A. quæ erat ante ab A per B ad D, (sicut Thebis Athenas, & Athenis Thebas) & angulus refractus in raro A B H cuius sinus est M A, idem cum sinu anguli inclinationis radij, qui veniebat è medio raro in densum. Si deinde fiat, vt D R sinus anguli inclinationis venientis radij à D ad B in denso, ad M A sinum anguli eius refracti in raro, ita C O vel M A sinus anguli inclinationis datæ ad aliud, puta N K erit N K sinus anguli refracti in raro, radij inclinati in denso secundum angulum datum C B E, hoc est A B H. Nam (per duodecimam) vt sinus anguli inclinationis vnius, ad sinum anguli in illa inclinatione refracti, ita est sinus anguli inclinationis alterius ad sinum anguli in illa inclinatione refracti. Sunt itaque continuè proportionales N K sinus anguli refracti in raro, M A sinus anguli inclinationis communis, & L E sinus anguli refracti in denso: quare si duo radij æqualiter inclinati, &c. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

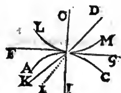
Manifestum hinc est, dato sinu anguli refracti in vno medio ex altero, & inclinatione, dari sinum anguli refracti in altero medio, vel datis angulis refractis vtriusque medij in eadem inclinatione, dari ipsam inclinationem, vel data inclinatione, vna cum ratio-

ne quam habent inter se obsequia mediorum, dari cætera.

PROPOSITIO XIV.

Radij incidentis obliquè in medium diuersum, cuius superficies est curua, refractio eadem est ac si incidisset in contactum planæ superficiei, ipsam curuam contingentis.

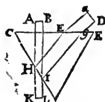
SIt medium quod est infra rectam F B G diuersum ab eo quod est supra, ducatúrque O P secans F B G in B ad angulos rectos, ducantúrque duæ curuæ A B C, & L B M se inuicem & rectam F G contingentes in puncto B: inc idat autem ad planum F G in puncto B in inclinatione quacunque radius D B qui refringatur à directa D B I, vel versus perpendiculum B P, vel contra, vt B k. in mediâ autem latitudine radij D B K (nam ostensum est omnem radium habere latitudinem) consideretur linea Mathematica D B K, ita vt B consideretur quoque, vt punctum contactus. Iam si abscindatur à medio, quod est infra F G, pars illa quæ continetur inter planum F G, & superficiem conuexam A B C, manifestum est, non ideo mutari situm rectæ B K, nam punctum B non tollitur, cum sit commune vtrisque A B C curuæ, & F B G rectæ, erit tamen medium quod est infra A B C diuersum ab eo quod est supra; quare radij incidentis obliquè in medium diuersum cuius superficies est conuexa, refractio eadem est ac si incidisset in contactum planæ superficiei ipsam conuexam contingentis. Rursus si ad medium quod est infra F B G adieceris medij, eiusdem generis, quantum impleat spatium quod continetur inter F G planum, & L B M concauam superficiem. Manifestum est, non ideò mutari situm rectæ B k, quia punctum B est in ipso plano F B G nonminus quam in concauo L B M, erit tamen medium quod est infra L B M diuersum ab eo quod est supra. Quare radij incidentis obliquè in medium diuersum cuius superficies est concaua, refractio eadem est ac si incidisset in contactum planæ superficiei ipsam



concauam contingentis. Itaque radij incidentis obliquè in medium diuersum cuius superficies est curua,&c. Quod est demonstrandum.

Habes iam sententiam meam de natura lucis, & refractionibus, in qua continentur elementa prima Anaclasticæ, ad perfectam cuius cognitionem in re Physicâ contemplandæ sunt Diaphanorum omnium naturæ, & figuræ, maxime autem figuræ.

Ex iis quæ de natura refractionis dicta sunt, facile est colligere, in omni refractione lineam lucis à quo radius exit quanquam sit minima quæ dari possit, concipere dum radius refringitur vertiginem quandam, & quo sæpius refringitur eâdem via, eo maiorem esse vertiginem, ex quo sequitur alterum latus radij scilicet exterius incidere in oculum motu recto, qui augetur à motu vertiginis, alterum autem motu recto qui vertigine minuitur. Atque in hoc fortasse consistit, quod in prismate contento duobus planis oppositis triangularibus & tribus parallelogrammis termini obiectorum ex ea parte qua refractio facit cubitos, sunt rubri primùm, & deinde flaui, ex altera vero parte qua refractio facit angulos, sunt primùm virides vel cærulei, & deinde violacei. Exempli causâ, sit prismatis triangulum C D E ad cuius latus CE cadant obliquè radij af, bg, à terminis obiecti a b, inde refringantur ad H I, & inde iterum ad K L videbitur obiectum in A B, rubrum ex parte A, quod definit in flauo versus B, at à parte B viride desinens in violaceo versus exteriora. Quod ideo accidere conijcio quod radius a f H K acquirat vertiginem in cubitis f & H, quæ vertigo motum eius rectum secundat, sed turbat, vnde color ille ruber, & flauus ad interiora. Sed in angulis g & I illa vertigo adimit de motu radij recto, & turbat quoque; vnde nascitur color viridis & violaceus ad exteriora, minus fortes quàm ruber & flauus. Confirmat coniecturam hanc quòd color ruber incipiens ab A tendit versus B, & viridis à B tendit versus exteriora.



FINIS.

